VIZSGÁLATOK A MEGBÍZHATÓSÁGELMÉLET KÖRÉBŐL

Írta: DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR

Néhány megjegyzés a megbízhatóság fogalmával és mértékével kapcsolatosan

A matematika szerepe és jelentősége világszerte megnövekedett, s napjainkban szinte minden tudományágban végbemegy a matematizálás folyamata. Ennek jelentős oka többek között az, hogy a legkülönbözőbb területeken dolgozó szakemberek észrevették, miszerint számos, ezideig intuitív módon megválaszolt kérdés egzaktabb módon is megválaszolható, ha számokat rendelünk a munkánkkal kapcsolatos különböző cselekedeteink lehetséges eredményeihez. Az emberi tevékenység egzaktabbá tételéhez a munka hatékonysága növelésének tényleges szükségessége vezetett. A modern technika rohamos fejlődése számos kérdés közül kiemelte azt, amely a különböző gyártmányok, berendezések, rendszerek felhasználási hatásfoka növelésének szükségességével kapcsolatos. E kérdéskomplexumok elvonatkoztatott módszerekkel való vizsgálata napjainkban új tudományágat teremtett, melyet megbízhatóságelméletnek neveznek. B. V. GNYEGYENKO szerint (l. [1]) a megbízhatóságelmélet *„azon általános eljárásokat és módszereket tanulmányozza, amelyeket be kell tartani a tervezésnél, gyártásnál, átvételnél, szállításnál és a gyártmány üzemeltetésénél a felhasználás maximális hatásfokának biztosítása érdekében; feladata továbbá a berendezések megbízhatóságára vonatkozó számítások kidolgozása elemeik megbízhatóságának ismerete alapján. A megbízhatóságelmélet meghatározza a hibák prognózisát, felkutatja a gyártmány megbízhatósága fokozásának a módszereit a szerkesztésnél és az elkészítésnél, valamint a megbízhatóság megőrzésének lehetőségeit az üzemeltetés folyamán*".

A megbízhatóságelmélet ezen körülhatárolásából is látható, hogy a szóbajövő vizsgálatok nagyrésze a fizikusok, kémikusok, mérnökök stb. „hatáskörébe" tartozik. A problémakör konkrét tárgyaktól elvonatkoztatott részének vizsgálata azonban matematikai jellegű, s ezek megoldásához részben a már ismert matematikai módszerek alkalmazása, részben pedig új módszerek kidolgozása szükséges.

A megbízhatóságelmélet fiatal tudományág, ezért érthető, hogy ma még nem alakult ki az egységes terminológiája. Gyakran előfordul, hogy ugyanazon szakkifejezésnek különböző munkákban különböző értelmet tulajdonítanak, másrészt ugyanazon fogalmat különböző szavakkal fejeznek ki. Találhatók olyan dolgozatok is, melyben a „megbízhatóság" kifejezés jelentése a szöveg folyamán változik. — Jó összefoglalást ad a megbízhatósági vizsgálatok különböző meghatározásairól a [2] cikk. R. E. BARLOW és L. C. HUNTER szerint (l. [3]) azonban nincs a megbízhatósági definícióknak olyan természetes kiterjesztése, amely a javítás kérdését is magában foglalná. Dolgozatuknak bevezetőjében a következőket írják:

„A megbízhatóság kérdésével foglalkozó legtöbb munkának három fő hibája van:

a) Feltételezik, hogy a komponensek egymástól függetlenül működnek.
b) Csupán a leállások közötti átlagos időtartamot vizsgálják.
c) A javítás nem szerves alkotó része a megbízhatósági modellnek.

A valóságban azonban az elektronikus rendszer javítható, a komponensek nem függetlenek és bennünket nem a leállások (meghibásodások) közötti időtartam, hanem annak valószínűsége érdekel, hogy valamely megadott jövőbeli időpontban működik-e a berendezés.

A jelen cikkben azzal az általános problémával foglalkozunk, hogy valamely rendszer számára olyan megbízhatóság függvényt találjunk, amely ezt a három fogyatékosságot leküzdi".

Ezt követően kiterjesztik a rendszer hatásfokának és megbízhatóságának szokásos definícióját úgy, hogy az magába foglalja a javítást is. A szerzők a következő meggondolásból indulnak ki. A rendszer fizikai konfigurációja, valamint a cél, amelyért létrehozták, meghatároz bizonyos állapotteret (Ω). A rendszer t időpontban a számos lehetséges állapotok egyikében lehet. A rendszer állapota, mint az idő függvénye sztochasztikus folyamat, amelynek minta függvényét jelölje $x(t)$. Legyen A az állapotoknak olyan osztálya, amelyet bizonyos szempontból „kedvezőnek" nevezhetünk; továbbá legyen

$$g(x(t)) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad x(t) \in A \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{1}$$

BARLOW és HUNTER szerint a rendszer megbízhatósága:

$$R(t) = E\{g(x(t))\} = \int_{\Omega} g(x(t, \omega))\, dP(\omega). \tag{2}$$

Más szóval $R(t)$ annak a valószínűsége, hogy a rendszer a t időpontban a kedvező állapotok egyikében van. Speciálisan, ha ξ a rendszer élettartamát jelenti és $A = \{\xi \geqq t\}$, akkor

$$R(t) = P\{\xi \geqq t\} = 1 - P\{\xi < t\} = 1 - F(t). \tag{3}$$

Ennélfogva (3), azaz a megbízhatóság függvény — korábban — többnyire elfogadott definíciója (2) speciális esete. A (2) szerint értelmezett megbízhatóság függvény valóban tartalmazza a javítás kérdését is, mert például, ha a rendszer két állapotú, s a meghibásodási és a javítási szakaszok exponenciális eloszlásúak λ, illetve μ paraméterrel, akkor

$$R(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}. \tag{4}$$

Jóllehet BARLOW és HUNTER az erősítés függvény[1] fogalmának bevezetésével (2)-nél is általánosabban értelmezi a megbízhatóságot, ennek ellenére nem tudunk egyetérteni azzal, hogy ez a definíció teljes általánosságában célszerű a rendszer megbízhatóságának jellemzésére.

[1] Az erősítés függvény, jele g, egy, az állapottérben értelmezett, tetszés szerinti BOREL-féle mérhető függvény. Miután a rendszer állapota mint az idő függvénye sztochasztikus folyamat, ezért az erősítés függvény összefügg a folyamattal, azaz $g = g(x(t))$. Ez egy új, a régire szuperponált folyamatot határoz meg. A megbízhatóság általános definícióját kifejező (2) alatti összefüggésben a jelöléseket e szerint kell értelmezni.

Tekintettel arra, hogy *még napjainkban is eléggé vitatott a megbízhatóság fogalma* és kérdésköre, ezért úgy véljük, nem felesleges, ha az ezzel kapcsolatosan kialakult gondolatainkat és álláspontunkat e helyen ismertetjük.

Adott tárgyak, gyártmányok, berendezések műszaki használata szempontjából szükség van olyan jellemzők megadására, melyek — esetektől függően — mértékül szolgálnak a szóban levő tárgyak bizonyos tulajdonságai jellemzésére. A számos tulajdonság közül általában azt szükséges — legfeljebb nem elégséges — számbavenni, amely valamennyi tárgynak, gyártmánynak, kiszolgáló berendezésnek közös tulajdonsága, s ez valamilyen kapcsolatban van a tárgy funkciójával úgy, hogy csak közvetve függ annak anyagi és szerkezeti tulajdonságától.

A gyártmányok — a vázolt szempontoknak is eleget tevő — egyik közös vonása a következő

tulajdonság: *A gyártmány feladatát adott körülmények és igénybevételi feltételek mellett előre adott használati szakaszokon teljesíteni tudja.*

Ezt a tulajdonságot úgy is tekinthetjük, mint egy eseményt. A műszaki használat szempontjából ezt a kvalitatív jellegű megállapítást kvantitatív adattal kell jellemezni, vagyis a közölt eseményhez mértékként bizonyos mennyiséget kell rendelni. E végből további absztrahálásra van szükség. Most a szóba jöhető mértékeknek — mint jellemzőknek — a halmazából kell kiválasztanunk olyant, amely rendelkezik bizonyos tulajdonságokkal, nevezetesen;

I° Közvetlenül ne függjön a gyártmány anyagától, szerkezeti sajátosságaitól stb., közvetve azonban mégis olyan általános formában jellemezze azt, hogy annak felhasználásával a gyártmány lehetőleg minél több egyedi tulajdonságának számszerű jellemzését is meg lehessen adni.

II° A bevezetett mérték a gyártmányt úgy jellemezze, hogy az független legyen a felhasználás technikai állapotától; szükség esetén azonban számítástechnikailag kiterjeszthető legyen a tényleges felhasználást jellemző tulajdonságok mértékének a megadására is.

III° A mérték egyértelmű legyen, továbbá a két „ideálisan" azonos gyártmány esetén azonos értékű legyen.

A fenti tulajdonságoknak eleget tevő mérték általában már alkalmas arra, hogy két vagy több különböző gyártmány jelzett tulajdonságát összehasonlítsuk. Ez a gyakorlatban igen fontos követelmény.

A vázoltaknak matematikai megfogalmazásához tekintsük az alábbi tulajdonságokkal rendelkező absztrakt Ω teret, melynek pontjait ω-val jelöljük. Az Ω térben legyen adva a halmazoknak egy Ω-t is tartalmazó *Borel*-féle mezeje. Ezen a *Borel*-mezőn legyen értelmezve egy teljesen additív, nem negatív P halmaz függvény, melyre $P(\Omega)=1$. Ekkor azt mondjuk, hogy P valószínűségi mérték az Ω térben. Ha $\xi(\omega)$ az Ω-térben definiált mérhető valós függvény, akkor valószínűségi változónak nevezzük.

Definíció: A valós számhalmazon választott *Borel*-halmazon értelmezett $\xi(\omega)$ valószínűségi változó esetén az

$$R=P\{\omega:\ \omega\in\Omega,\ \xi(\omega)\in E\}=$$

$$=P\{\omega:\ \xi(\omega)\in E\}=P\{\xi(\omega)\in E\}=P\{\xi\in E\} \tag{5}$$

valószínűségi mértéket *megbízhatóság mérték*nek nevezzük. Ha $E=\{\omega: x\leqq\xi(\omega)<y\}$

akkor az eloszlásfüggvény fogalmának felhasználásával

$$R = R(x, y) = P\{x \leqq \xi < y\} = F(y) - F(x), \tag{6}$$

s itt az $R(x, y)$ függvényt *megbízhatóság függvény*nek nevezzük.

A gyakorlatban igen gyakran $E = \{\omega: x \leqq \xi(\omega) < \infty\}$ és így

$$R(x, \infty) = R(x) = 1 - F(x). \tag{7}$$

(Mint látható, a megbízhatóság függvényből speciális esetként kapjuk az eloszlásfüggvényt.) Nézzük meg ezután, hogy a korábban kialakított koncepció hogyan hozható kapcsolatba az itt közölt matematikai fogalmakkal.

Jelölje Ω a valós tengelyt (időtengelyt) — mint a meghibásodás lehetséges időpontjainak összességét —, melynek egy pontja ω (ω elemi esemény). Jelentse $\xi(\omega)$ az adott gyártmány szempontjából értékelendő azon időtartam hosszát, amely egy ω_1 időponttól egészen a „meghibásodási" időpontig eltelik. (ω_1 az időtengelynek többnyire az a pontja, amelytől kezdődően a gyártmányt első ízben veszik igénybe a kívánt alkalmazási célnak megfelelően.) A közöltek folytán $\xi(\omega) = \omega - \omega_1$, ami azt jelenti, hogy a folyamat ω-ban homogén, vagy másszóval; $\xi(\omega)$ értéke csak az $\omega - \omega_1$ értéktől függ és független ω_1 választásától. Ebből kifolyólag ω_1 értékét nullának is választhatjuk. Ha mármost feltételezzük, hogy a vizsgált gyártmány a vázolt szempontok mellett akkor teljesíti feladatát, ha a meghibásodási pont, ami egyben az $\omega_1 = 0$ választás folytán a gyártmány élettartam hosszát fejezi ki, az $[x, y)$ intervallumba esik, vagyis ha

$$E = \{\omega: x \leqq \xi(\omega) = \omega < y\},$$

akkor ezen tény bekövetkezésének a jellemzésére az

$$R = P\{\xi \in E\} \tag{8}$$

értéket használhatjuk. Heurisztikus meggondolások arra engednek következtetni, hogy ez a mérték felel meg leginkább az I°—III° tulajdonság követelményeinek.

Tekintettel arra, hogy a mindennapi életben a „megbízhatóság" fogalmának alkalmazásával általában azt juttatjuk kifejezésre, hogy bizonyos tárgyak adott körülmények között a kívánt módon viselkednek-e, ezért indokoltnak látszik ezt a mértéket *megbízhatóság mérték*nek, illetve *megbízhatóság függvény*nek nevezni. Ezzel tulajdonképpen eljutottunk mondanivalónk lényegéhez, nevezetesen ahhoz, hogy *valamely gyártmány megbízhatóság mértékén a gyártmány számos tulajdonságai közül egy jól definiált tulajdonsághoz rendelt valószínűségi mértéket értünk.*

Tekintsük mármost a valószínűségelméletben az ingadozás (szóródás) jellemzésének a problémáját. Mint ismeretes, az ingadozás jellemzésére számos mértékszámot használnak. Ilyen pl. a várható eltérés, a szórás, a minta terjedelem, az interkvartilis félterjedelem, stb.

Ha azt vizsgáljuk, hogy adott esetben az ingadozás melyik mértékszáma bizonyul megfelelőnek, akkor a körülményektől függően, hol az egyik, hol a másik mértékszámot fogadjuk el. Zavart okozna, ha minden esetben, az elfogadott mértékszámot neveznénk szóródásnak, mivel ekkor a szóródás elnevezés mindig más és más mértékszámot takarna. E helyett helyesebbnek látszik, ha a szóródásnak különböző mértékszámait definiáljuk és konkrét esetben mindig a megfelelő mértékszámot használjuk az ingadozás jellemzésére.

Úgy véljük ugyanez a helyzet s ugyanezt kell tennünk a megbízhatóság mértékszámai megválasztásakor.

Mivel (2) alapján $R(t)$ értéke a g megválasztásától függően változik, így különböző g esetén mindig más és más mértékszámot kapunk a megbízhatóság jellemzésére. Ezeket nyilvánvalóan nem lenne célszerű minden esetben ugyanazon szóval illetni.

A gyakorlatban a gyártány egy másik fontos jellemzője lehet *élettartamának a várható értéke*. Ennek definíciója a következő:

(9) $$M\{\xi(\omega)\} = \int_{\Omega} \xi(\omega)\, dP(\omega)$$

feltéve, hogy $\xi(\omega)$ integrálható P-re vonatkozóan.

Mint ismeretes, ha $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$ az Ω térben definiált n valószínűségi változók, $E_1, E_2, \dots, E_n$ pedig a valós tengelyen választott *Borel*-halmazok, melyekre a

(10) $$P\{\xi_i(\omega) \in E_i : i = 1, 2, \dots n\}_{\omega} = \prod_{i=1}^{n} P\{\xi_i(\omega) \in E_i\}_{\omega}$$

összefüggés teljesül, akkor a valószínűségi változókat függetleneknek mondjuk. Ha a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változókat úgy tekintjük, mint valamely rendszer alkotó elemeinek élettartamát, s ha ezekre teljesül (10), akkor az ilyen rendszert *független soros rendszer*nek nevezzük. Ez esetben

(11) $$R = \prod_{i=1}^{n} P\{\xi_i \in E_i\}$$

szolgáltatja a rendszer megbízhatóság függvényét. A gyakorlatban többnyire

(12) $$R = \prod_{i=1}^{n} P\{\xi_i \geqq t\} = \prod_{i=1}^{n} [1 - F_i(t)] = \prod_{i=1}^{n} R_i(t).$$

Dolgozatunk további részében független soros rendszerekkel kapcsolatos kérdéseket vizsgálunk.

Néhány, a megbízhatóságelmélet körébe vágó kérdés vizsgálata nem Markov-típusú sztochasztikus folyamatok esetén

A gyakorlatban valamely rendszerrel kapcsolatos s a megbízhatóságelmélet körébe vágó kérdéseket igen gyakran a *Markov*-láncok és folyamatok segítségével lehet megválaszolni. Ebben a részben a megbízhatóságelméletnek olyan kérdéskörével foglalkozunk, mely matematikai szempontból a nem *Markov*-típusú sztochasztikus folyamatok fejezetéhez tartozik. Vizsgálataink többnyire TAKÁCS LAJOS [4] dolgozatában található tételeinek bizonyos irányú általánosításain alapulnak. Anélkül, hogy külön is hivatkoznánk rá, megemlítjük, hogy esetenként használni fogunk a rekurrens folyamatok elméletéből olyan — ma már igen elterjedtnek mondható — meggondolásokat, melyet először TAKÁCS LAJOS [5] alatti dolgozatában alkalmazott. A kapott eredmények többek között lehetővé teszik, hogy R. E.

BARLOW és L. C. HUNTER [3] dolgozatában definiált *„rendszer efficienciáját”* (rendszer hatásfokát) bizonyos feltételek mellett közvetlenül meghatározhassuk.

A rendszer hatásfokának fogalmát BARLOW és HUNTER előtt is már használták, csak többnyire másképpen nevezték. A [3]-ban igen általánosan definiált hatásfoknak egy speciálisabb alakját a hazai irodalomban (l. pl. [7] 407. o.) a rendszer (üzem) kihasználási tényezőjének nevezték el.

Tekintsük a $\{\xi(t);\ 0\leqq t<\infty\}$ sztochasztikus folyamatot, ahol a $\xi(t)$ valószínűségi változók értékkészletét valamilyen Ω absztrakt tér elemei alkotják. Legyen $\Omega=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, ahol $A_i\cap A_k=0$, ha $i\neq k$. Tegyük fel, hogy $\xi(0)\in A_1$, továbbá, hogy a $\{\xi(t)\}$ folyamat növekvő t értékek esetén rendre az A_k-ból az A_{k+1} állapotba kerül ($k=1,2,\dots,n$; $A_n\to A_1$). Jelöljék az egymásutáni A_k állapotban való tartózkodási időtartamokat rendre a $\xi_1(A_k)$, $\xi_2(A_k),\dots$ valószínűségi változók. Feltesszük, hogy a $\xi_i(A_k)$ nem-negatív független valószínűségi változók, amelyekre

$$P\{\xi_i(A_k)\leqq x\}=G^{(k)}(x)\qquad (k=1,2,\dots,n;\ i=1,2,\dots). \tag{1}$$

Legyen $P_{A_k}(t)=P_k(t)=P\{\xi(t)\in A_k\}$. Nyilvánvalóan

$$P_1(t)+P_2(t)+\dots+P_n(t)=1 \tag{2}$$

valamennyi t értékre. Most bebizonyítjuk a következő tételt.

1. TÉTEL:

$$P_{k+1}(t)=\int_0^t [1-G^{(k+1)}(t-y)\,dM(y)]\qquad (k=1,2,\dots,n-1) \tag{3}$$

ahol

$$M(t)=\sum_{n=0}^{\infty}F_{n+1}(t) \tag{4}$$

$$F_{n+1}(t)=\int_0^t L(t-y)\,dH_n(y), \tag{5}$$

s itt

$$L(t)=P\{\xi_1(A_1)+\dots+\xi_1(A_k)<t\} \tag{6}$$

$H_n(t)$ pedig a

$$H(t)=P\{\xi_1(A_1)+\dots+\xi_1(A_n)<t\} \tag{7}$$

eloszlásfüggvénynek önmagával való n-szeres konvolúcióját jelenti. ($H_0(t)=1$ *ha* $t\geqq 0$ *és* $H_0(t)=0$ *ha* $t<0$).

Bizonyítás: Tekintsük az első $\bigcup_{i=1}^{k} A_i=E_k$ állapotot s tegyük fel, hogy ez az állapot a τ_1 időpontban ér véget s az ezt követő $\bigcup_{i=k+1}^{n} A_i\cup E_k=B_k$ állapotok rendre a $\tau_2,\tau_3,\dots,\tau_n,\dots$ időpontokban ismétlődnek.

Ekkor a $\tau_n - \tau_{n-1}$ $(n=2, 3, \dots)$ időkülönbségek egyforma eloszlású, független pozitív valószínűségi változók,

$$H(t) = P\{\tau_n - \tau_{n-1} < t\} = P\{\xi_i(A_{k+1}) + \xi_i(A_{k+2}) + \dots + \xi_i(A_p) +$$
$$+ \xi_{i+1}(A_1) + \dots + \xi_{i+1}(A_k) < t\} = P\{\xi_1(A_1) + \xi_1(A_2) + \dots + \xi_1(A_n) < t\}$$

eloszlásfüggvénnyel. Mivel a $\tau_{n+1} = \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1) + \dots + (\tau_{n+1} - \tau_n)$ előállítás szerint τ_{n+1} egyenlő $n+1$ számú független valószínűségi változó összegével, amelyek közül n számú eloszlásfüggvénye $H(t)$, míg a τ_1 valószínűségi változóé

$$L(t) = P(\tau_1 < t) = P\{\xi_1(A_1) + \dots + \xi_1(A_k) < t\},$$

ezért

$$P\{\tau_{n+1} < t\} = L(t) * H_n(t) = \int_0^t L(t-y)dH_n(y) = F_{n+1}(t),$$

ahol $H_n(t)$ jelöli a $H(t)$ eloszlásfüggvénynek önmagával való n-szeres konvolúcióját.

Tekintettel arra, hogy

$$\{\xi(t) \in A_{k+1}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau_n \leqq t < \tau_n + \xi_n(A_{k+1})\},$$

így a

$$P\{\tau_n \leqq t < \tau_n + \xi_n(A_{k+1})\} = \int_0^{\infty} P\{\tau_n \leqq t < \tau_n + \xi_n(A_{k+1}) \mid \tau_n = y\}\, dF_n(y) =$$
$$= \int_0^t [1 - P\{\xi_n(A_{k+1}) \leqq t-y\}]\, dF_n(y) = \int_0^t [1 - G^{(k+1)}(t-y)]\, dF_n(y)$$

összefüggés következtében

$$P_{k+1}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t [1 - G^{(k+1)}(t-y)]\, dF_n(y) = \int_0^t [1 - G^{(k+1)}(t-y)]\, dM(y).$$

Megjegyzések:

a) Az $M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}(t)$ a $(0, t]$ intervallumban befejeződött A_k állapotok számának várható értékét jelenti.

(8) b) $$P\{\tau_{n+1} < t\} = F_{n+1}(t) \leqq L(t) \cdot H^n(t), \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

ugyanis

$$\{\tau_{k+1} < t\} \subset \{\tau_k < t\} \cap \{\tau_{k+1} - \tau_k < t\} \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

következtében

$$P\{\tau_{k+1} < t\} \leqq P\{\tau_k < t\} P\{\tau_{k+1} - \tau_k < t\}.$$

Innen összeszorzással kapjuk, hogy

$$P\{\tau_{n+1} < t\} \leqq P\{\tau_1 < t\} \prod_{k=1}^{n} P\{\tau_{k+1} - \tau_k < t\}$$

s ebből b) már következik.

Megemlítjük még, hogy ha $n>0$ és $\lim\limits_{t\to+0} H(t)=0$, akkor

$$\lim_{t\to+0} \frac{F_{n+1}(t)}{F_n(t)} = 0, \tag{9}$$

továbbá az $F_{n+1}(t) \leqq L(t)H^n(t)$ következtében ha $H(t)<1$, akkor

$$M(t) \leqq \frac{L(t)}{1-H(t)}. \tag{10}$$

c) Mivel az

$$\mathscr{L}\{M(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, dM(t)$$

$$\mathscr{L}\{L(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, dL(t)$$

$$\mathscr{L}\{H(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, dH(t)$$

Laplace—Stieltjes-transzformáció bevezetése mellett

$$\mathscr{L}\{M(t)\} = \frac{\mathscr{L}\{L(t)\}}{1-\mathscr{L}\{H(t)\}}, \tag{11}$$

ezért

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\mathscr{L}\{L(t)\}}{1-\mathscr{L}\{H(t)\}}\right\} \leqq \frac{L(t)}{1-H(t)}. \tag{12}$$

Az $\mathscr{L}\{M(t)\}$-re kapott (11) összefüggésből ismert *Tauber*-típusú tétel felhasználásával közvetlenül adódik a

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\int\limits_0^\infty (1-H(t))\,dt} \tag{13}$$

aszimptotikus összefüggés. Ennek következtében az $M(t)$-re adódó egyenlőtlenség elsősorban kisértékű t-k esetén szolgáltat jelentősebb információt.

2. TÉTEL: *Ha* $m = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i < \infty$, *ahol* $m_i = \int\limits_0^\infty \left(1-G^{(i)}(t-0)\right) dt$, *és* $P_k(t)$ *elég nagy értékű* t *esetén szigorúan monoton függvény, akkor*

$$\lim_{t\to\infty} \left[\int_0^t P_k(u)\,du - \frac{m_k}{m} t\right] = b_k \tag{14}$$

ahol

$$b_k = \lim_{t\to\infty} \left[\int_0^t P_k(u)\,du - tP_k(t)\right] = \lim_{s\to+0} s[\varphi_k(s)+\varphi_k'(s)], \tag{15}$$

s itt

$$\varphi_k(s) = \int_0^\infty e^{-st} d \int_0^t P_k(u)\, du = \int_0^\infty e^{-st} P_k(t)\, dt. \tag{16}$$

Bizonyítás: TAKÁCS LAJOS [4] dolgozatában közölt 5. tételének bizonyításánál alkalmazott gondolatmenet megismétlésével, vagy akár a SZÁSZ OTTÓ-tól származó *Tauber*-típusú tétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t P_k(u)\, du = \frac{m_k}{m}. \tag{17}$$

Ennek ismeretében pedig — a monotonitás kihasználásával — a tétel további részének igazolása DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR [6] dolgozatában ismertetett LEMMA bizonyításánál közölt gondolatmenet alkalmazásával történhet.

Jelölje $\nu_k(t)$ a t ideig befejeződött A_k állapotok számát $\zeta_k(t)$ pedig a t ideig befejeződött A_k állapotok összhosszát.

3. TÉTEL:

$$1^\circ \quad P\{\nu_k(t) = n\} = F_n(t) - F_{n+1}(t+0) \tag{18}$$

$$2^\circ \quad P\{\zeta_k(t) < x\} = \sum_{n=1}^\infty \bar{G}_n^{(k)}(x)\,[F_n(t) - F_{n+1}(t+0)] \tag{19}$$

ahol

$$\bar{G}_n^{(k)}(x) = \begin{cases} P\{\xi_1(A_k) + \ldots + \xi_n(A_k) < x\} & ha \quad x \leqq t \\ 1 & egyébként. \end{cases} \tag{20}$$

Bizonyítás: Mivel $\nu_k(t) = n$ akkor teljesül, ha $\tau_n \leqq t < \tau_{n+1}$, ezért felírható, hogy

$$P\{\nu_k(t) = n\} = P\{\tau_n \leqq t < \tau_{n+1}\} = \int_0^\infty P\{\tau_n \leqq t < \tau_{n+1} \mid \tau_n = y\}\, dF_n(y) =$$

$$= \int_0^t P\{\tau_{n+1} > t \mid \tau_n = y\}\, dF_n(y) = \int_0^t [1 - P\{\tau_{n+1} \leqq t \mid \tau_n = y\}]\, dF_n(y) =$$

$$= F_n(t) - F_{n+1}(t+0).$$

A 2° alatti állítás pedig a

$$P\{\zeta_k(t) < x\} = \sum_{n=1}^\infty P\{\xi_1(A_k) + \ldots + \xi_{\nu_k(t)}(A_k) < x \mid \nu_k(t) = n\} P\{\nu_k(t) = n\}$$

összefüggés alapján nyerhető.

4. TÉTEL: *Ha* $m = \int_0^\infty x\, dH(x)$ *és* $\sigma^2 = \int_0^\infty (x-m)^2\, dH(x) < \infty$,

akkor

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{\nu_k(t)-\frac{t}{m}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{m^3}}}<x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du. \tag{21}$$

A *bizonyítás* W. FELLER ugyanazon módszere segítségével történhet, mint amelyet TAKÁCS LAJOS alkalmazott hasonló jellegű tétele bizonyításánál [8] dolgozatának 376. oldalán. Megjegyezzük, hogy itt τ_1 eloszlása nem feltétlenül egyezik meg a $\tau_n-\tau_{n-1}$ $(n=2, 3, \ldots)$ valószínűségi változók eloszlásával, ez a tény azonban a határérték fenti alakját nem befolyásolja.

Jelölje az $\eta_k(t)$ valószínűségi változó a t időpontnak a közvetlen utána következő A_k állapot befejezésétől vett távolságát.

5. TÉTEL:

$$P\{\eta_k(t)\leqq x\} = \int_{t}^{t+x} [1-H(t+x-y+0)]\,dM(y). \tag{22}$$

Bizonyítás: Az $\{\eta_k(t)\leqq x\}$ akkor teljesül, ha a $(t, t+x]$ intervallumban legalább egy A_k állapot befejeződik. Ez pedig több egymást kizáró módon jöhet létre: $(t, t+x]$ intervallumban az utoljára befejeződött A_k állapot lehet az $n=1, 2, \ldots$-ik és így

$$P\{\eta_k(t)\leqq x\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{t<\tau_n\leqq t+x<\tau_{n+1}\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{t}^{t+x} [1-H(t+x-y+0)]\,dF_n(y) =$$

$$= \int_{t}^{t+x} [1-H(t+x-y+0)]\,dM(y).$$

Q. e. d.

KÖVETKEZMÉNY: *Annak a valószínűsége, hogy a* $(t, t+x]$ *intervallumban legfeljebb n* A_k *állapot fejeződött be:*

$$P\{\nu_k(t+x)-\nu_k(t)\leqq n\} = 1-P\{\eta_k(t)\leqq x\} * H_n(x). \tag{23}$$

6. TÉTEL: *Ha* $m=\int_0^\infty x\,dH(x)<\infty$ *és* $P\{\eta_k(t)\leqq x\}$ *elég nagy értékű t esetén szigorúan monoton függvény, akkor*

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\int_0^T P\{\eta_k(t)\leqq x\}\,dt-\frac{T}{m}\int_0^x [1-H(y)]\,dy\right\} = \beta_k \tag{24}$$

ahol

$$\beta_k = \lim_{T\to\infty}\left\{\int_0^T P\{\eta_k(t)\leqq x\}\,dt - TP\{\eta_k(t)\leqq x\}\right\} = \tag{25}$$

$$= \lim_{s\to+0} s[\chi_k(s,x)+\chi_k'(s,x)],$$

s itt

$$\chi_k(s,x) = \int_0^\infty e^{-sT}\,d_T\int_0^T P\{\eta_k(t)\leqq x\}\,dt = \int_0^\infty e^{-sT}\,P\{\eta_k(T)\leqq x\}\,dT. \tag{26}$$

Bizonyítás: A SZÁSZ OTTÓ-tól származó *Tauber-típusú* tétel szerint

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T P\{\eta_k(t)\leqq x\}\,dt}{T} = \lim_{s\to+0} s\chi_k(s,x) = \frac{1}{m}\int_0^x [1-H(y)]dy, \tag{27}$$

ennek alapján pedig a tétel további állítása a 2. Tétel bizonyításához hasonlóan történhet.

Értelmezzük a $\{\psi_k(t),\ 0\leqq t<\infty\}$ sztochasztikus folyamatot olymódon, hogy

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad \xi(t)\in A_k \\ 0 & \text{ha} \quad \xi(t)\in \bar{A}_k \end{cases}. \tag{28}$$

Legyen

$$\alpha_k(t) = \int_0^t \psi_k(t)\,du. \tag{29}$$

Az $\alpha_k(t)$ valószínűségi változó a $(0, t)$ intervallum azon u pontjaiból álló halmaz mértéke, amelyekre $\xi(u)\in A_k$. Másszóval az $\alpha_k(t)$ valószínűségi változó bizonyos „A_k szakaszok" hosszának összegeként állítható elő, ahol az utolsó „A_k szakasz" esetleg csonka.

7. TÉTEL: *Ha* $k=2, 3, \ldots, n-1$, *akkor az* $\alpha_k(t)$ *valószínűségi változó eloszlásfüggvénye*

$$\begin{aligned} P\{\alpha_k(t)\leqq x\} = 1-\Bigg[\Bigg(\sum_{n=0}^{\infty}\hat{H}_n(x)\,[L_n(t-x)-L_{n+1}(t-x)]\Bigg)- \\ -P\Bigg\{\sum_{i=k+1}^{n}\alpha_i(t)=x\Bigg\}\Bigg]*\Bigg[1-\sum_{n=0}^{\infty}K_n(x)[\hat{L}_n(t-x)-\hat{L}_{n+1}(t-x)]\Bigg] \end{aligned} \tag{30}$$

ahol

$$\hat{L}(t)=P\{\xi_1(A_1)+\xi_1(A_2)+\ldots+\xi_1(A_{k-1})<t\},$$

$$\hat{H}(t)=P\{\xi_1(A_{k+1})+\ldots+\xi_1(A_n)<t\},$$

$$G^{(k)}(t)*\hat{H}(t)=K(t),\ \hat{L}(t)*G^{(k)}(t)=L(t).$$

Bizonyítás: Legyen

$$P\{\alpha_k(t)\leqq x\}=\Omega_{A_k}(t,x). \tag{31}$$

A használt jelölések alapján TAKÁCS LAJOS [4] dolgozatának 1. Tétele értelmében

$$(32)\quad P\{\alpha_k(t)+\ldots+\alpha_n(t)\leqq x\} = \Omega_{\bigcup\limits_{i=k}^{n} A_i}(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x)[\hat{L}_n(t-x)-\hat{L}_{n+1}(t-x)],$$

$$(33)\quad P\{\alpha_1(t)+\ldots+\alpha_{k-1}(t)<x\} = \Omega_{\bigcup\limits_{i=1}^{k-1} A_i}(t,x) = 1-\Omega_{\bigcup\limits_{i=k}^{n} A_i}(t,t-x),$$

$$(34)\quad P\{\alpha_{k+1}(t)+\ldots+\alpha_n(t)\leqq x\} = \Omega_{\bigcup\limits_{i=k+1}^{n} A_i}(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{H}_n(x)[L_n(t-x)-L_{n+1}(t-x)].$$

Mivel

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) = t,$$

ezért

$$P\{\alpha_k(t)\leqq x\} = 1-P\{\alpha_1(t)+\ldots+\alpha_{k-1}(t)+\alpha_{k+1}(t)+\ldots+\alpha_n(t)<t-x\} =$$

$$= 1-\left[\Omega_{\bigcup\limits_{i=k+1}^{n} A_i}(t,x)-P\left\{\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i(t) = x\right\}\right] * \Omega_{\bigcup\limits_{i=1}^{k-1} A_i}(t,x).$$

Q. e. d.

Megjegyzés: a) A $k=1$ és $k=n$ eset közvetlenül adódik TAKÁCS LAJOS hivatkozott tételéből.

b) Ha $\bar{v}_k(t)$ jelöli a $(0, t]$ intervallumban történő A_k állapotok számát, akkor

$$(35)\quad P\{\bar{v}_k(t)=n\} = P\{v_k(t)=n\}[1-P_k(t)]+P\{v_k(t)=n-1\}P_k(t).$$

$$(P\{v_k(t) = -1\} = 0).$$

c)

$$(36)\quad M\{\alpha_k(t)\} = M\left\{\int_0^t \psi_k(u)\,du\right\} = \int_0^t M\{\psi_k(u)\}\,du =$$

$$= \int_0^t P\{\psi_k(u) = 1\}\,du = \int_0^t P_k(u)\,du.$$

Ez az összefüggés lehetővé teszi számunkra a BARLOW és HUNTER [3] dolgozatában definiált rendszer efficienciájának[2] a közölt feltételek melletti közvetlen meghatá-

[2] Ha a meghibásodásnak a környezet hatásától függő eloszlásfüggvénye $F(t)$ akkor definíciószerűen a rendszer hatásfoka:

$$E_{ff} = \int_{-\infty}^{+\infty} E\{g[x(t)]\}\,dF(t)$$

Ha a környezet hatásától függő meghibásodás egyenletes eloszlású a $[0, T]$ intervallumban, akkor

$$E_{ff_T} = \frac{1}{T}\int_0^T E\{g[x(t)]\}\,dt.$$

rozását. Ugyanis $M\{\alpha_k(T)\}$ az állapotok egy adott szempontból „kedvezőnek" nevezhető osztályában való tartózkodás összidejének várható értéke, s BARLOW és HUNTER a rendszer hatásfokát pedig — bizonyos feltételek mellett — az $\frac{M\{\alpha_k(T)\}}{T}$ értékkel jellemzi. Az $\frac{1}{T}\int_0^T P_k(u)du$ kiszámítására az 1. és 2. Tételek adnak útbaigazítást.

8. TÉTEL. *Ha $\sigma < \infty$, akkor*

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{\alpha_k(t)-\frac{m_k t}{m}}{\sqrt{\frac{m_k^2(\sigma^2-\sigma_k^2)+\sigma_k^2(m-m_k)^2}{m^3}t}} \leqq x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du, \tag{37}$$

s itt

$$\sigma_k^2 = \int_0^\infty (t-m_k)^2\, dG^{(k)}(t-0).$$

A tétel állítása könnyen belátható TAKÁCS LAJOS [4] dolgozatának 2. tétele felhasználásával.

Alkalmazások:

Bizonyos termelési folyamatok optimális üzemeltetésének meghatározásánál gyakran lényeges feltétel az, hogy bizonyos anyagból előre adott T ideig átlagosan minél többet termeljünk. (Ha azt írnánk elő, hogy a termelt anyag az idő függvényében maximális legyen, akkor elképzelhető, s valójában gyakran így is van, hogy viszonylag rövid idő alatt bizonyos részegységek részlegesen vagy teljesen tönkre mennek.) Ez technikailag úgy érhető el, hogy a keletkezendő hibákat mielőbb igyekszünk kiküszöbölni. Védelmi rendszer alkalmazásával bizonyos hibák bekövetkezését meg tudjuk akadályozni, más hibákat pedig viszonylag gyorsan tudunk észlelni.

A folyamatosan működő rendszereknél pl. a zavarjelző készülék elősegítheti a hiba gyorsabb feltárását, s ezáltal csökkenthető a kényszerállási idő. Az olyan rendszerekben pedig, amelyek a működési és a működésre kész állapotok váltakozásaival jellemezhetőek, a beépített zavarjelző készülék lényegesen megnövelheti a rendszer megbízhatóságát, mivel a működésre kész állapotban el lehet végezni az elemek ellenőrzését, esetleg még a hibák kijavítását is. Általában egy ilyen zavarjelző készülék nem azt jelzi, hogy a meghibásodott alkatrész pontosan melyik, hanem csak azt, hogy a hiba melyik alrendszerben van. (Minél kisebb számú alkatrészből áll egy alrendszer, annál kevesebb idő szükséges a hibás alkatrész feltárására.) Esetenként a zavarjelző alkalmazása, ha nem is óv meg végérvényesen valamely katasztrófális hiba bekövetkezésétől, azért ezen esemény bekövetkezésének idejét jelentősen „kitólhatja".

Megemlítjük, hogy számos területen találhatók olyan problémák, melyek a közölt eredményekkel megválaszolhatók. E helyen azért szorítkoztunk a védelmi rendszerekkel kapcsolatos kérdések tárgyalására, mert ilyen jellegű problémák ténylegesen felmerültek s vizsgálataik folyamatban vannak a NEHÉZVEGYIPARI KUTATÓ INTÉZET Automatizálási osztályán.

1. Valamely rendszer szakaszos igénybevétele esetén tételezzük fel, hogy a beépített zavarjelző teljesen hibátlanul végzi feladatát, vagyis a meghibásodásokat azonnal teljes megbízhatósággal jelzi. Jelölje A_1 azt az állapotot, hogy a rendszert termeltetni (igénybe venni) kívánjuk, A_2 pedig azt, hogy a rendszerrel nem kívánunk terméket előállítani. Jelölje továbbá B_1 a termelésre kész állapotot, B_2 pedig azt, hogy a rendszer javítás alatt áll ($A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cup A_2 = \Omega$; $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $B_1 \cup B_2 = X$). Feltételezve, hogy az A és B állapotokkal jellemzett események teljesen függetlenek, a korábbi anyag tárgyalása során használt fogalmak és jelölések ismeretében könnyen meghatározhatjuk a rendszer hatásfokát. Tudniillik a rendszer az $A_1 \cap B_1$ állapot fennállása esetén fog termelni, s annak a valószínűsége, hogy a rendszer valamely t időpontban termelő állapotban van $P_{A_1}(t)P_{B_1}(t)$. Ez alapján a keresett érték:

$$\frac{1}{T}\int_0^T P_{A_1}(u)P_{B_1}(u)\,du,$$

s itt $P_{A_1}(t)$ és $P_{B_1}(t)$ értéke az 1. tétel segítségével határozható meg.

2. Tegyük fel, hogy a rendszer növekedő t értékek esetén rendre az A_1, A_2, A_3, A_4 ($A_4 \to A_1$) állapotba kerül, s itt

A_1; működésre kész állapotot (ez alatt nem történik termelés),
A_2; termelési (működési) állapotot,
A_3; meghibásodási (selejtet termelő) állapotot[3],
A_4; javítási állapotot jelent.

A termelés mindaddig történik, amíg a termék selejtes voltát valamilyen módon utólag nem konstatáljuk. Ha pl. a rendszer termelési állapotban történő meghibásodását zavarjelző készülékkel jelezzük, akkor a selejtes termék gyártásidejét jelentősen csökkenthetjük. Tegyük fel, hogy p annak a valószínűsége, hogy a zavarjelzőrendszer a hibát jelezni fogja. Egy-egy zavarjelző alkalmazása bizonyos költségbe kerül. Felmerül mármost az a kérdés, hogyha egy zavarjelző rendszert a selejtes anyag gyártásidejének csökkentésére kívánjuk beépíteni, akkor mennyire kifizetődő ez.

A kérdésre adandó válasz során tételezzük fel, hogy a szóban levő folyamat matematikai modellje az eddig közöltekhez hasonló. Ennek alapján, ha nem alkalmazunk jelző-rendszert, akkor valamely adott T ideig selejtes terméket gyártó összidők várható értéke:

$$M\{\alpha_3(T)\} = \int_0^T P_3(t)\,dt.$$

Jelölje a T idő alatt bekövetkezett A_3 állapotok számát $\bar{\nu}_3(T)$, ezek közül a zavarjelző által regisztráltak számát pedig $\varrho(T)$. A teljes valószínűség tétele szerint

$$P\{\varrho(T) = k\} = \sum_{l=k}^{\infty} P\{\varrho(T) = k \mid \bar{\nu}_3(T) = l\} P\{\bar{\nu}_3(T) = l\} \quad (k = 0,1,2,\dots)$$

[3] Az automatizálási problémáknál az A_3 igen gyakran azt az állapotot jelenti, amelybe a rendszer akkor kerül, amikor valamilyen — a folyamatot jellemző — paraméter a megengedett határon kívüli értéket vesz fel.

Figyelembe véve, hogy

$$P\{\varrho(T) = k \mid \bar{v}_3(T) = l\} = \binom{l}{k} p^k (1-p)^{l-k}$$

kapjuk, hogy

$$P\{\varrho(T) = k\} = \sum_{l=k}^{\infty} \binom{l}{k} p^k (1-p)^{l-k} P\{\bar{v}_3(T) = l\}.$$

A kapott összefüggés alapján a zavarjelző rendszer T ideig A_3 állapotot átlagosan

$$M\{\varrho(T)\} = \sum_{k=0}^{\infty} k P\{\varrho(T) = k\}$$

alkalommal fog észlelni. Ha feltételezzük, hogy a zavarjelző rendszer hibátlan működése esetén selejtes terméket nem állítunk elő, vagy legalább is a selejtet termelő időhossz olyan kicsiny, hogy az gyakorlatilag elhanyagolható, akkor a T ideig selejtes terméket gyártó összidők várható értéke átlagosan

$$M\{\varrho(T)\} \int_0^{\infty} (1 - G^{(3)}(x-0))\, dx$$

értékkel csökken, s itt $G^{(3)}(x-0)$ az A_3 állapotban való tartózkodás eloszlásfüggvénye.

Feltételezhetjük, hogy a selejt által keletkezendő kár értéke a selejtes terméket gyártó idő függvényében C együtthatóval lineárisan változik, s ugyanakkor a zavarjelző rendszer karbantartási költsége a vételár és beszerelési költség együttes értékéhez $K = K(p)$ képest elhanyagolható. Ekkor a zavarjelző rendszer T ideig történő kifizetődését a

$$0 < CM\{\varrho(T)\} \int_0^{\infty} (1 - G^{(3)}(x-0))\, dx - K(p)$$

egyenlőtlenség teljesülése alapján dönthetjük el. Természetesen itt más gazdaságossági szempontok is figyelembe jöhetnek, s ezek a döntés modelljét jelentősen befolyásolhatják.

A vizsgálatok során feltételeztük, hogy zavarjelző rendszer alkalmazása esetén a zavarjelző által nem jelzett A_3 állapotban való tartózkodás eloszlásfüggvénye ugyanaz, mint akkor, amikor nem alkalmaztuk a zavarjelző rendszert. A gyakorlatban elképzelhető, hogy hibajelző készülék alkalmazása mellett a nem jelzett A_3 állapotban való tartózkodás eloszlásfüggvénye $(G^{*3}(x))$ módosul. Ez a tény csak annyiban befolyásolja számításainkat, hogy az $\int_0^{\infty} (1 - G^{(3)}(x-0))dx$ helyett az $\int_0^{\infty} (1 - G^{*3}(x))dx$ értékkel kell számolnunk.

Megemlítjük, hogy ha a kifizetődés eldöntésére kapott egyenlőtlenség jobb oldalát p-re vonatkozóan maximalizáljuk, akkor a hibajelző készülék alkalmazásából származó tiszta haszon a legnagyobb lesz. Ez egyben információt ad a zavarjelző

készülék megbízhatóságának elérendő növelésére is. (A fentiekből látható, hogy nagy megbízhatóságú hibajelző alkalmazása esetenként nem feltétlenül előnyös.)
A zavarjelző készülék alkalmazása mellett felmerülő problémák gyakran igen nehezen kezelhető matematikai modellekhez vezetnek. Ilyenkor azután előfordul, hogy bizonyos meggondolások, a tárgyalást illetően lényeges szempontok — éppen a modell bonyolultsága folytán — figyelmen kívül maradnak.

Ilyen eset fordul elő pl. V. A. ZSOZSIKASVILI és A. L. RAJKIN [12] dolgozatában. A nevezett szerzők adott rendszer megbízhatóságának értékelését — a dolgozat szövegezését és jelöléseit figyelembe véve, illetve megtartva — az alábbi feltételek mellett vizsgálják:

1. A rendszer olyan elemekből áll, amelyek meghibásodása, illetve a hiba kijavításának ideje mindig független a többi elem meghibásodásától, illetve azok kijavítási idejétől.

2. Annak a valószínűsége, hogy az adott rendszer a t időpillanatban működési állapotban van, $Y(t)$-vel egyenlő.

3. Annak a feltételes valószínűsége, hogy a tetszőlegesen rögzített τ időpontban nem működő rendszer a t időpontig működni kezd, $X(t-\tau)$.

4. A rendszer elemei a működési és működésrekész állapotban azonos valószínűséggel hibásodnak meg.

5. A jelzett, illetve nem jelzett meghibásodások kijavítási idejének eloszlásfüggvénye $W_1(t)$, illetve $W_2(t)$.

6. Az ellenőrzött, illetve nem ellenőrzött meghibásodások eloszlásfüggvénye $F_1(t)$, illetve $F_2(t)$.

7. Javítás közben nem történik újabb meghibásodás. (Ez a gyakorlati esetek többségében nem okoz jelentős megszorítást, mivel a javítási idő a működési és működésre kész állapot idejéhez viszonyítva kicsiny.)

8. A hibajelző készülék abszolút megbízható.

Ezen feltételek mellett egy bizonyos elemet folyamatosan ellenőrizve a szerzők a hibajelző készüléknek a rendszer megbízhatóságára vonatkozó előnyeit a következő három esetben vizsgálták:

a) A jelzett hiba kiküszöbölésekor semmilyen módon nem lehet ellenőrizni a rendszer esetleges nem jelzett hibáit. Így ezen utóbbi hiba fennállása mindenképpen a rendszer meghibásodását jelenti.

b) Jelzett hiba esetén a rendszer fennmaradó részének működőképességét a javítás megkezdése előtt lehet ellenőrizni.

c) A jelzett hiba kijavítása után lehet ellenőrizni az esetleges többi hibákat még a rendszer használatba való átmenete előtt.

A szerzők az a), b), c) esetekben a következő formulákat kapták a $P_a(t)$, $P_b(t)$, $P_c(t)$ meghibásodási eloszlásfüggvényekre:

$$P_a(t) = 1-\left\{1-\int_0^t Y(\tau)\,dF_2(\tau)-\int_0^t [1-Y(\tau)]X(t-\tau)\,dF_2(\tau)\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{1-\int_0^t Y(\tau)\,dF_1(\tau)-\int_0^t [1-Y(\tau)][1-W_1(t-\tau)]X(t-\tau)\,dF_1(\tau)\right\},$$

$$P_b(t) = 1-\Big\{1-\int_0^t Y(\tau)\,dF_2(\tau)-\int_0^t [1-Y(\tau)]X(t-\tau)[1-F_1(\tau)]\,dF_2(\tau)-$$

$$-\int_0^t [1-Y(\tau)]\,X(t-\tau)[1-W_1(t-\tau)\,W_2(t-\tau)]F_1(\tau)\,dF_2(\tau)\Big\}\cdot$$

$$\cdot\Big\{1-\int_0^t Y(\tau)\,dF_1(\tau)-\int_0^t [1-Y(\tau)][1-W_1(t-\tau)]X(t-\tau)\,dF_1(\tau)\Big\},$$

$$P_c(t) = 1-\Big\{1-\int_0^t Y(\tau)\,dF_2(\tau)-\int_0^t [1-Y(\tau)]X(t-\tau)[1-F_1(\tau)]\,dF_2(\tau)-$$

$$-\int_0^t [1-Y(\tau)]X(t-\tau)[1-\psi(t-\tau)]F_1(\tau)\,dF_2(\tau)\Big\}\cdot$$

$$\cdot\Big\{1-\int_0^t Y(\tau)\,dF_1(\tau)-\int_0^t [1-Y(\tau)][1-W_1(t-\tau)]X(t-\tau)\,dF_1(\tau)\Big\},$$

ahol

$$\psi(t) = \int_0^t q(u)\,du, \qquad q(t) = \int_0^t w_1(u)\,w_2(t-u)\,du,$$

$$w_1(t) = \frac{dW_1(t)}{dt}, \qquad w_2(t) = \frac{dW_2(t)}{dt}.$$

Az alábbiakban kimutatjuk, hogy a fenti eredmények általában nem helytállóak. Evégből elegendő megmutatni azt, hogyha a hibajelző készülék a rendszer minden hibáját jelzi, vagyis, ha csak jelzett hiba okozhatja a rendszer meghibásodását — ez a gyakorlatban lehetséges —, akkor a feltételben szereplő függvényeket megválaszthatjuk úgy, hogy például

$$\lim_{t\to\infty} P_a(t) \neq 1.$$

Ez többek között elérhető, ha

$$Y(t) = \frac{1}{2}$$

$$W_1(t) = 1-e^{-\mu t}$$

$$X(t) = 1-e^{-\alpha t}$$

$$F_1(t) = 1-e^{-\lambda t} \qquad (\mu\neq\alpha\neq\lambda \quad \text{és} \quad \lambda\neq\mu+\alpha).$$

Ekkor ugyanis

$$P_a(t) = \frac{\lambda}{2}\int_0^t e^{-\lambda\tau}d\tau + \frac{\lambda}{2}\int_0^t e^{-\mu(t-\tau)}(1-e^{-\alpha(t-\tau)})e^{-\lambda\tau}d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda-\mu-\alpha} - \frac{\lambda}{\lambda-\mu} - 1\right)e^{-\lambda t} + \frac{\lambda}{2(\lambda-\mu)}e^{-\mu t} -$$

$$- \frac{\lambda}{2(\lambda-\mu-\alpha)}e^{-(\mu+\alpha)t},$$

így

$$\lim_{t\to\infty} P_a(t) = \frac{1}{2}.$$

Ez a helytelen eredmény többek között azért adódott, mert a szerzők szerint csak az *első* hiba okozhatja a rendszer meghibásodását. Nem folyamatos működés esetén a szerzők elgondolása azért nem helytálló, mert az első jelzett hiba 1-nél kisebb valószínűséggel okozza a rendszer meghibásodását. (Esetünkben ez $\frac{1}{2}$ volt.)

Ahhoz, hogy helyes eredményt kapjunk, meg kellene határozni annak a valószínűségét, hogy a második hiba okozza a rendszer meghibásodását, feltéve, hogy az első hiba nem okozta, majd ezt az értéket hozzá kellene adni annak a valószínűségéhez, hogy az első hiba okozta a meghibásodást stb. Ily módon egy végtelen sort kapunk, aminek a meghatározása a feltevések mellett nem látszik egyszerűnek. A szerzők lényegében ezen sor első tagját határozták meg hibásan. Tudniillik itt sem vettek figyelembe minden lehetőséget. Pl. az a) esetben nem számoltak azzal a lehetőséggel, hogy a $\tau < t$ időpontban bekövetkezett jelzett hiba akkor is okozhatja a rendszer meghibásodását, ha a javítást a t idő előtt elvégzik, de a javítás befejezése előtt használni akarják a rendszert. Ennek figyelembevétele azért jelentős, mert $t-\tau$ tetszés szerinti nagy érték lehet.

Mivel ilyen hiányosságok a b) és c) esetekben még nagyobb mértékben megtalálhatók (itt az eshetőségek száma még nagyobb), ezért természetesen az ezekre kapott $P_b(t)$ és $P_c(t)$ formulák is hibásak.

Mindezek alapján látható, hogy a ZSOZSIKASVILI és RAJKIN által követett tárgyalási móddal történő helyes eredmény meghatározása rendkívül bonyolult és a második, harmadik stb. jelzett és nem jelzett hibák eloszlásfüggvényének megadása nélkül nem is lehetséges.

A teljesség kedvéért megemlítjük, hogy a hivatkozott dolgozat eredményei $Y(t) \equiv 1$ esetén helytállóak, ekkor azonban a hibajelző-készülék alkalmazása nem növeli a rendszer működési megbízhatóságát.

Egy rendszer megbízhatóságának vizsgálata a hibás alkatrészek kicserélése esetén

Dávid K. LLOYD és Myron LIPOW [9] könyvének 9. fejezetét követő 2. függelékben az alábbi probléma matematikai tárgyalása található:

Tekintsünk egy független soros rendszert, melyben n alkatrész van. Tételezzük fel, hogy mindegyik alkatrész élettartamának ugyanazon $G(t)$ az eloszlásfüggvénye.

A rendszer folyamatos működése közben meghibásodó alkatrészeket azonnal kicseréljük új alkatrészekkel, melyek élettartamának ugyancsak $G(t)$ az eloszlásfüggvénye. Ennek következtében, ha a rendszert a $t=0$ időpontban állítottuk üzembe s a működés kezdetén minden alkatrész új volt, akkor az első csere után $n-1$ alkatrész már egyformán öregedett, és így a régi alkatrészek hátralevő élettartama már többnyire rövidebb lesz, mint az újonnan beszerelt alkatrész élettartama. Ha a rendszer hosszabb időn keresztül működik, akkor más alkatrészek is tönkremennek és ezeket is azonnal új alkatrészekkel pótoljuk; ennek folytán a rendszer folyamatosan működik, de valamely időpontban az alkatrészek élettartama különböző.

A rendszer működésének kezdetén — mikoris az alkatrészek valamennyien teljesen újak — a rendszer megbízhatóságát (a „túlélési valószínűséget") az idő függvényében az

$$R(t) = [1-G(t)]^n \tag{1'}$$

összefüggés adja. Ha azonban a vizsgálati idő megkezdésének pillanatában egyes alkatrészek már bizonyos idő óta működtek, akkor az (1') egyenletet módosítanunk kell, mégpedig úgy, hogy figyelembe vesszük az alkatrészeknek a vizsgálati időpont kezdetéig elért életkorát.

Ha a vizsgálat megkezdése a t_0 időpontban történik, s eddig az alkatrészek élettartamai már $x_1, x_2, \ldots, x_n$ értékűek, akkor t_0-tól számított t ideig a rendszer feltételes megbízhatósága:

$$R(t; t_0 | x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1-G(x_i+t)}{1-G(x_i)} \tag{2'}$$

Az x_i értékek valószínűségi változók, melyek a vizsgálat megkezdésének időpontjától (t_0-tól), valamint a $G(t)$ eloszlásfüggvénytől függenek. Ha ismerjük az x_i élettartamok valószínűség sűrűségfüggvényeit, amelyek mondjuk $g(x_i, t_0)$ értékűek, akkor a rendszer feltétel nélküli megbízhatósága:

$$R(t; t_0) = \overbrace{\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty}^{n} R(t; t_0 | x_1, x_2, \ldots, x_n) \prod_{i=1}^{n} g(x_i, t_0)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \tag{3'}$$

$$= \left[\int_0^\infty \frac{1-G(x+t)}{1-G(x)} g(x; t_0)\, dx \right]^n$$

A problémának LLOYD és LIPOW által közölt további matematikai tárgyalása a (3')-ben szereplő $g(x, t_0)$ sűrűségfüggvény meghatározására terjed ki, melynek konkrét alakját az ún. „kicserélési egyenlet" felállításának segítségével határozzák meg. A kicserélési egyenletnek *Laplace*-transzformációval történő vizsgálata a $t \to \infty$ határérték számítás elvégzését teszi lehetővé, minek következtében a

$$\lim_{t_0 \to \infty} g(x, t_0) = \frac{1-G(x)}{\mu} \tag{4'}$$

egyenlethez jutnak, ahol $\mu = \int_0^\infty (1 - G(x))dx$. Ennek ismeretében a (3') alapján a rendszer megbízhatóságára $t_0 \to \infty$ esetén az

$$R(t;\infty) = \left[\int_0^\infty \frac{1-G(x+t)}{\mu} dx\right]^n \tag{5'}$$

összefüggést kapják, melynek azután közelítő formában való megadásával foglalkoznak. A kapott eredmények elérésénél alkalmazott meggondolások matematikai szempontból meglehetősen kifogásolhatók.

E helyen nem szándékozunk kitérni a LLOYD és LIPOW által közölt matematikai meggondolások helytállásának kérdésére, mert ahhoz részletesebben kellene bemutatni vizsgálati módszerüket.

Jelen dolgozatunk ezen részének az a célja, hogy bemutassuk miképpen lehet viszonylag egyszerű meggondolásokkal az itt közölt problémakörnek bizonyos irányú általánosítását — s magát az itt közölt problémát is — a rekurrens folyamatok elméletében megtalálható matematikai eredmények ismeretében tárgyalni, illetve megválaszolni. Vizsgálataink során hivatkozhatnánk az előzőekben tárgyalt anyag itt felhasználható részeire is, ez esetben azonban kézenfekvőbbnek és természetesebbnek látszik PALÁSTI I. RÉNYI A., SZENTMÁRTONI T. és TAKÁCS L. [10] dolgozatában található eredményeket hasznosítani. Ezek az eredmények jelentős mértékben a felújításelméletben nyernek alkalmazást (lásd pl. [11]).

Modell:

Tegyük fel, hogy az n alkatrészből álló független soros rendszert a $t=0$ időpontban állítottuk üzembe. Legyen az i-edik ($i=1, 2, \dots, n$) alkatrésznek a valódi élettartama[4] $G^{(i)}(x)$ eloszlású valószínűségi változó. Tegyük fel továbbá, hogy a későbbiek során üzembe helyezett i-edik típusú alkatrészek valódi élettartamai is egyforma eloszlású valószínűségi változók, ugyanazon $G^{(i)}(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Ha valamelyik alkatrész tönkremegy, akkor abban a pillanatban újjal helyettesíthetjük[5]. Tételezzük fel, hogy a rendszer működtetése nem folyamatosan, hanem szakaszosan történik. Legyenek az egymást követő működési idők és állási idők azonos eloszlású független valószínűségi változók, mégpedig a működési szakaszok eloszlásfüggvénye $L(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $(x \geqq 0)$ és a szüneteké $H(x)$.

Kérdés. Mi lesz a rendszer megbízhatósága az x idő függvényében, ha a vizsgálat megkezdése a t időpontban történik.

Előrebocsátásképpen közöljük, hogy az eloszlásfüggvénynek önmagával való n-szeres konvolucióját továbbra is alsó n indexszel jelöljük. Ennélfogva tehát:

$$H_n(x) = \int_0^x H_{n-1}(x-y)\, dH(y) \tag{1}$$

[4] A tárgyalás során minden egyes alkatrésznél kétféle élettartalomról beszélünk:
1. *üzemi vagy látszólagos élettartam*, melyen a beállítás pillanatától a meghibásodásig (tönkremenésig) eltelt üzemidőt értjük (beleértve a véletlen szüneteket is).
2. *Valódi élettartam* az az idő, amely alatt az alkatrész ténylegesen működik (kihagyva a szüneteket).

[5] Ez a helyzet áll elő pl. az ún. soros tartalékolás elvén működő rendszer esetén.

ahol $H_0(x)=0$, ha $x<0$ és $H_0(x)=1$ ha $x\geqq 0$. Jelöljük a keresett megbízhatóság függvényt $R(x;t)$-vel.

TÉTEL:

$$R(x;t) = \prod_{i=1}^{n}\left[1-\int_{t}^{t+x}[1-F^{(i)}(t+x-y)]\,dm^{(i)}(y)\right] \tag{2}$$

ahol

$$F^{(i)}(u) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{0}^{u}\frac{(\lambda z)^k e^{-\lambda z}}{k!}H_k(u-z)\,dG^{(i)}(z), \tag{3}$$

$$m^{(i)}(y) = \sum_{n=1}^{\infty}F_n^{(i)}(y). \tag{4}$$

Bizonyítás: Először egyetlen alkatrészt, mondjuk az i-ediket vizsgáljuk. Mivel a működési szakaszok exponenciális eloszlásúak, ezért az i-edik típusú alkatrészek látszólagos élettartamai egyforma eloszlású független valószínűségi változók. Ha ezt a közös eloszlásfüggvényt $F^{(i)}(x)$-szel jelöljük, akkor (10)-nek idevágó eredménye alapján

$$F^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{0}^{x}\frac{(\lambda z)^k e^{-\lambda z}}{k!}H_k(x-z)\,dG^{(i)}(z).$$

Jelentse a t időpontnak a közvetlen utána következő alkatrészcsere időpontjától vett távolságát az $\eta_t^{(i)}$ valószínűségi változó. Könnyen belátható, hogy

$$P\{\eta_t^{(i)}\leqq x\} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{t}^{t+x}[1-F^{(i)}(t+x-y)]\,dF_n^{(i)}(y) = \tag{5}$$

$$= \int_{t}^{t+x}[1-F^{(i)}(t+x-y)]\,dm^{(i)}(y),$$

így az i-edik típusú alkatrész t időponttól számított megbízhatóság függvénye

$$R_i(x;t) = 1-P\{\eta_t^{(i)}\leqq x\}. \tag{6}$$

Mivel a vizsgált rendszer független soros rendszer volt, ezért

$$R(x;t) = \prod_{i=1}^{n}R_i(x;t) \tag{7}$$

Q. e. d.

KÖVETKEZMÉNYEK:

Az

$$\int_{0}^{\infty}(1-G^{(i)}(x))\,dx = a_i<\infty \quad \text{és} \quad \int_{0}^{\infty}(1-H(x))\,dx = b<\infty$$

jelölés mellett

$$\int_0^\infty x\, dF^{(i)}(x) = a_i(1+b\lambda) = \mu_i,$$

s így

$$(8) \qquad \lim_{t\to\infty} P\{\eta_t^{(i)} \leqq x\} = \frac{1}{\mu_i}\int_0^x (1-F^{(i)}(u))\, du,$$

$$(9) \qquad \lim_{t\to\infty} R(x;t) = R(x;\infty) = \prod_{i=1}^n \left(1-\frac{1}{\mu_i}\int_0^x (1-F^{(i)}(u))\,du\right).$$

Az (5), illetve (8) alapján történő számolás elvégzése meglehetősen bonyolult. A *Laplace—Stieltjes*-transzformáció bevezetése azonban többnyire egyszerűsíti a számolás elvégzését.

A

$$(10) \qquad \int_0^\infty e^{-sx}\, dH(x) = \chi(s)$$

és

$$(11) \qquad \int_0^\infty e^{-sx}\, dG^{(i)}(x) = \psi_i(s)$$

jelölés mellett

$$(12) \qquad \int_0^\infty e^{-sx}\, dF^{(i)}(x) = \varphi_i(s) = \psi_i(s-\lambda+\lambda\chi(s)),$$

s így az (5), illetve (8) alatti eloszlásfüggvények *Laplace—Stieltjes*-transzformáltja:

$$(13) \qquad \int_0^\infty e^{-sx}\, d_x P\{\eta_t^{(i)} \leqq x\} = [1-\varphi_i(s)]e^{st}\int_0^\infty e^{-su}\, dm^{(i)}(u) = $$

$$= \frac{1}{s}e^{st}\varphi_i(s)$$

és

$$(14) \qquad \int_0^\infty e^{-sx}\, d_x \lim_{t\to\infty} P\{\eta_t^{(i)} \leqq x\} = \frac{1-\varphi_i(s)}{\mu_i s}.$$

Ha most speciálisan $G^{(i)}(x)$-ről és $H(x)$-ről is feltesszük, hogy exponenciális, azaz

$$(15) \qquad G^{(i)}(x) = 1-e^{-\alpha_i x}$$

$$(16) \qquad H(x) = 1-e^{-\beta x} \qquad \Bigg\} \; x \geqq 0,$$

akkor visszatranszformálással kapjuk, hogy (vö. [10])

$$(17) \qquad F^{(i)}(x) = 1+\frac{(\beta+\omega_1)\alpha_i}{(\omega_1-\omega_2)\omega_1}e^{\omega_1 x} - \frac{(\beta+\omega_2)\alpha_i}{(\omega_1-\omega_2)\omega_2}e^{\omega_2 x}$$

ahol

$$\left.\begin{matrix}\omega_1\\ \omega_2\end{matrix}\right\} = \frac{-(\beta+\lambda+\alpha_i)\pm\sqrt{(\beta+\lambda+\alpha_i)^2-4\alpha_i\beta}}{2}. \tag{18}$$

Ennek következtében:

$$R(x;\infty) = \prod_{i=1}^{n}\left[1+\frac{(\beta+\omega_2)\alpha_i^2\beta}{(\omega_1-\omega_2)\omega_2^2(\beta+\lambda)}(1-e^{\omega_2 x})+\right.$$
$$\left.+\frac{(\beta+\omega_1)\alpha_i^2\beta}{(\omega_1-\omega_2)\omega_1^2(\beta+\lambda)}(1-e^{\omega_1 x})\right]. \tag{19}$$

Megjegyzés. Folyamatos működést tételezve fel, a rekurrens folyamatok elméletében található idevágó összefüggések közvetlen alkalmazásával kapjuk, hogy

$$R(x;t) = \prod_{i=1}^{n}\left[1-\int_t^{t+x}\left(1-G^{(i)}(t+x-u)\right)dm^{(i)}(u)\right], \tag{20}$$

ahol

$$m^{(i)}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{n+1}^{(i)}(u),$$

továbbá

$$R(x;\infty) = \prod_{i=1}^{n}\left[1-\frac{1}{a_i}\int_0^x\left(1-G^{(i)}(u)\right)du\right]. \tag{21}$$

IRODALOM

[1] Б. В. Гнеденко: Статистические методы в теории надежности (Всесоюзное общество „знание") 1964.
[2] G. R. Knight, E. F. Jervis, and G. R. Herd: The Definitions of Terms of Interest in the Study of Reliability, *IRE Transactions on Reliability and Quality Control, April,* 1955.
[3] R. E. Barlow and L. C. Hunter: System Efficiency and Reliability, *Technometrics* **2** (1960) 1.
[4] Takács Lajos: Tartózkodási idő problémákról, *M.T.A. III. Osztály Közleményei* **7** (1957) 3—4.
[5] Takács Lajos: Egy új módszer rekurrens sztochasztikus folyamatok tárgyalására, *M.T.A. Alk. Mat. Int. Közleményei,* II. 1953.
[6] Dobó Andor—Szajcz Sándor: Véletlen elhelyezési problémákról, *M.T.A. III. Osztály Közleményei,* **15** (1965) 4.
[7] Rényi Alfréd: *Valószínűségszámítás,* Tankönyvkiadó, Budapest 1954.
[8] Takács Lajos: Részecskeszámolók elméletében fellépő sztochasztikus folyamatokról, *M.T.A. III. Osztály Közleményei* **6** (1956,) 3—4.
[9] Dávid K. Lloyd and Myron Lipow: Reliability: management, methods and mathematics. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1962.
[10] Palásti Ilona, Rényi Alfréd, Szentmártoni Tibor, Takács Lajos: A raktárkészlet pótlásáról, I. *M.T.A. Alk. Mat. Int. Közleményei* II. 1953.
[11] Takács Lajos: On a generalization of the renewal theory, *M.T.A. Mat. Kut. Int. Közleményei* **2** (1957) 1—2.
[12] В. А. Жожикашвили, А. Л. Райкин: Оценка надежности системы при наличии сигнализации повреждений. АВТОМАТИКА и ТЕЛЕМЕХАНИКА XXIII (1962) 3.

(Beérkezett: 1965. XI. 10.)

DISCUSSIONS ON THE FIELD OF THE THEORY OF RELIABILITY

by

A. Dobó—S. Szajcz

Summary

The authors describe in the 1 §. of this paper their worked out considerations and assumed a point of view in connection with the definition of function of the reliability. In the 2 §. they make general a certain results of Lajos Takács. A kind of recurrent process is examined by them in which n-different state of affairs changes in determined order. (L. Takács has examined in the case of $n=2$). At the end of this §. just as in the 3 §. their results are applyed to the practical problems being in the theory of reliability, furthermore they occupy with the criticism of such a kind of works which have been written by the other authors.