

VIZSGÁLATOK A LINEÁRISAN KOMPAKT GYŰRŰK ELMÉLETÉBEN, I.

Írta: WIEGANDT RICHÁRD

Tartalom*

1. §. Bevezetés

I. Algebrai és topológiai előkészületek

2. §. Algebrai előkészületek
3. §. Topológiai előkészületek
4. §. Lineárisan kompakt modulusok topológiai tulajdonságai

II. Lineárisan kompakt radikálmentes gyűrűkről

5. §. Féligegyszerű lineárisan kompakt gyűrűk jellemzései I.
6. §. Féligegyszerű lineárisan kompakt gyűrűk jellemzései II.
7. §. *Neumann*-reguláris lineárisan kompakt gyűrűk
8. §. Lokálisan lineárisan kompakt gyűrűkről

III. Lineárisan kompakt radikálgűrűkről

9. §. Az ideálok minimumfeltételét kielégítő nilpotens gyűrűk
10. §. t -nilpotens K -kompakt gyűrűk
11. §. t -nilpotens L -kompakt gyűrűk

1. §. Bevezetés

Ez a dolgozat algebrai, pontosabban gyűrűelméleti tárgyú. Feltételezzük azonban, hogy a vizsgált gyűrűk egyúttal bizonyos tulajdonságokkal rendelkező topológikus terek. Ezt azért tettük, hogy topológikus módszerek segítségével lehetővé váljék a gyűrűknek olyan struktúrális vizsgálata és leírása, amely tisztán algebrai úton nem lenne elérhető. A felhasználásra kerülő topológikus módszereket részletesen ismertetni fogjuk.

A dolgozat a szerzőnek [31], [32], [33] és [34] idegennyelvű dolgozatai alapján készült és tartalmazza azok eredményeit.

A topológikus gyűrűket először az 1930-as évek elején D. VAN DANTZIG vizsgálta. Bár az azóta eltelt három évtizedben nagyszámú dolgozat jelent meg, amelyben bizonyos topológikus gyűrűket vizsgálnak (pl. normált gyűrűket), viszonylag kevés azoknak a dolgozatoknak a száma, amelyeknek célja a gyűrűk általános struktúrális vizsgálata topológiai eszközök segítségével. Ilyen irányú vizsgálatok terén elsőnek I. KAPLANSKY nevét kell megemlíteni. [10] dolgozatának első részében főleg a kompakt gyűrűket** vizsgálja és bebizonyítja az első *Wedderburn—Artin* struktúratételnek egy analogonját: kompakt féligegyszerű gyűrű algebrailag és topológiailag izomorf véges egyszerű gyűrűk (azaz véges testek feletti teljes mátrixgyűrűk komplett direkt összegével. Behatóan vizsgálta KAPLANSKY a lokálisan kompakt gyűrűk elméletét is ([11], [12], [13]). A lokálisan kompakt egyszerű egysegelemes gyűrűket tárgyalja SZKORNYAKOV [23] egy nemrég megjelent dolgozatá-

* A dolgozat itt közölt I. része csupán az első négy paragrafust tartalmazza.

** Az itt szereplő fogalmak definícióit az I. részben ismertetjük.

ban, amelyből kitűnik, hogy ezek a gyűrűk nem mindig ferdetest feletti mátrix-gyűrűk. Szerencsés fogalomnak bizonyult a lineáris kompaktság fogalma; ezt a fogalmat vektorterekre LEFSCHETZ [17] definiálta, gyűrűk és modulusok elméletében ZELINSKY [36] használta először. A lineárisan kompakt gyűrűk az *Artin*-gyűrűk általánosításai, ugyanis minden *Artin*-gyűrű a diszkrét topológiában lineárisan kompakt. ZELINSKY-nek sikerült az első *Wedderburn*—*Artin* struktúratételnek és KAPLANSKY fent említett tételének közös általánosítását is adnia. Nagy lépéssel vitte előre a lineárisan kompakt modulusok és gyűrűk elméletét LEPTIN [18], [19]. LEPTIN bizonyos vonatkozásban a legnagyobb mértékű általánosítását adta az első *Wedderburn*—*Artin* struktúratételnek. Ez utóbbi tétel szerint a féligegyszerű *Artin*-gyűrűk véges dimenziós vektorterek teljes endomorfizmusgyűrűinek véges direkt összegei. LEPTIN bebizonyította, hogy mindkét végességi feltételt elhagyva, éppen a lineárisan kompakt féligegyszerű gyűrűk jellemzése áll elő. LEPTIN vizsgálta a lineárisan kompakt gyűrűk *Jacobson*-radikálját is.

A topológikus gyűrűk irodalmának feldolgozása SZÁSZ FERENC [26], [27] referáló dolgozataiban található.

Ebben a munkában célunk a lineárisan kompakt gyűrűk további vizsgálata. Minthogy a lineárisan kompakt gyűrűk *Jacobson*-radikálja mindig zárt ideál, azért egy ilyen gyűrűnek a radikálja szerinti faktorgyűrűje radikálmentes és lineárisan kompakt. Ilyen módon bármely lineárisan kompakt gyűrű egy lineárisan kompakt radikálgyűrűnek egy radikálmentes lineárisan kompakt gyűrűvel való *Schreier*-bővítése. Mi a két határesettel fogunk foglalkozni; a II. részben LEPTIN eredményeihez kapcsolódva a radikálmentes lineárisan kompakt gyűrűket vizsgáljuk, a III. részben pedig a lineárisan kompakt radikálgyűrűk leírásával foglalkozunk.

Szeretnénk hangsúlyozni, hogy az itt bemutatásra kerülő eredmények természetesen nem zárják le a lineárisan kompakt gyűrűk elméletét. Szinte valamennyi §-ban természetesen merülnek fel további kérdések, amelyek elég érdekesnek és fontosnak tűnnek ahhoz, hogy további vizsgálatok tárgyát képezzék.

A könnyebb érthetőség kedvéért ismertetünk olyan ismert tételeket is, amelyeket munkánkban felhasználunk. Más szerzők eredményeivel kapcsolatban azt az elvet követjük, hogy csak utalunk rájuk, amennyiben azok könyvekben (pl. [1], [2], [4], [8], [9], [17], [20], [21], [28], [30]) megtalálhatók, viszont részletesen ismertetjük a bizonyításokat is abban az esetben, amikor ezek csak dolgozatokban szerepelnek. A bizonyítások végét a HALMOS által bevezetett és azóta egyre gyakrabban használt $\square$ jellel jelöljük. A szerző [31], [32], [33] és [34] dolgozataiban szereplő eredményekre a továbbiakban nem fogunk utalni.

A dolgozat I. részét az előkészületeknek szenteljük. Az eredmények könnyebb megértése végett részletes előkészületeket végzünk, különösen vonatkozik ez a topológiai előkészületekre, tekintettel arra, hogy eredményeink algebrai jellegűek. A 2. §-ban ismertetjük a felhasználásra kerülő algebrai fogalmakat és eredményeket. Vizsgálataink során mélyebb topológiai eredményekre nem lesz szükségünk, az általunk felhasznált topológiai eljárásokat a 3. és 4. §-ban részletesen tárgyaljuk. A 3. §-ban ismertetjük a topológikus tér és topológikus struktúra fogalmát a WITT által javasolt speciális filter-fogalom segítségével. Itt tárgyaljuk a struktúrák inverz-limeszére vonatkozó tételeket is. Az inverz-limesz képzésének nagy szerep jut a későbbi bizonyításokban. Ugyancsak ebben a §-ban közöljük JACOBSON sűrűségi-tételének topológiai megfogalmazását és a primitív gyűrűkre vonatkozó struktúratételét. Ezek közül a tételek közül az előbbit bizonyítás közben az 5. §-ban felhasználjuk.

náljuk, az utóbbira pedig utalás történik a 8. §-ban. Ugyancsak a 3. §-ban ismer-tetjük a tranzsfinit nilpotenciának LEPTINTől származó definícióját. Vizsgálatainkban a lineárisan kompakt gyűrűkön kívül fellépnek olyan gyűrűk is, amelyek hasonló gyűrűtopológiával rendelkeznek, és amelyekre analóg topológiai tételek érvényesek. Célszerűnek látszott tehát e két gyűrűosztály párhuzamos topológiai vizsgálata. Ezt úgy értük el, hogy általánosítottuk a lineárisan kompaktság fogalmát rögtön kétoldali modulusok esetére. A 4. §-ban ezzel az általánosított lineáris kompaktsági fogalommal foglalkozunk, és megvizsgáljuk topológiai tulajdonságait. A nyert eredmények ZELINSKY [35], [36] és LEPTIN [18] eredményeinek az általánosítása, a bizonyítások is hasonlóan történnek. Mint már említettük, ennek az általáno-sított lineáris kompaktsági fogalomnak csupán két speciális esetére lesz szükségünk, mégis az itt ismertetett tételek kiindulópontul szolgálhatnak más értelemben vett lineárisan kompakt gyűrűk vizsgálatához. (Gondolunk pl. olyan gyűrűkre, amelyek-nek van kváziideálokból álló bázisfilterük és amelyekben minden zárt kváziideálok-szerinti mellékosztályokból álló filternek van érintkezési pontja.)

A II. részben a radikálmentes lineárisan kompakt és lokálisan lineárisan kompakt gyűrűk jellemzésével foglalkozunk. Mint már említettük, a radikálmentes lineárisan kompakt gyűrűk teljes leírását LEPTIN adta azzal a tétellel, amely az első *Wedderburn—Artin* struktúratételnek nagyfokú általánosítása. LEPTIN eredményeit a teljesség kedvéért bizonyítással együtt közöljük az 5. § első részében, a második részében ezeknek a gyűrűknek további moduluselméleti jellemzéseit adjuk, köztük három homológikus jellemzést. A 6. §-ban a radikálmentes lineárisan kompakt gyűrűknek gyűrűelméleti jellemzéseit adjuk, ezek az előző § eredményeiből köny-nyen nyerhetők. A 7. §-ban látni fogjuk, hogy a féligegyszerű lineárisan kompakt gyűrűk osztálya egybeesik a *Neumann*-reguláris lineárisan kompakt gyűrűk osz-tályával. A féligegyszerű lokálisan lineárisan kompakt gyűrűkkel foglalkozunk a 8. §-ban. Noha a lokális lineáris kompaktság fogalma már LEPSCHETZ [17] könyvében is megtalálható, ilyen gyűrűkkel vagy modulusokkal foglalkozó ered-ményekről a szerzőnek nincs tudomása. A lokálisan lineárisan kompakt gyűrűk vizsgálatát érdekessé teszi az a körülmény, hogy a hozzá topológiai szempontból közelálló lokálisan kompakt gyűrűk vizsgálatában nehézségek lépnek fel. I. KAPLAN-sky vizsgálataihoz kapcsolódva SZKORNYAKOV [23] foglalkozott az egyszerű lokálisan kompakt egységelemes gyűrűkkel. Meglepő eredménye, hogy létezik nem diszkrét lokálisan kompakt egyszerű egységelemes gyűrű, amely nem ferdetest feletti teljes mátrixgyűrű. Eredményeink viszont azt mutatják, hogy a lokálisan lineárisan kompakt gyűrűk könnyebben leírhatók. A 8. § fő eredménye az, hogy minden féligegyszerű lokálisan lineárisan kompakt gyűrűnek van minimális balideálja. Így korolláriumként kapjuk, hogy a primitív lokálisan lineárisan kompakt gyűrűket JACOBSON struktúratétele írja le, az egyszerű lokálisan lineárisan kompakt gyűrűket pedig a *Litoff*-tétel. Látni fogjuk továbbá, hogy egy topológikusan egyszerű lokálisan lineárisan kompakt gyűrű lineárisan kompakt is, amennyiben a topológiája a leg-durvább, vagy pedig van jobbségeleme.

A III. részben a lineárisan kompakt radikálgyűrűkkel foglalkozunk. A radikál-gyűrűk helyett t -nilpotens gyűrűket vizsgálunk, ez a két fogalom L -kompakt gyűrűk esetében, mint azt látni fogjuk, egybeesik. A lineárisan kompakt gyűrűkre bebizonyítjuk, hogy egy t -nilpotens gyűrű mindig radikálgyűrű, de a fordított állítás hamis; továbbá t -nilpotens lineárisan kompakt gyűrű a legdurvább topoló-giában L -kompakt is.

A t -nilpotens L -kompakt gyűrűk jellemzését úgy nyerjük, hogy felhasználjuk SZELE Tibornak nilpotens Artin-gyűrűkre vonatkozó tételét, és alkalmazzuk az inverz-limesz képzés ZELINSKY által kidolgozott módszerét. SZELE [29] a nilpotens Artin-gyűrűket nilpotens véges gyűrűkkel jellemezte, mi ezt a jellemzést számunkra megfelelően módosítjuk a 9. §-ban. A 9. § eredményéből inverz-limesz képzéssel leírjuk a 10. §-ban a t -nilpotens K -kompakt gyűrűket. A t -nilpotens L -kompakt gyűrűk jellemzése a 11. §-ban nilpotens véges gyűrűk inverz-limesze és egy olyan nilpotens zárt ideál segítségével történik, amelynek a köbe zérus.

Ezen a helyen szeretnék köszönetet mondani FUCHS LÁSZLÓ professzornak értékes észrevételeiért és tanácsaiért, amelyek munkámban nagy segítséget jelentettek.

I. Algebrai és topológiai előkészületek

2. §. Algebrai előkészületek

A halmazelméleti fogalmak közül használni fogjuk a tartalmazás, metszés, egyesítés fogalmait és az ezekre vonatkozó egyszerű összefüggéseket, a 10. §-ban végtelen halmazok számosságaira vonatkozó elemi tulajdonságokat is felhasználunk. Ezeket ismerteknek tételezzük fel és a továbbiakban nem részletezzük. Szükségünk lesz a Kuratowski—Zorn lemma következő alakjára:

Ha egy H halmaz bizonyos részhalmazainak a $\mathcal{H}$ halmaza olyan tulajdonságú, hogy minden $K_1 \subseteq \dots \subseteq K_\alpha \subseteq \dots (K_1, \dots, K_\alpha \in \mathcal{H})$ lánc esetén $K = \bigcup_{\alpha} K_\alpha$ is eleme $\mathcal{H}$ -nak, akkor $\mathcal{H}$ tartalmaz maximális elemet, azaz olyan részhalmazt, amely nem valódi része egyetlen $\mathcal{H}$ -beli részhalmaznak sem.

Mint ismeretes, a Kuratowski—Zorn lemma ekvivalens a kiválasztási axiómával; a kiválasztási axiómával ekvivalens állítások közül ez használható legkényelmesebben az absztrakt algebrai meggondolásoknál.

Az absztrakt algebra alapvető fogalmait és tételeit ismerteknek tételezzük fel, erre vonatkozóan a [21] és [30] tankönyvekre utalunk.

A dolgozatban előforduló struktúrák Abel-csoportok, gyűrűk, egy- és kétoldali modulusok. Ezeket latin nagybetűkkel jelöljük, elemeiket pedig általában latin kisbetűkkel. Azonos típusú struktúrákat, vagy pedig egy adott struktúra elemeit gyakran fogjuk indexekkel ellátni, végtelen indexhalmaz esetén görög kisbetűket használunk indexek gyanánt. Gyűrűn a továbbiakban mindig *asszociatív gyűrűt* értünk.

Egy S struktúra esetén $\{A, B\}$ -vel jelöljük az A és B részhalmazok által generált részstruktúrát. A $\{ \}$ jelet halmazok jelölésére is használjuk, ebből félreértés azonban nem fog származni, mert az így jelölt halmazok általában részstruktúrának fognak bizonyulni, más esetekben pedig külön felhívjuk a figyelmet arra, hogy struktúrát, vagy halmazt jelölünk a szóbanforgó jellel. Azonos típusú A, B struktúrák esetén $A + B$ -vel jelöljük ezeknek algebrai értelemben vett direkt összegét; megkülönböztetésként $A \oplus B$ -vel az jelöljük algebrai és topológiai értelemben vett direkt összeget (lásd 3. §). $\sum_{\alpha} A_{\alpha}$ -val jelöljük az azonos típusú $A_1, \dots, A_{\alpha}, \dots$ struktúrák komplett direkt összegét; amikor diszkrét direkt összegekről beszélünk, akkor ezt másként jelöljük, és mindig hangsúlyozzuk.

Egy R gyűrű feletti M moduluson mindig balmodulust értünk, azaz R elemeit M baloperátorainak tekintjük. Ha M egy R -modulus és L R -nek balideálja, akkor LM -en értjük az összes $\sum l_i m_i$ ($l_i \in L$, $m_i \in M$) alakú véges összeg halmazát, amely nyilvánvalóan M -nek részmodulusa. rM -mel ($r \in R$) fogjuk jelölni az összes rm ($m \in M$) alakú elem halmazát. Mindezeket a jelöléseket gyűrűk esetében is használni fogjuk, minthogy minden R gyűrűt tekinthetünk R -modulusnak (pontosabban szólva R additív csoportját R -modulusnak).

Gyűrűk esetében a gyűrűelméleti direkt összegeken kívül — amikor is a gyűrű bizonyos ideáljainak a direkt összege — fellép a moduluselméleti direkt összeg fogalma is. Ez utóbbi azt jelenti, hogy a gyűrű, mint önmaga feletti balmodulus, bizonyos balideáljainak a direkt összege. A „gyűrűelméleti” illetve „moduluselméleti” jelzőket azonban el fogjuk hagyni, mert a direkt komponensek ideál illetve balideál voltából nyilvánvaló lesz, hogy melyikről is van szó.

Az $R_1, \dots, R_\alpha, \dots$ gyűrűk szubdirekt összegén értjük a $\sum R_\alpha$ gyűrűnek minden olyan R részgyűrűjét, amelyre fennáll az, hogy mindegyik a_α ($\alpha \in R_\alpha$) legalább egy R -beli elem R_α -beli komponense.

2.1. állítás. Jelölje $I_1, \dots, I_\alpha, \dots$ az R gyűrű ideáljainak egy rendszerét. Az R gyűrű akkor és csak akkor izomorf az $R/I_1, \dots, R/I_\alpha, \dots$ gyűrűknek valamely szubdirekt összegével, ha $\bigcap_\alpha I_\alpha = 0$.

Ez az állítás speciális esete egy jólismert tételnek (BIRKHOFF [1] VI. Theorem 9, vagy SZÁSZ G. [28] 55. §. 72. tétel). BIRKHOFF [1] VI. Theorem 4-nek gyűrűelméleti speciális esete a

2.2. állítás. Ha $I_1, \dots, I_r$ az R gyűrűnek véges sok olyan ideálja, amelyre teljesül $\bigcap_{i=1}^r I_i = 0$ és $\left\{ \bigcap_{j=1}^i I_j, I_i \right\} = R$ ($i = 2, \dots, r$), akkor R izomorf az $R/I_1 + \dots + R/I_r$ direkt összeggel.

Az $r \in R$ elemet az R gyűrű balannihilátorának nevezzük, ha $rR = 0$. Amennyiben $rR = Rr = 0$, úgy azt mondjuk, hogy r R -nek annihilátora. Könnyű látni, hogy egy gyűrű összes balannihilátora illetve annihilátora ideált alkot, ezt balannihilátorideálnak illetve annihilátorideálnak nevezzük. Az $r \in R$ elem az M R -modulus annihilátora, ha $rM = 0$. M annihilátorai R -ben ideált alkotnak, amelyet M annihilátorideáljának nevezünk. Azt mondjuk, hogy M hű R -modulus, ha M annihilátorideálja 0.

Egy $M \neq 0$ R -modulust irreducibilisnek nevezünk, ha M -nek csak triviális részmodulusai vannak, azaz M és $\{0\}$. Tekintsük például egy K test additív csoportját és képezzük ennek véges vagy végtelen sok példányban vett komplett direkt összegét. Jelöljük ezt M -mel. M tekinthető egy K feletti vektortérnek. Jelölje R M összes lineáris transzformációjának (más szóval endomorfizmusának) a gyűrűjét. Világos, hogy M irreducibilis R -modulus.

2.3. definíció. ([8] I. § 2.) Tekintsünk egy R gyűrűt, és jelölje $\mathfrak{M}$ az összes irreducibilis R -modulus osztályát. Az R gyűrű JACOBSON-radikálján (röviden radikálján) értjük az összes $M \in \mathfrak{M}$ modulus annihilátorideáljának a metszetét, azaz a

$$J = \{r \in R \mid rM = 0, M \in \mathfrak{M}\}$$

ideált, illetve magát R -et, amennyiben $\mathfrak{M}$ az üres halmaz.

Ismeretes a radikálnak több jellemzése. Ezek közül egyet mi is gyakran fogunk használni. Az R gyűrűben bevezethetünk egy műveletet, amit „ $\circ$ ”-rel jelölünk, a következőképpen: $x, y \in R$ elemekre legyen

$$x \circ y = x + y + xy.$$

Az $y \in R$ elemet bal-kváziregulárisnak nevezzük, ha létezik olyan $x \in R$ elem, amelyre $x \circ y = 0$; ebben az esetben x -et y bal-kváziinverzének nevezzük. Azt mondjuk, hogy az $L \subseteq R$ balideál kvázireguláris, ha minden elemének van bal-kváziinverze.

Megjegyezzük, hogy eredetileg JACOBSON [7] így definiálta a „ $\circ$ ” műveletet s a kvázireguláris balideált. Később gyakoribbá vált a „ $\circ$ ” műveletnek $x \circ y = x + y - xy$ egyenlettel való definiálása és mint azt könnyű kimutatni, ez esetben ugyanahhoz a kvázireguláris balideál fogalomhoz jutunk. Számunkra valamivel kényelmesebb a „ $\circ$ ” művelet fenti definíciója, ezért ezt használjuk.

2, 4. tétel. *Az R gyűrű radikálja olyan kvázireguláris ideál, amely R összes kvázireguláris balideálját tartalmazza.*

Arra vonatkozóan, hogy a radikál 2, 3. definíciója mellett a 2, 4. tétel érvényes, JACOBSON [8] könyvére hivatkozunk.

A 2, 4. tétel értelmében egy gyűrű radikálja a következőképpen értelmezhető:

2, 5. definíció. *Egy R gyűrű radikálján értjük R összes kvázireguláris balideáljának a halmazelméleti egyesítését.*

Fontos tény, hogy ha az előzőkhöz hasonlóan értelmezzük a jobb-kvázireguláritás és jobb-kváziinverz fogalmát, akkor a kvázireguláris jobbideálok egyesítése is a radikált határozza meg.

Megjegyezzük még, hogy ha egy $a \in R$ elem egyszerre bal- és jobb-kvázireguláris, akkor a bal- és jobb-kváziinverz megegyezik és egyértelműen meghatározott. Ezt az elemet *a kváziinverzének* nevezzük.

Jól ismert tény, hogy egy R gyűrűnek J radikálja szerinti R/J faktorgyűrűjének radikálja 0; J radikálja pedig önmaga.

2, 6. definíció. Egy R gyűrűt *féligegyszerűnek* nevezünk, ha radikálmentes, azaz R radikálja 0. Ha egy gyűrű radikálja maga az egész gyűrű, akkor *radikálgyűrűről* beszélünk.

2, 7. definíció. Egy R gyűrűt *egyszerűnek* nevezünk, ha csak triviális ideáljai vannak és nem radikálgyűrű.

Hangsúlyozzuk, hogy az egyszerűségnek ez a definíciója eltér a szokásostól, annál szűkebb fogalmat jelöl. Vizsgálataink szempontjából azonban ez lesz a célszerű; ezt a szóhasználatot indokolja az a tény is, hogy a 2, 7 definíciót használva *minden egyszerű gyűrű egyúttal féligegyszerű is.*

Primitív gyűrűn olyan R gyűrűt értünk, amelyhez létezik hű irreducibilis R -modulus.

Legyen R egyszerű gyűrű. Most a 2, 3. definíció szerint van olyan M irreducibilis R -modulus, amelyre $RM \neq 0$. M annihilátorideálja R egyszerűsége miatt 0, vagyis M hű irreducibilis R -modulus. Következésképpen *minden egyszerű gyűrű primitív gyűrű is.* Ennél az állításnál szintén lényeges, hogy az egyszerűséget a 2, 7. definícióval adtuk meg.

A radikál 2, 3. definíciója alapján világos, hogy minden primitív gyűrű félig-egyszerű.

Egy G csoportra azt mondjuk, hogy teljesíti a részcsoporthok minimumfeltételét, ha G -ben a részcsoporthoknak bármely $G_1 \supset G_2 \supset \dots$ szigorúan fogyó láncza véges lépésben megszakad. Hasonlóan beszélhetünk arról, hogy egy R -modulusban teljesül a részmodulusok minimumfeltétele, vagy pedig arról, hogy egy R gyűrűben teljesül az ideálok vagy a balideálok minimumfeltétele. Egy gyűrűt, amelyben teljesül a balideálok minimumfeltétele, *Artin-gyűrűnek* nevezünk.

A 9. és 10. §-ban szükségünk lesz a következő állításokra.

2, 8. segédétel. Ha I az R gyűrű ideálja, és mind I -ben, mind R/I -ben teljesül az ideálok minimumfeltétele, akkor R -ben is teljesül.

Bizonyítás.* Tekintsük R -ben ideáloknak egy szigorúan fogyó

$$(1) \quad R \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots$$

láncát. Kimutatjuk, hogy $K_i \cap I = K_{i+j} \cap I$ csak véges sok j indexre állhat fenn. Ellenkező esetben ugyanis lenne olyan i , hogy a

$$K_{i+j}/I \cap K_{i+j} = K_{i+j}/I \cap K_i \quad (j = i_1, i_2, \dots)$$

faktorgyűrűk $R/I \cap K_i$ -nek egy végtelen szigorúan fogyó

$$R/I \cap K_i \supset K_{i+i_1}/I \cap K_i \supset K_{i+i_2}/I \cap K_i \supset \dots$$

ideálokból álló láncát alkotná. Minthogy pedig érvényes

$$K_{i+j}/I \cap K_i \cong \{K_{i+j}, I\}/I \quad (j = i_1, i_2, \dots),$$

és mindkét oldal R megfelelő faktorgyűrűjében ideál, azért most

$$R/I \supset \{K_{i+i_1}, I\}/I \supset \{K_{i+i_2}, I\}/I \supset \dots$$

végtelen ideálláncot alkotna R/I -ben, ami a feltétel szerint lehetetlen. Másrészt I -ben a $K_i \cap I$ ($i = 1, 2, \dots$) ideálok fogyó láncot alkotnak és a feltétel szerint csak véges sok esetben fordulhat elő valódi tartalmazás. Következésképpen az (1) láncnak is csak véges sok tagja lehet. $\square$

2, 9. segédétel. Legyen H a G Abel-csoportnak részcsoporthja. Ha H -ban és G/H -ban teljesül a részcsoporthok minimumfeltétele, akkor G -ben is teljesül.

A 2, 9. segédétel tulajdonképpen a 2, 8. segédételnek speciális esete, mégpedig az az eset, amikor a szóban forgó gyűrű zérógyűrű.

Legyen N olyan modulus, amelynek baloldali operátortartománya R , jobb-oldali operátortartománya pedig S . N talpán értjük az N összes minimális (R, S) -részmodulusa által generált kétoldali modulust, amennyiben N -ben létezik minimális részmodulus és a 0 modulust egyébként. Hasonlóan értelmezhetjük egy M R -balmodulus talpát is. Egy R gyűrű baltalpán R összes minimális balideálja által generált balideált, illetve 0-t értjük, amennyiben R -nek nincs minimális balideálja. Ismeretes, hogy egy gyűrű baltalpa mindig ideál.

* Ez a bizonyítás könyvekben megtalálható.

Neumann-regulárisnak nevezünk egy R gyűrűt, ha minden $a \in R$ eleméhez létezik olyan $x \in R$ elem, amelyre teljesül $axa = a$.

Egy A Abel-csoportot *oszthatónak* nevezünk, ha minden n természetes számhoz és $a \in A$ elemhez az $nx = a$ egyenlet A -ban megoldható. Egy Abel-csoportban az összes osztható részcsoport által generált részcsoport ismét osztható, ez a csoport maximális osztható részcsoportja.

2, 10. állítás. ([4] § 66. F). Egy gyűrű additív csoportjának maximális osztható részcsoportja R -nek ideálja.

Ennek az állításnak az alapján beszélhetünk egy gyűrű *maximális osztható ideáljáról*, ezen az additív csoport maximális osztható részcsoportja által alkotott ideált értjük.

RÉDEIT [21] követve az A struktúrának B -vel való Schreier-bővítésén értünk minden olyan S struktúrát, amelynek A szerint vett faktorstruktúrája B -vel izomorf.

A 9. és 10. §-ban gyűrűk Schreier-bővítéseinek ismeretére lesz szükségünk. [21] 54. § alapján egy A gyűrűnek a B gyűrűvel történő bármely R Schreier-bővítése előáll a következő módon. R elemei legyenek az (a, α) ($a \in B, \alpha \in A$) alakú elem párok az

$$(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, [a, b] + \alpha + \beta),$$

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \langle a, b \rangle + \alpha b + a\beta + \alpha\beta) \quad (a, b \in B; \alpha, \beta \in A)$$

műveleti szabályokkal, ahol $[a, b]$, $\langle a, b \rangle$, αb , $a\beta$ kétváltozós függvényeket jelölnek A -beli értékekkel, s ezek a függvények kielégítenek bizonyos függvényegyenleteket. Vizsgálataink folyamán olyan gyűrűbővítések lépnek fel, amelyeknél A zérógyűrű, és elemei R -ben annihilátorok; továbbá A additív csoportja R additív csoportjában direkt összeadandó, ez esetben az R -beli műveleteket egyszerűbben definiálhatjuk, mégpedig az

$$(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta),$$

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \langle a, b \rangle) \quad (a, b \in B; \alpha, \beta \in A)$$

szabályokkal, ahol az $\langle a, b \rangle$ függvény, amelyet multiplikatív faktorrendszernek nevezünk, kielégíti az

$$\langle a, 0 \rangle = \langle 0, a \rangle = 0,$$

$$\langle ab, c \rangle = \langle a, bc \rangle,$$

$$\langle a + b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle,$$

$$\langle a, b + c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle \quad (a, b, c \in B)$$

feltételeket.

Végül ismertetünk néhány homológikus algebrai fogalmat. Tekintsünk egy R gyűrűt. Jelöljük $\mathcal{C}$ -vel azt a kategóriát, amelynek objektumai az R -modulusok és amelyben a leképezések az R -modulusok homomorfizmusai. Ha M és N két R -modulus, és φ M -nek N -be való homomorf leképezése, akkor $\text{Im } \varphi$ jelenti mindazoknak az $n \in N$ elemeknek a halmazát, amelyek valamilyen $m \in M$ elemnek a képei; $\text{Ker } \varphi$ jelenti mindazoknak az $m \in M$ elemeknek a halmazát, amelyekre $\varphi(m) = 0$. Azt a tényt, hogy φ M -nek N -be való homomorfizmusa, így jelöljük:

$$M \xrightarrow{\varphi} N$$

Exaktnak nevezünk egy

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

sorozatot, amennyiben $\text{Im } \alpha = \text{Ker } \beta$. A

$$O \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$$

sorozat exaktsága azt jelenti, hogy α A -t B -be beágyazza, és az

$$A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow O$$

sorozat exaktsága pedig azt, hogy α A -t homomorf módon B -re képezi.

Azt mondjuk, hogy a

$$(2) \quad O \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow O$$

exakt sorozat *széteső*, ha $\text{Im } \alpha = \text{Ker } \beta$ B -nek direkt összeadandója. A (2) sorozat exaktsága a *Schreier*-bővítések terminológiájában éppen azt jelenti, hogy B A -nak C -vel való *Schreier*-bővítése. Az, hogy a (2) exakt sorozat széteső, azt jelenti, hogy a szóban forgó *Schreier*-bővítés direkt.

Azt mondjuk, hogy az

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ & \searrow \gamma & \downarrow \beta \\ & & C \end{array}$$

diagramm *kommutatív*, ha $\beta\alpha = \gamma$.

Egy M R -modulust *projektívnek* nevezünk, ha bármely

$$\begin{array}{c} M \\ \downarrow \\ A \rightarrow B \rightarrow O \end{array}$$

diagramm, amelyben az $A \rightarrow B \rightarrow O$ sorozat exakt, kiegészíthető egy

$$\begin{array}{c} M \\ \swarrow \downarrow \\ A \rightarrow B \rightarrow O \end{array}$$

kommutatív diagrammá (A, B $\mathcal{C}$ -beli objektumok). A projektív R -modulusnak a duálisa az injektív R -modulus. Egy M R -modulust *injektívnek* nevezünk, ha bármely

$$\begin{array}{c} O \rightarrow A \rightarrow B \\ \downarrow \\ M \end{array}$$

diagramm, amelyben a $O \rightarrow A \rightarrow B$ sorozat exakt, kiegészíthető egy

$$\begin{array}{c} O \rightarrow A \rightarrow B \\ \downarrow \swarrow \\ M \end{array}$$

kommutatív diagrammá (A, B $\mathcal{C}$ -beli objektumok).

3. §. Topológiai előkészületek

Ebben a §-ban részletesen ismertetjük az általunk használt topológiai fogalmakat és állításokat. Mivel ezek a fogalmak és állítások jól ismertek, azért azokat példákkal nem illusztráljuk, a bizonyításokra vonatkozóan pedig a [2], [20] és [30] könyvekre utalunk.

Egy $H = \{a, b, \dots\}$ halmazt, amelyet a $\leq$ relációval részben rendeztünk, *irányított*nak nevezzük, ha bármely $a, b \in H$ elemhez létezik olyan $c \in H$ elem, amelyre teljesül $a \leq c$ és $b \leq c$.

Tekintsünk ezután egy T halmazt és jelöljük T -vel T részhalmazainak egy halmazát, amelyet a részhalmazok $\subseteq$ tartalmazási relációjával részben rendezünk. Jelöljük egy pillanatra azt a ténnyt, hogy $A \subseteq B$, $A \cong B$ -vel. Most T irányított volta azt jelenti, hogy bármely $A, B \in T$ részhalmazhoz van olyan $C \in T$ részhalmaz, amelyet mind A , mind B tartalmaz.

3.1. definíció. T részhalmazainak egy F halmazát *filternek** nevezzük, ha F a részhalmazok tartalmazási relációjára nézve irányított, és F nem tartalmazza a $\emptyset$ üres halmazt.

Két F_1 és F_2 filtert *ekvivalensnek* nevezünk, ha bármely $A_1 \in F_1$ és $A_2 \in F_2$ elemekhez léteznek olyan $B_1 \in F_1$ és $B_2 \in F_2$ elemek, amelyekre fennáll $B_2 \subseteq A_1$ és $B_1 \subseteq A_2$. Világos, hogy az ekvivalens filterek a T halmaz részhalmazzaiból álló filtereknek egy osztályát képezik. Az összes ekvivalens filter halmazelméleti egyesítése ismét egy ezekkel ekvivalens F_0 filtert alkot, és F_0 ebben a filterosztályban maximális, amin azt értjük, hogy bármely ehhez az osztályhoz tartozó F filterre teljesül $F \subseteq F_0$.

E. WITT tanácsát követve LEPTIN definiálta így a filter fogalmát. A szokásos terminológiában ezt egy filter bázisának nevezik, és filteren az ekvivalens filterek maximális filterét értik. Számunkra azonban a 3.1. definíció által adott filter-fogalom lényegesen célszerűbb lesz, ennek a magyarázata abban rejlik, hogy a vizsgálatainkban fellépő filterek lényeges tulajdonsága az, hogy egy R -modulus bizonyos részmodulusai szerinti mellékosztályokból állnak; márpedig egy ilyen filterrel ekvivalens filter nem áll szükségképpen mellékosztályokból.

Tekintsünk ezután egy T *topológikus teret*, mint tudjuk, ez azt jelenti, hogy T -ben ki van jelölve részhalmazoknak egy nem üres rendszere, az ebben a rendszerben előforduló részhalmazokat *nyílt halmazoknak* nevezzük és ezekre teljesül:

- (1) véges sok nyílt halmaz metszete is nyílt,
- (2) nyílt halmazok egyesítése is nyílt.
- (1) alapján T maga, mint nyílt halmazok üres halmazának a metszete nyílt;
- (2) szerint pedig nyílt halmazok üres halmazának az egyesítése, vagyis az üres halmaz szintén nyílt.

Nyílt halmazok komplementer halmazait *zárt halmazoknak* nevezzük. Egy H halmaz *lezártján* értjük az összes H -t tartalmazó zárt halmaz metszetét, ez (2) szerint mindig zárt. Egy H halmaz lezártját mindig $\bar{H}$ -sal jelöljük.

* A német szaknyelvben beszélnek *Filter*-ről és *Filterbasis*-ről, az utóbbit *Raster*nek is mondják. A 3.1. definíció a Filterbasis definíciója, de ezt LEPTIN [18], [19] dolgozatában Filternek nevezi. A magyar szaknyelv e téren még nem alakult ki, a Filtert szokták szűrőnek, a Rastert pedig rácsnak nevezni.

A T topológikus tér elemeit pontoknak nevezzük, egy $a \in T$ pontot tartalmazó U nyílt halmazt pedig a környezetének.

Az eddigi definíciókból nyilvánvaló, hogy egy $a \in T$ pont összes környezete egy U_a filtert alkot. Az U_a filtert és minden vele ekvivalens filtert az a pont bázis-filterének nevezzük.

Egy T halmazon több topológia is értelmezhető. Azt mondjuk, hogy T -nek τ_1 topológiája *durvább* a τ_2 topológiájánál, és ezt $\tau_1 \cong \tau_2$ -vel jelöljük, ha T -nek minden a pontjának egy, a τ_1 topológiában vett U_a környezetében benne van a -nak egy τ_2 -ben vett V_a környezete. Két τ_1, τ_2 topológia *ekvivalens*, amennyiben $\tau_1 \cong \tau_2$ és $\tau_2 \cong \tau_1$ érvényes. Ez éppen azt jelenti, hogy a τ_1 topológia bázisfilterei ekvivalensek a τ_2 topológia bázisfiltereivel.

Egy A halmaz zártága esetén nyilván teljesül $A = \bar{A}$. $a \in \bar{A}$ a definíció szerint azt jelenti, hogy a benne van minden A -t tartalmazó zárt halmazban, vagyis nincs benne egyetlen A -hoz diszjunkt nyílt halmazban sem. Ha viszont $a \notin \bar{A}$, akkor $\bar{A}$ komplementere a -nak A -hoz diszjunkt környezete. Eszerint $\bar{A}$ pontjait jellemzi

(3) $a \in \bar{A}$ akkor és csak akkor, ha a minden környezete tartalmaz A -beli elemet.

A T tér S részhalmazára azt mondjuk, hogy T -ben *sűrű*, ha $\bar{S} = T$.

Azt mondjuk, hogy az F filter a -hoz *konvergál* és ezt $\lim F = a$ -val jelöljük, ha a -nak bármely U_a környezete tartalmaz egy $F \in \mathcal{F}$ halmazt.

3.2. definíció. A T teret *Hausdorff-térnek* nevezzük, ha bármely F filter legfeljebb egy ponthoz konvergálhat.

A T tér akkor és csak akkor *Hausdorff-féle*, ha bármely két $a \neq b$ pontjának van U_a és U_b diszjunkt környezete. Ha ugyanis U_a és U_b sohasem diszjunktak, akkor az $U_a \cap U_b$ metszetek olyan filtert alkotnak, amely a -hoz és b -hez is konvergál. Ha viszont van két olyan U_a és U_b környezet, amelyek diszjunktak bármely a és b pont esetén, akkor egy a -hoz konvergáló F filter b -hez már nem konvergálhat, mert akkor volna olyan $F \in \mathcal{F}$, amelyre teljesülne $F \subseteq U_a \cap U_b = \emptyset$, ami lehetetlen.

Regulárisnak nevezzük egy topológikus teret, ha bármely a pontjához és bármely a -t nem tartalmazó B zárt halmazához létezik két, a -t illetve B -t tartalmazó diszjunkt nyílt halmaz. Világos, hogy reguláris tér mindig *Hausdorff-féle*.

Egy F filter *érintkezési pontján* értjük a $\downarrow F = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \bar{F}$ halmaz elemeit. *Hausdorff*-tér esetén $\lim F = a$ -ból következik $\downarrow F = a$ is. Ugyanis egy $b \neq a$ ponthoz tekintsünk egy olyan U_a környezetet, amelynek a lezártja sem tartalmazza b -t, ekkor van olyan $F \in \mathcal{F}$, amely benne van U_a -ban, és így $b \notin \downarrow F$. Ha viszont volna olyan $F_1 \in \mathcal{F}$, amelynek a lezártja a -t nem tartalmazza, akkor F_1 komplementere a -nak egy olyan környezet, amely tartalmaz egy F_1 -hez diszjunkt $F_2 \in \mathcal{F}$ halmazt, ami lehetetlen.

Ebből az is következik, hogy *Hausdorff-térben* bármely pont, mint bázisfilterének az érintkezési pontja, zárt halmaz.

Egy topológikus teret *kompaktnak* nevezzük, ha minden F filterének van érintkezési pontja, azaz $\downarrow F \neq \emptyset$.

A T topológikus térnek S részhalmazában bevezethetünk egy olyan topológiát, amelyet T topológiája határoz meg, olyan módon, hogy S nyílt halmazai az $U \cap S$ metszetek lesznek, ahol U befutja T összes nyílt részhalmazát. S -nek ezt a topológiáját a T által indukált topológiának nevezzük.

Lokálisan kompaktnak nevezzük egy T teret akkor, ha minden pontjának van olyan környezete, amelynek a lezártja a T által indukált topológiában kompakt.

A T topológikus térnek egy S topológikus térbe való φ leképezését *folytonosnak* nevezzük, ha minden $a \in T$ pont esetén $\varphi(a) \in S$ -nek bármely U környezetéhez van a -nak olyan $V \subseteq T$ környezete, amelyre $\varphi(V) \subseteq U$ teljesül. ($\varphi(V)$ -vel jelöljük a $\varphi(v)$ ($v \in V$) elemek halmazát). Jól ismert, hogy egy φ leképezés folytonos volta ekvivalens a következő két feltétel bármelyikével:

(4) S minden nyílt részhalmazának őse T -ben nyílt;

(5) S minden zárt részhalmazának őse zárt T -ben.

A T térnek az S térbe való ψ leképezését *nyíltnak* mondjuk, amennyiben minden $a \in T$ ponthoz és annak tetszőleges U környezetéhez van $\psi(a)$ -nak olyan V környezete, amelyre fennáll $\psi(U) \supseteq V$.

Az egy-egyértelmű nyílt folytonos leképezéseket *homeomorfizmusoknak* szokták nevezni. Ezeknek szerepük topológiai vizsgálatoknál ugyanaz, mint az izomorfizmusoké az algebraiban.

Egy M R -modulust *topológikus R -modulusnak* nevezzük, ha M topológikus tér, és a műveletek folytonosak, részletesen: tetszőleges $a, b \in M$ és $r \in R$ elem esetén $a - b$ -nek bármely W_1 környezetéhez van a -nak olyan U_1 és b -nek olyan V_1 környezete, amelyre $u - v \in W_1$ ($u \in U_1, v \in V_1$) teljesül, továbbá ra -nak bármely W_2 környezetéhez van r -nek olyan $U_2 \subseteq R$ és a -nak olyan V_2 környezete, amelyre fennáll $xr \in W_2$ ($x \in U_2, v \in V_2$).

Itt hallgatólágosan feltettük, hogy R is topológikus teret alkot, ez azonban nem lényeges feltétel, mert az mindig feltehető, hogy R topológikus tér a *diszkrét* topológiában, amikor is minden halmaz — így minden pont is — nyílt.

Ennek a definíciónak megfelelően egy *topológikus csoporton* vagy *topológikus gyűrűn* olyan csoportot vagy gyűrűt értünk, amelyek topológikus teret alkotnak és amelyekben a műveletek folytonosak.

Ismert tétel, hogy egy topológikus csoport, ha *Hausdorff*-féle, akkor reguláris is. Így speciálisan a *Hausdorff*-topológiájú modulusok és gyűrűk reguláris teret alkotnak. A továbbiakban, ha topológikus térről (vagy struktúráról) lesz szó, *mindig feltételezzük, hogy a topológia Hausdorff-féle*.

Egy additív topológikus csoportban a topológiát meghatározza 0-nak egy bázisfiltere, ugyanis bármely a elemnek egy bázisfiltere ekvivalens az $U_a = \{a + U\}$ bázisfilterrel, ahol U befutja 0-nak környezeteit. A továbbiakban *bázisfilteren* mindig 0-nak egy bázisfilterét értjük. Ha egy csoportban tekintünk egy olyan filtert, amelynek elemei 0-t tartalmazó részhalmazok, akkor ezáltal definiálhatunk egy topológiát, úgy hogy ezt a filtert tekintjük bázisfilternek; az összeadás azonban általában nem lesz folytonos művelet.

Az A topológikus csoportnak $C = \{a_\gamma + U_\gamma\}$ filterét *Cauchy-filternek* nevezzük, ha az U_γ -k A -nak bázisfilterét alkotják. Azt mondjuk, hogy A topológiája *teljes*, ha minden *Cauchy*-filterének van érintkezési pontja. Világos, hogy kompakt csoport egyúttal teljes is.

Tekintsük az A csoportnak a B csoportra való egy-egyértelmű φ leképezését. Az előbbieket szerint annak szükséges és elégséges feltétele, hogy φ homeomorfizmus legyen az, hogy A -nak egy $U = \{U\}$ bázisfilterének $\varphi(U) = \{\varphi(U)\}$ képe B bázisfilterével ekvivalens filter legyen.

Egy topológikus csoport *súlyán* értjük az ekvivalens bázisfilterek számosságának a minimumát. Mivel a számosságok jólrendezett halmazt alkotnak, azért ilyen minimum mindig létezik.

Természetesen mindezek a fogalmak és megállapítások modulusokra és gyűrűkre is átvihetők, mivel ezeknek additív csoportjuk topológikus csoport.

A műveletek folytonosságának egyszerű következménye, hogy részcsoporthoz, részmodulus, balideál, ideál lezártja szintén részcsoporthoz, részmodulus, balideál illetve ideál.

Egy R gyűrűben jelöljük most $X \cdot Y$ -nal az xy ($x \in X, y \in Y$) alakú elemek halmazát.

3.3. állítás. Ha A és B az R gyűrűnek két részgyűrűje, akkor fennáll $\overline{A \cdot B} = \overline{A \cdot B}$ és $\overline{A \cdot B} = \overline{A \cdot B}$.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy fennáll $\overline{A \cdot B} \subseteq \overline{A \cdot B}$. Tekintsünk ezután egy $x \in \overline{A \cdot B}$ elemet. x -nek bármely U_x környezete (3) szerint tartalmaz ab ($a \in \overline{A}, b \in B$) alakú elemet. Mivel U_x ab -nek is környezete, azért a szorzás folytonossága miatt van a -nak olyan U_a környezete, amelyre $U_a \cdot b \subseteq U_x$ teljesül. $a \in \overline{A}$ miatt U_a -ban létezik $a_0 \in A$ elem, így $a_0 b \in U_x$. Azt kaptuk, hogy x -nek minden környezete tartalmaz $A \cdot B$ -beli elemet, ezért (3) szerint $x \in \overline{A \cdot B}$. A második egyenlőség bizonyítása ugyanígy történik.

A következőkben ismertetjük a faktorstruktúrákban bevezethető topológiát, a homomorfia és izomorfia-tételek topológikus struktúrákon érvényes változatait és a komplett direkt összegben értelmezett topológiát.

Ezeket a fogalmakat és eredményeket topológikus R -modulusok esetében fogalmazzuk meg, de éppen úgy érvényesek kétoldali modulusokra, csoportokra és gyűrűkre is, azzal a különbséggel, hogy az utóbbiaknál részmodulus helyett normális részcsoporthoz, illetve ideált kell mondanunk.

Tekintsük az M topológikus R -modulusnak egy A részmodulusát. Ha A zárt, akkor M topológiája az M/A faktormodulusban egy olyan Hausdorff-topológiát indukál, amelyre vonatkozóan M/A topológikus R -modulus. Ennek az indukált topológiának egy bázisfilterét úgy kapjuk, hogy tekintjük az összes $U + A/A$ alakú részhalmazt, ahol U befutja M -nek egy bázisfilterét ($U + A/A$ -n értjük az $u + A$ ($u \in U$) mellékosztályok halmazát). Jelölje φ M -nek M/A -ra való természetes homomorfizmusát; φ nyílt-folytonos leképezés. Az A részmodulus zártsága azért lényeges kikötés, mert különben az indukált topológiában φ folytonossága miatt M/A -nak a 0 pontja nem lenne zárt halmaz, és így M/A nem lehetne Hausdorff-tér.

Nyílt részmodulus minden esetben zárt is, ugyanis, ha A nyílt részmodulus akkor az $\bigcup_{b \in A} (b + A)$ nyílt halmaz komplementere éppen A . A φ természetes homomorfizmus nyílt voltának közvetlen következménye, hogy nyílt részmodulus szerinti faktormodulusban az indukált topológia diszkrét.

Ha N az M topológikus R -modulusnak a homomorf képe egy φ nyílt-folytonos homomorfizmusnál, akkor érvényes az

$$M/\text{Ker } \varphi \cong N$$

izomorfia algebrai és topológiai értelemben. (Azon, hogy két struktúra algebrai és topológiai értelemben izomorf, azt értjük, hogy a köztük létesített leképezés izomorfizmus és homeomorfizmus, más szóval nyílt-folytonos izomorfizmus.)

Az első izomorfia-tétel így fogalmazható: legyen A és B az M topológikus R -modulusnak két zárt részmodulusa, és tegyük fel, hogy $\{A, B\}$ is zárt részmodulus. Ekkor érvényes az

$$A/A \cap B \cong \{A, B\}/B$$

izomorfia algebrai és topológiai értelemben.

Legyen M egy topológikus R -modulus és A, B ($A \subseteq B$) zárt részmodulusok. Mivel a természetes homomorfizmusok nyílt-folytonos leképezések, azért a második izomorfia-tétel azt mondja ki, hogy fennáll az

$$M/A \big| B/A \cong M/B$$

izomorfia algebrai és topológiai értelemben.

Tekintsük az $M_1, \dots, M_\alpha, \dots$ topológikus R -modulusokat. Ezeknek a modulusoknak az $M = \sum_{\alpha} M_\alpha$ komplett direkt összegében bevezetjük az úgynevezett *Tyihonov-féle topológiát* a következőképpen. Tekintsünk minden M_α -ban egy U_α bázisfiltert, és jelöljük $(A_1, \dots, A_\alpha, \dots)$ -val az $A_\alpha \subseteq M_\alpha$ halmazok *Descartes*-szorzatát. M -nek bázisfilterét alkossák azok az $U = (U_1, \dots, U_\alpha, \dots)$ ($U_\alpha \in U_\alpha$) halmazok, amelyekben véges kivétellel valamennyi $U_\alpha = M_\alpha$. M ebben a topológiában topológikus modulus. Ha a továbbiakban komplett direkt összegekről esik szó, mindig feltételezzük, hogy az topológikus tér a *Tyihonov*-topológiával.

Kompakt R -modulusok komplett direkt összege a *Tyihonov*-topológiában kompakt. Diszkrét direkt összegre ez a tétel nem áll fenn, mivel a diszkrét direkt összeg még csak nem is alkot teljes teret sem. A diszkrét direkt összeg a *Tyihonov*-topológiával ellátott komplett direkt összegnek sűrű részhalmaza.

Legyen az M topológikus R -modulus az A és B zárt részmodulusainak algebrailag vett direkt összege. Azt mondjuk, hogy M A -nak és B -nek *topológiai értelemben* is direkt összege, ha az $A + B$ térben bevezetett *Tyihonov*-topológia ekvivalens az M -beli topológiával. Világos, hogy ennek szükséges és elegendő feltétele az, hogy $A + B$ -nek tetszőleges (U, V) ($U \subseteq A, V \subseteq B$) 0-környezetéhez van M -nek olyan W 0-környezete, amelyre $W \subseteq (U, V)$ teljesül. A és B algebrai és topológiai értelemben vett direkt összegét $A \oplus B$ -vel jelöljük.

Amit itt modulusokra elmondottunk, mindaz — mint már megjegyeztük — érvényes kétoldali modulusokra, csoportokra és gyűrűkre egyaránt.

A 2, 2. állítás topológiai általánosítása a

3, 4. állítás. Ha R topológikus gyűrű és $I_1, \dots, I_r$ R -nek olyan ideáljai, melyekre $I_1 \cap \dots \cap I_r = 0$ és $\{I_1 \cap \dots \cap I_{i-1}, I_i\} = R$ ($i = 2, \dots, r$), akkor R algebrai és topológiai értelemben izomorf az

$$R' = R/I_1 \oplus \dots \oplus R/I_r$$

direkt összeggel.

Bizonyítás. A 2, 2. állítás szerint fennáll az izomorfia algebrai értelemben. R -nek R/I_i -re való természetes homomorfizmusa, mint tudjuk, nyílt-folytonos leképezés. Jelöljük R -nek R' -re való izomorfizmusát φ -vel, és tekintsük R' -ben 0-nak egy U' környezetét. Feltehető, hogy $U = (U_1, \dots, U_r)$, ahol U_i R/I_i -nek 0-környezete. Válasszunk ezután R -ben egy olyan U 0-környezetet, amelyre teljesül $U + I_i/I_i \subseteq U_i$ ($i = 1, \dots, r$). Ez r végeessége miatt megtehető. Ekkor U -ra teljesül $\varphi(U) \subseteq U'$, tehát φ folytonos leképezés. Ha U R -nek tetszőleges 0-környezete,

akkor R' -nek $U' = (U + I_1/I_1, \dots, U + I_r/I_r)$ 0-környezetére nyilván teljesül $\varphi(U) \supseteq U'$, így φ nyílt leképezés. Ezzel kimutattuk, hogy φ R -nek R' -re való homeomorfizmusa. $\square$

Gyakran előforduló fogalom lesz a továbbiakban az inverz-limesz fogalma. Ezt is csak R -modulusokra értelmezzük, de ugyanígy értelmezhető kétoldali modulusokra, csoportokra és gyűrűkre is.

Tekintsünk egy $\Gamma = \{\alpha, \beta, \dots\}$ irányított halmazt. Topológikus R -modulusok *inverz rendszerén* egy olyan Ω rendszert értünk, amely M_α ($\alpha \in \Gamma$) topológikus R -modulusokból és olyan π_β^α ($\alpha > \beta$) folytonos homomorfizmusokból áll, amelyek M_α -t M_β -ba képezik le, és amelyekre fennáll $\pi_\gamma^\alpha = \pi_\gamma^\beta \pi_\beta^\alpha$ ($\alpha > \beta > \gamma$). Az inverz-rendszerre használni fogjuk az $\Omega = [M_\alpha, \pi_\beta^\alpha]$ jelölést.

Az Ω inverz-rendszer *inverz-limeszén* értjük a $\sum_{\alpha \in \Gamma} M_\alpha$ Tyihonov-topológiával ellátott komplett direkt összegnek azt az $M = \varprojlim \Omega$ részmodulusát, amelyet az $[x_\alpha] = (\dots, x_\alpha, \dots)$ ($\pi_\beta^\alpha x_\alpha = x_\beta$, $\alpha > \beta$) alakú vektorok alkotnak. Ismeretes, hogy M a komplett direkt összegnek zárt részmodulusa. Azt a π_α folytonos homomorfizmust, amely M -et M_α -ba képezi le oly módon, hogy az $(\dots, x_\alpha, \dots) \in M$ vektorhoz az $x_\alpha \in M_\alpha$ elemet rendeli hozzá, M -nek M_α -ra való természetes homomorfizmusának nevezzük.

Azt mondjuk, hogy az M_α ($\alpha \in \Gamma$) R -modulusoknak $\Omega = [M_\alpha, \pi_\beta^\alpha]$ inverz-rendszere az $\Omega_\lambda = [M_{\alpha\lambda}, \varrho_{\beta\lambda}^\alpha]$ inverz-rendszerek direkt összege, ha $M_\alpha = \sum_\lambda M_{\alpha\lambda}$ ($\alpha \in \Gamma$) és $\varrho_{\beta\lambda}^\alpha$ pedig a π_β^α leképezésnek $M_{\alpha\lambda}$ -ra való korlátozását jelenti. Azt a tényt, hogy Ω az Ω_λ inverz-rendszerek direkt összege, $\Omega = \sum_\lambda \Omega_\lambda$ -val jelöljük.

3. 5. állítás. (ZELINSKY [35] Theorem 1). Érvényes az

$$\varprojlim \sum_\lambda \Omega_\lambda \cong \sum_\lambda \varprojlim \Omega_\lambda$$

izomorfia algebrai és topológiai értelemben.

Bizonyítás. $\varprojlim \sum_\lambda \Omega_\lambda$ elemei az $A = \sum_\lambda \sum_\alpha M_{\alpha\lambda}$ komplett direkt összegnek bizonyos elemei. Hasonlóan $B = \sum_\alpha \sum_\lambda M_{\alpha\lambda}$ -nak bizonyos elemei alkotják $\sum_\lambda \varprojlim \Omega_\lambda$ -t. Minthogy A és B algebrai és topológiai értelemben izomorf, azért elegendő kimutatni, hogy ennél az izomorfizmusnál $\sum_\lambda \varprojlim \Omega_\lambda \varprojlim \sum_\lambda \Omega_\lambda$ -ra képeződik le. B -nek egy $[x_{\alpha\lambda}]$ vektora akkor és csak akkor tartozik $\sum_\lambda \varprojlim \Omega_\lambda$ -hoz, ha $\varrho_{\beta\lambda}^\alpha x_{\alpha\lambda} = x_{\beta\lambda}$ teljesül minden λ -ra és $\alpha > \beta$ -ra. Másrészt egy $[x_{\alpha\lambda}] \in A$ vektor akkor és csak akkor tartozik $\varprojlim \sum_\lambda \Omega_\lambda$ -hoz, ha $\pi_\beta^\alpha [x_{\alpha\lambda}] = [x_{\beta\lambda}]$ teljesül minden λ -ra. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy $\varrho_{\beta\lambda}^\alpha x_{\alpha\lambda} = x_{\beta\lambda}$ érvényes minden λ -ra és $\alpha > \beta$ -ra. $\square$

Gyűrűk inverz-limeszére vonatkozóan szükségünk lesz a

3. 6. állításra (ZELINSKY [35] Lemma 3.). Radikálgűrűk inverz-limesze is radikálgűrű.

Bizonyítás. Legyen $R = \varprojlim [R_\alpha, \pi_\beta^\alpha]$, ahol az R_α -k radikálgűrűk. Elegendő kimutatni, hogy R -nek minden elemének van bal-kvázii inverze. Ha $[x_\alpha] \in R$,

akkor a feltétel szerint minden x_α -nak van kváziinverze, azaz létezik olyan egyértelműen meghatározott $y_\alpha \in R_\alpha$ elem, amelyre fennáll $y_\alpha + x_\alpha + y_\alpha x_\alpha = 0$. Világos, hogy $\pi_\beta^\alpha y_\alpha = y_\beta \in R_\beta$ x_β -nak bal-kváziinverze, ezért $[y_\alpha] \in R[x_\alpha]$ -nak bal-kváziinverze. $\square$

Egy M R -modulust *lineárisan topológikusnak* nevezünk, ha van részmodulusokból álló bázisfiltere. Mivel nyílt részmodulust tartalmazó részmodulusok nyíltak, azért lineárisan topológikus R -modulusnak minden részmodulusból álló bázisfiltere nyílt részmodulusokból áll. Könnyű látni, hogy ha egy M R -modulusban kijelöljük részmodulusoknak egy U filterét, akkor U -t M bázisfilterének tekintve M -ben egy olyan topológiát vezettünk be, amelyre nézve a műveletek folytonosak is.

Már LEFSCHETZ [17] könyvében szerepel a lineárisan kompakt és lokálisan lineárisan kompakt vektortér fogalma. Egy M topológikus R -modulust *lineárisan kompaktnak* nevezünk, ha M lineárisan topológikus és M -ben minden olyan F filternek, amely zárt részmodulusok szerinti mellékosztályokból áll, van érintkezési pontja.

A lineárisan kompaktság feltétele a kompaktsághoz képest egyfelől erősebb kikötést tartalmaz, nevezetesen azt, hogy létezik részmodulusokból álló bázisfilter, másfelől kevesebbet tételez fel, amennyiben csak bizonyos F filterekről követeli meg $\downarrow F \neq \emptyset$ teljesülését. Olyan R -modulusra, amely lineárisan kompakt, de nem kompakt, példaként tekintsünk egy végtelen sok elemet tartalmazó irreducibilis R -modulust a diszkrét topológiában. Erről nyilvánvaló, hogy lineárisan kompakt, másrészt viszont nem lehet kompakt a diszkrét topológiában, mivel végtelen sok elemet tartalmaz.

Lokálisan lineárisan kompaktnak nevezünk egy M R -modulust, ha M -nek van olyan $L \neq 0$ nyílt részmodulusa, amely lineárisan kompakt.

Egy R gyűrűt akkor tekintünk lineárisan kompaktnak, ha R , mint R -modulus lineárisan kompakt. Rögtön felmerül a lineáris kompaktság egy másik definíciójának a lehetősége is: R -et akkor mondjuk ideálokra nézve lineárisan kompaktnak, ha van ideálokból álló bázisfiltere és minden zárt ideálok szerinti mellékosztályokból álló filternek van érintkezési pontja. Már itt megemlítjük, hogy ez a két értelmezés két különböző gyűrűosztályt definiál (lásd a 11. § (a) részét és a 11,3 példát). Viszont közös mederben tárgyalható a két különböző típusú topológia vizsgálata. Ezt még nagyobb általánossággal a 4. §-ban fogjuk kifejteni.

Mivel a 7. §-ban alkalmazni fogjuk JACOBSON *sűrűségi tételét*, ezért a teljesség kedvéért közöljük annak topológiai megfogalmazását.

Jelöljön M egy irreducibilis R -modulust. Ismeretes, hogy M -nek R -rel felcserélhető endomorfizmusai egy K ferdetestet alkotnak. M -nek, mint K feletti vektortérnek R^* teljes endomorfizmusgyűrűjében (vagy más szóval M lineáris transzformációinak a gyűrűjében) bevezetünk egy lineáris topológiát a következőképpen: Tekintsünk véges sok $x_1, \dots, x_n$ M -beli elemet és ezekhez alkossuk meg az

$$L = L(x_1, \dots, x_n) = \{r \in R \mid rx_1 = \dots = rx_n = 0\}$$

balideált. Az összes ilyen L balideál nyilván egy filtert alkot, és ezt tekintsük R^* bázisfilterének. JACOBSON sűrűségi tétele így szól:

3, 7. tétel ([8] 31. oldal, Density Theorem for Irreducible Modules). *R sűrű részgyűrűje az R^* gyűrűnek.*

A 8. §-ban a lokálisan lineárisan kompakt primitív gyűrűkről kimutatjuk, hogy ezek éppen a minimális balideállal rendelkező primitív gyűrűk. Ez utóbbiaknak igen szép leírását adja JACOBSON struktúra-tétele. A megfogalmazáshoz bevezetjük a véges rangú lineáris transzformáció fogalmát. Egy vektortér φ lineáris transzformációját *véges rangúnak* nevezzük, ha $\text{Im } \varphi$ véges dimenziós vektortér.

3, 8. tétel ([8] 75. oldal, Structure Theorem (1) és (2) része). *Egy R gyűrű akkor és csak akkor minimális balideált tartalmazó primitív gyűrű, ha R egy ferdetest feletti vektortér teljes endomorfizmus-gyűrűjének olyan sűrű részgyűrűje, amely tartalmaz véges rangú lineáris transzformációkat.*

A 2, 7. definíciónak megfelelően bevezetjük a topológikusan egyszerű gyűrű fogalmát.

3, 9. definíció. Egy R topológikus gyűrűt *topológikusan egyszerűnek* nevezzük, ha csak triviális zárt ideáljai vannak és radikálja 0.

E szerint tehát egy topológikusan egyszerű gyűrű mindig féligegyszerű.

Végül ismertetjük ideálok transzfinit nilpotenciájának a fogalmát. Az itt ismertetett definíció a nilpotenciának LEPTINTŐL [18] származó általánosítása. A III. részben tulajdonképpen a transzfinit nilpotens gyűrűket vizsgáljuk, és bizonyos topológikus feltételek mellett ezek éppen a radikálgyűrűk lesznek.

Tekintsünk egy R topológikus gyűrűt és R -ben egy A ideált. Defináljuk R -ben az A_μ és A ideálokat a következő módon. Legyen

$$\begin{aligned} A_0 &= A & A &= A \\ & & 0 & \\ A_{\mu+1} &= \overline{A_\mu \cdot A} & A &= \overline{A \cdot A} \\ & & \mu+1 & \mu \quad \mu \\ A_\lambda &= \bigcap_{\mu < \lambda} A_\mu & A &= \bigcap_{\lambda} A, \quad \text{ha } \lambda \text{ limeszszám.} \end{aligned}$$

Ilyen módon ideáloknak két leszálló láncához jutunk. Legyen ζ egy olyan rögzített rendszám, hogy a nála kisebb rendszámok számossága nagyobb legyen R számoságánál. Ekkor létezik egy olyan $\alpha < \zeta$ rendszám, amelyre $A_\mu = A_\alpha$ minden $\mu > \alpha$ rendszámra, így fennáll $A_\mu = A_\zeta$ is. Hasonlóan teljesülnie kell $A = A_\zeta$ -nek is minden $\mu > \zeta$ -ra. Vezessük be az $A_* = A_\zeta$ és $A = A$ jelölést. A_* és A olyan zárt ideál, amelyre teljesül

$$\overline{A_* \cdot A} = A_*, \quad \overline{A \cdot A} = A$$

Az A ideált *transzfinit r -nilpotensnek* nevezzük, ha $A_* = 0$, és transzfinit nilpotensnek, ha $A = 0$. A transzfinit jelzőt el fogjuk hagyni és röviden *r -nilpotens* és *t -nilpotens* ideálokról beszélünk. Minthogy $A \subseteq A_*$, azért egy r -nilpotens ideál mindig t -nilpotens is. Leggyakrabban azzal az esettel lesz dolgunk, amikor $R = A$, ilyenkor a gyűrűt r -nilpotensnek, illetve t -nilpotensnek nevezzük, ha $R_* = 0$, illetve $R = 0$.

Ezeket a fogalmakat minden gyűrűben értelmezhetjük, mert a diszkrét topológiában valamennyi gyűrű topológikus gyűrű.

4. §. Lineárisan kompakt modulusok topológiai tulajdonságai

Ebben a §-ban célunk a lineárisan kompakt topológiának általánosítása, és ennek az általánosított fogalomnak topológiai vizsgálata.

Tekintsünk e végből egy R gyűrű feletti M balmodulust, és tegyük fel, hogy M -nek van egy S jobboperátortartománya, amelynek elemei R elemeivel felcserélhető operátorok, azaz bármely $r \in R$ és $s \in S$ operátor esetén teljesül $(rm)s = r(ms)$ minden $m \in M$ elemre. Vizsgálatainkban az S operátortartományra nézve a következő speciális esetek fognak fellépni:

- a) S az üres halmaz, azaz M csupán R -modulus.
- b) $S = R$. Ez a helyzet áll elő, ha M az R gyűrűnek ideálja, homomorf képe, vagy ilyenek a direkt összegei.
- c) S ferdetest, M az S ferdetest feletti vektortér, és R M lineáris transzformációinak egy gyűrűje.

4, 1. definíció. Az M topológikus (R, S) -modulus topológiáját *lineárisnak* nevezzük, ha van kétoldali részmodulusokból álló bázisfiltere.

4, 2. definíció. Az M (R, S) -modulust *lineárisan kompaktnak* nevezzük, ha topológiája lineáris és minden olyan filternek, amely zárt kétoldali részmodulusok szerinti mellékosztályokból áll, van érintkezési pontja.

Tekintsünk egy R topológikus gyűrűt, mint önmaga feletti balmodulust és mint az üres halmaz feletti jobbmodulust. A 4, 2. definíció most gyűrű lineáris kompaktságának a szokásos definícióját adja. Ha viszont R -et, mint (R, R) -modulust tekintjük, akkor a 4, 1. definícióban az előzőkhöz képest erősebb kikötéssel élünk, nevezetesen azzal, hogy R -nek létezzék ideálokból álló bázisfiltere. Ezzel szemben most kevesebb filtertől kívánjuk meg azt, hogy legyen érintkezési pontja. Ha R -ben ilyen értelemben teljesülnek a 4, 2. definíció feltételei, akkor azt mondjuk, hogy R *ideálokra nézve lineárisan kompakt*. Később látni fogjuk, hogy a lineárisan kompakt gyűrűk osztálya különbözik az ideálokra nézve lineárisan kompakt gyűrűk osztályától.

A lineáris kompaktság fogalmát még általánosabban is definiálhatnánk oly módon, hogy tekintjük a topológikus-modulusoknak és folytonos homomorfizmusainak a kategóriáját. Minden M modulushoz hozzárendeljük additív részcsoportjainak egy $\mathcal{T}_M$ rendszerét, úgy hogy teljesüljenek az alábbi feltételek:

1. $M \in \mathcal{T}_M$;
2. ha $G_1 \subseteq \dots \subseteq G_\alpha \subseteq \dots$ $\mathcal{T}_M$ -beli részcsoportok növekvő lánc, akkor $\bigcup_\alpha G_\alpha \in \mathcal{T}_M$;
3. ha $G, H \in \mathcal{T}_M$ akkor $G \cap H \in \mathcal{T}_M$;
4. ha φ olyan folytonos homomorfizmus, amelyre $\text{Ker } \varphi \in \mathcal{T}_M$, akkor $\mathcal{T}_{\text{Im } \varphi} = \varphi(\mathcal{T}_M)$, ahol $\varphi(\mathcal{T}_M)$ jelenti a $\varphi(A)$ ($A \in \mathcal{T}_M$) részcsoportok halmazát;
5. $\mathcal{T}_{M \oplus N} = \mathcal{T}_M \oplus \mathcal{T}_N$, ahol $\mathcal{T}_M \oplus \mathcal{T}_N$ jelenti $M \oplus N$ -nek $A \oplus B$ ($A \in \mathcal{T}_M, B \in \mathcal{T}_N$) alakú részcsoportjainak a halmazát.

Egy M modulust $\mathcal{T}$ -re vonatkozóan lineárisan topológikusnak nevezünk, ha van $\mathcal{T}_M$ -beli részcsoportokból álló környezetbázisa. Azt mondjuk, hogy M $\mathcal{T}$ -re vonatkozóan lineárisan kompakt, ha $\mathcal{T}$ -re vonatkozóan lineárisan topológikus és minden $\mathcal{T}_M$ -beli zárt részcsoportok szerinti mellékosztályokból álló F filtere $\downarrow F \neq \emptyset$.

Jelentse $\mathcal{T}_M$ egy M (R, S) -modulus összes részmodulusát. Most teljesülnek az 1—5. feltételek, és ebben az esetben éppen a 4, 1. és 4, 2. definíciót kapjuk.

Érdekes lenne vizsgálni a lineáris kompaktságnak azt a gyűrűelméleti esetét, amikor $\mathcal{T}_R$ jelenti a gyűrű kváziideáljainak a halmazát, és a gyűrű erre a tulajdonságra nézve lineárisan kompakt.

A következő tételek bizonyíthatók lennének csupán az 1–5. axiómák felhasználásával, ez azonban a tárgyalást nehézkessé tenné. Minthogy vizsgálatainkban csak a 4, 2. definíció speciális eseteire lesz szükség, azért a tételeket ennek megfelelően mondjuk ki és bizonyítjuk be.

Bebizonyítunk néhány alapvető tételt a lineárisan kompakt kétoldali modulusokra vonatkozóan. Ezek a tételek ZELINSKY [35], [36] és LEPTIN [18] által balmodulusokra bizonyított tételek általánosításai, teljesen analóg bizonyításokkal. A teljesség kedvéért közöljük a bizonyításokat.

Mivel minden nyílt részmodulus egyúttal zárt is, azért a 4, 2. definíció alapján közvetlenül adódik, hogy egy lineárisan kompakt (R, S) -modulusban minden Cauchy-filternek van érintkezési pontja. Ezért érvényes a

4, 3. állítás. *Minden lineárisan kompakt (R, S) -modulus teljes.*

4, 4. állítás. *Ha egy M modulus topológiája lineáris és a zárt kétoldali részmodulusokra teljesül a minimumfeltétel, akkor M diszkrét és lineárisan kompakt.*

Mivel minden nyílt részmodulus egyúttal zárt is, azért M bázisfiltere tartalmaz minimális kétoldali részmodulust. M Hausdorff-tér, ez csak úgy lehetséges, ha 0 nyílt részmodulus, vagyis M diszkrét.

Legyen $F = \{a_\lambda + V_\lambda\}$ egy zárt kétoldali részmodulusok szerinti mellékosztályokból álló filter, ahol V_λ jelöli a szóban forgó részmodulusokat. A feltétel szerint a V_λ -k között van minimális, legyen ez V_{λ_0} . Ekkor fennáll $\emptyset \neq a_{\lambda_0} + V_{\lambda_0} \subseteq F$. $\square$

A 4, 4. állítás azt mutatja, hogy a lineárisan kompaktság feltétele általánosítása a minimumfeltételnek.

4, 5. állítás. *Az M lineárisan kompakt (R, S) -modulusnak bármely G zárt kétoldali részmodulusa lineárisan kompakt.*

Ha $U = \{U_\lambda\}$ M -nek részmodulusokból álló bázisfiltere, akkor világos, hogy $V = \{U_\lambda \cap G\}$ G -nek részmodulusokból álló bázisfiltere. Az M által indukált topológia tehát lineáris. A további állítás nyilvánvaló. $\square$

4, 6. állítás. *Ha az M (R, S) -modulus lineárisan topológikus, akkor bármely N lineárisan kompakt részmodulusa zárt.*

Legyen $a \in \bar{N}$ tetszőleges pont és jelölje $U = \{U_\lambda\}$ M -nek részmodulusokból álló bázisfilterét. Ekkor a -nak minden $a + U_\lambda$ környezete tartalmaz N -beli elemet, tehát $(a + U_\lambda) \cap N$ nem üres és így az $F = \{(a + U_\lambda) \cap N\}$ halmaz filtert alkot. Jelöljön a_λ egy, a továbbiakban rögzített elemet $(a + U_\lambda) \cap N$ -ből és $b_\lambda \in (a + U_\lambda) \cap N$ egy további elemet. Mindenek előtt világos

$$a_\lambda + (U_\lambda \cap N) \subseteq (a + U_\lambda) \cap N.$$

Mivel $b_\lambda - a_\lambda \in U_\lambda \cap N$, azért $b_\lambda \in a_\lambda + (U_\lambda \cap N)$, tehát

$$a_\lambda + (U_\lambda \cap N) \supseteq (a_\lambda + U_\lambda) \cap N$$

is fennáll. E két tartalmazás azt mutatja, hogy az F filter elemei N -ben zárt részhalmazok szerinti mellékosztályok. Így N lineáris kompaktsága miatt $\downarrow F \neq \emptyset$. De mivel U bázisfilter, ezért ez csak úgy lehetséges, ha $a \in \downarrow F$, amiből $a \in N$ következik. N tehát valóban zárt. $\square$

4, 7. állítás. Jelölje φ az M lineárisan kompakt (R, S) -modulusnak az N lineárisan topológikus (R, S) -modulusba való folytonos homomorfizmusát. Ekkor $\text{Im } \varphi$ lineárisan kompakt modulus.

Mivel $\text{Im } \varphi$ N -nek részmodulusa, azért $\text{Im } \varphi$ -ben az N által indukált topológia nyilván lineáris.

Tekintsünk ezután egy olyan $F^* = \{F_\lambda\}$ filtert $\text{Im } \varphi$ -ben, amelynek elemei zárt részmodulusok szerinti mellékosztályok. A φ leképezés folytonossága miatt $F = \{\varphi^{-1}(F_\lambda)\}$ zárt részmodulusok szerinti mellékosztályokból álló filter, ezért a feltétel szerint $\downarrow F \neq 0$, következésképp $0 \neq \varphi(\downarrow F) \subseteq \downarrow F^*$. $\square$

4, 8. állítás. Legyen A és B az M lineárisan kompakt (R, S) -modulusnak zárt kétoldali részmodulusa. Ekkor az A és B által algebrailag generált $\{A, B\}$ részmodulus zárt M -ben.

Legyen φ az M -nek M/A -ra való természetes homomorfizmus. Tekintsük M/A -nak egy $V = \{V_\lambda\}$ részmodulusokból álló bázisfilterét. $W = \{V_\lambda \cap \varphi(B)\} \varphi(B)$ ($\subseteq M/A$)-nak bázisfiltere. Nyilvánvaló, hogy W elemei kétoldali részmodulusok és így $\varphi(B)$ -ben a topológia lineáris. A 4, 5. állítás miatt B lineárisan kompakt, ezért a 4, 7. állítás következtében $\varphi(B)$ is lineárisan kompakt. Így a 4, 6. állítás szerint $\varphi(B)$ zárt M/A -ban, φ folytonossága miatt pedig $\varphi^{-1}(\varphi(B)) = \{A, B\}$ M -nek zárt részmodulusa. $\square$

4, 9. állítás. Legyen N zárt kétoldali részmodulus az M lineárisan topológikus (R, S) -modulusban. Ha N és M/N lineárisan kompakt modulusok, akkor M is lineárisan kompakt.

Jelölje φ M -nek M/N -re való természetes homomorfizmusát és legyen $F = \{F_\lambda\}$ M -ben egy zárt részmodulusok szerinti mellékosztályokból álló filter. Ekkor $\varphi(F) = \{\varphi(F_\lambda)\}$ M/N -ben zárt részmodulusok szerinti mellékosztályokból álló filter, és így a feltétel szerint van olyan $x \in M$ elem, amelyre $\varphi(x) \in \downarrow \varphi(F)$ teljesül. Következésképp $x \in \cap (F_\lambda + N)$ és így minden λ -hoz van olyan $f_\lambda \in F_\lambda$ elem, amelyre $f_\lambda - x \in N$ érvényes. Ezért $E = \{(F_\lambda - x) \cap N\}$ nem üres, zárt részmodulusok szerinti mellékosztályokból álló filter N -ben. A feltétel szerint van olyan $y \in N$ elem, amelyre $y \in \downarrow E$. Ekkor nyilvánvaló, hogy fennáll $x + y \in \downarrow F$. $\square$

Emlékeztetünk arra, hogy egy M (R, S) -modulus talpán a minimális kétoldali részmodulusok által algebrailag generált B részmodulust értjük, illetve a 0 modulust, amennyiben M -nek nincs minimális részmodulusa.

4, 10. állítás. Egy M diszkrét lineárisan kompakt (R, S) -modulus talpa véges sok minimális részmodulus direkt összege.

Tegyük fel, hogy az $A_1, \dots, A_r$ minimális kétoldali részmodulusok által generált B_r részmodulus ezeknek a direkt összege, $B_r = A_1 + \dots + A_r$. Ha B_r tartalmazza M összes minimális kétoldali részmodulusát, akkor készen vagyunk. Ha létezik egy A_{r+1} minimális kétoldali részmodulus, amely nincs benne B_r -ben, akkor $A_{r+1} \cap B_r = 0$ és $B_{r+1} = B_r + A_{r+1}$ direkt összeg. Folytassuk ezt az eljárást és tegyük fel, hogy nem szakad meg véges sok lépésben. Legyen $B = A_1 + A_2 + \dots$ az A_i -ik diszkrét direkt összege. Tekintsük minden n természetes számhoz az $U_n = A_{n+1} + A_{n+2} + \dots$ részmodulust. Válasszunk ki minden A_i -ből egy $x_i \neq 0$ elemet. Ekkor az $F = \{x_1 + \dots + x_n + U_n\}$ halmaz nyilván filtert alkot és mivel M diszkrét, azért

zárt részmodulusok szerinti mellékosztályokból álló filterről van szó. M lineárisan kompakt volta miatt a 4. 5. állítás következtében B is lineárisan kompakt, ezért fennáll $x_1 + x_2 + \dots \in \downarrow F \subseteq B$. Másrészt B elemei csak véges sok nullától különböző komponenszt tartalmazhatnak, így ellentmondáshoz jutottunk. $\square$

4. 11. állítás. *Legyenek $M_1, \dots, M_\alpha, \dots$ lineárisan kompakt (R, S) -modulusok. Ekkor az $M = \sum_\alpha M_\alpha$ komplett direkt összeg a Tyihonov-féle topológiában lineárisan kompakt.*

Nyilvánvaló, hogy M a Tyihonov-topológiában lineárisan topológikus. Arra vonatkozóan, hogy M lineárisan kompakt is, a tankönyvekre hivatkozunk (BOURBAKI [2] I. 10. § 3. tétel, LEFSCHETZ [17] (I. 24, 1)).

4. 12. állítás. *Ha $\Omega = [M_\alpha, \pi_\beta^*]$ lineárisan kompakt (R, S) -modulusok inverz-rendszere, akkor $M = \varprojlim \Omega$ is lineárisan kompakt.*

Ismeretes ([17] (I. 38, 2)), hogy ha $U_\alpha = \{U_{\alpha\lambda}\}$ M_α -nak kétoldali részmodulusokból álló bázisfiltere, akkor a

$$V_{\alpha\lambda} = \{x \in M \mid \pi_\alpha x \in U_{\alpha\lambda}\}$$

halmazok M -nek egy részmodulusokból álló bázisfilterét alkotja. M -ben tehát a topológia lineáris.

LEFSCHETZ [17] (I. 38, 3) szerint M zárt részhalmaza a $\sum_\alpha M_\alpha$ komplett direkt összegnek, amely a 4. 11. állítás szerint lineárisan kompakt. Alkalmazva a 4. 5. állítást, azt nyerjük, hogy M is lineárisan kompakt. $\square$

Legyen M egy lineárisan topológikus (R, S) -modulus, és tekintsük M -nek egy részmodulusokból álló $U = \{U_\alpha\}$ bázisfilterét. Jelölje π_α M -nek $M_\alpha = M/U_\alpha$ -ra való természetes homomorfizmusát. Mivel U_α nyílt, azért M/U_α a π_α által indukált topológiában diszkrét (R, S) -modulus. Defináljunk az indexek között egy részbenrendezést úgy, hogy $\alpha > \beta$ akkor és csak akkor álljon fenn, ha $U_\alpha \subset U_\beta$ és tekintsük minden $\alpha > \beta$ indexpárra a $\pi_\beta^* = \pi_\beta \pi_\alpha^{-1}$ leképezését. Világos, hogy π_β^* éppen M_α -nak M_β -ra való természetes homomorfizmus. Az $\Omega = [M_\alpha, \pi_\beta^*]$ rendszer (R, S) -modulusoknak egy inverz-rendszerét alkotja.

4. 13. állítás. *A fenti jelölések mellett, ha M teljes, akkor algebrailag és topológiailag izomorf $\varprojlim \Omega$ -val.*

A $\varphi(x) = (\dots, x_\alpha, \dots)$ ($x \in M, x_\alpha \in M_\alpha$) leképezések M -nek $\varprojlim \Omega$ -ba való homomorfizmusai. A φ leképezés egy-egyértelmű is, mert $\varphi(x) = 0$ -ból $x \in \bigcap_\alpha U_\alpha = 0$ következik. φ M -et $\varprojlim \Omega$ -ra képezi le, mert ha $(\dots, y_\alpha, \dots) \in \varprojlim \Omega$ ($y_\alpha \in M_\alpha$), akkor válasszuk az $x_\alpha \in M_\alpha$ elemet úgy, hogy $\pi_\alpha x_\alpha = y_\alpha$ fennálljon. Tekintsük M -ben a $C = \{x_\alpha + U_\alpha\}$ filtert. Mivel $U = \{U_\alpha\}$ bázisfilter, ezért C Cauchy-filter, és így M teljessége miatt létezik egy (és csakis egy) $x \in M$ elem. Erre az x -re pedig érvényes $\varphi(x) = (\dots, y_\alpha, \dots)$. A φ leképezés az U_α -t éppen $V_\alpha = \{(\dots, y_\beta, \dots) \in \varprojlim \Omega \mid y_\alpha = 0\}$ -ba viszi. Mivel minden M_α diszkrét, azért $V = \{V_\alpha\}$ $\varprojlim \Omega$ -nak bázisfiltere. φ tehát az U bázisfiltert egy-egyértelműen a V bázisfilterre képezi le, ezért mindkét irányban folytonos. $\square$

4, 14. állítás. Ha $\tilde{M}$ az M topológikus (R, S) -modulus teljes burka és $U = \{U_\alpha\}$ M -nek részmodulusokból álló bázisfiltere, akkor $\tilde{M}$ algebrailag és topológiailag izomorf $\varprojlim [M/U_\alpha, \pi_\alpha^-]$ -val.

Jelölje $\tilde{U}$ az U részmodulus lezártját $\tilde{M}$ -ban. Világos, hogy $\tilde{U} = \{\tilde{U}_\alpha\}$ $\tilde{M}$ -nak részmodulusokból álló bázisfiltere. A 4, 13. állítás következtében elegendő kimutatnunk, hogy fennáll az $\tilde{M}/\tilde{U} \cong M/U$ izomorfia tetszőleges U nyílt részmodulus esetén.

Egy U részmodulus lezártja M -ben nyilván $\tilde{U} \cap M$. Mivel U nyílt és így zárt is, azért $U = \tilde{U} \cap M$. Ezért minden $r + U$ ($\in M/U$) mellékosztály, mint halmaz, benne van egy olyan $\tilde{r} + \tilde{U}$ ($\in \tilde{M}/\tilde{U}$) mellékosztályban, amely tartalmaz M -beli elemet. Másrészt $\tilde{U}$ nyílt, M pedig $\tilde{M}$ -nak sűrű részhalmaza, ezért minden $\tilde{r} + \tilde{U}$ mellékosztály tartalmaz egy $r + U$ mellékosztályt. Ha viszont $r + U, s + U \in \tilde{r} + \tilde{U}$, akkor $r + \tilde{U} = s + \tilde{U}$ és $r - s \in \tilde{U} \cap M = U$, tehát $r + U = s + U$. Így minden $\tilde{r} + \tilde{U}$ mellékosztály egy és csakis egy $r + U$ mellékosztályt tartalmaz, tehát valóban $\tilde{M}/\tilde{U} \cong M/U$.]

4, 15. állítás. Legyen M lineárisan kompakt (R, S) -modulus a τ topológiában. Létezik olyan $\tau^*(\cong \tau)$ topológia, amelyben M lineárisan kompakt, és M -nek minden $\tau'(\cong \tau)$ lineárisan kompakt topológiájára $\tau' \leq \tau^*$ érvényes. M -nek τ -zárt kétoldali részmodulusai τ^* -zártak is. A τ^* topológiát jellemzi az a tulajdonság, hogy benne minden olyan zárt kétoldali részmodulusokból álló A filter, amelyre $\downarrow A = 0$, 0-hoz konvergál, vagyis $\lim A = 0$.

Legyen U M nyílt kétoldali részmodulusainak a halmaza a τ topológiában. Ha $U \in U$ és $x \notin U$, akkor a Kuratowski—Zorn lemma szerint van olyan maximális U^* kétoldali részmodulus, amely tartalmazza U -t, de nem tartalmazza x -et. Jelölje (x) az összes x -et tartalmazó kétoldali részmodulus metszetét. Ha B egy U^* -ot valódi módon tartalmazó kétoldali részmodulus, akkor $(x) + U^* \subseteq B$. Ezért $(x) + U^*$ minimális U^* -ot valódi módon tartalmazó kétoldali részmodulus. Alkossuk meg az összes U^* által generált U^* filtert. Mivel minden $U \in U$ bizonyos $U^*(\in U^*)$ -ok metszete, azért U bázisfilter volta miatt $\downarrow U^* = 0$. Válasszuk U^* -ot M -ben a τ^* topológia bázisfilterének. Világos, hogy M ebben a topológiában lineárisan topológikus. Az is világos, hogy τ^* τ -nál durvább topológia. Ha C M -nek τ -zárt kétoldali részmodulusa, akkor könnyű látni, hogy C előállítható U -beli részmodulusok metszete-ként. Ugyanis ha $x \notin C$, akkor az M tér regularitása miatt van olyan $U \in U$ részmodulus, hogy $x \notin C + U$. Következésképp $C = \bigcap_{U \in U} (C + U)$. Mivel U -val együtt $C + U$ is nyílt kétoldali részmodulus, azért $C + U \in U$ és C valóban előáll a kívánt metszet-ként. Mivel minden U -beli részmodulus előáll U^* -beli részmodulusok metszete-ként, azért C is előáll U^* -beli részmodulusok metszete-ként. Ebből következik, hogy C a τ^* topológiában is zárt. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy egy F filterre, amely zárt részmodulusok szerinti mellékosztályokból áll, $\downarrow F$ mind a τ , mind a τ^* topológiában ugyanazt jelenti, ezért M a τ^* topológiában is lineárisan kompakt.

Most kimutatjuk, hogy bármely A zárt kétoldali részmodulusból álló filterre a τ^* topológiában $\downarrow A = 0$ -ból $\lim A = 0$ következik. Legyen U^* az U^* bázisfilternek egy eleme. Az előzőek alapján U^* előáll véges sok olyan U_i^* ($\in U^*$) részmodulus metszete-ként, amelyekhez egyetlen minimális, őket tartalmazó C_i kétoldali részmodulus tartozik. Tekintsük az $\bigcap_{A \in A} (A + U_i^*)$ metszetet. Ha $x \in \bigcap_{A \in A} (A + U_i^*)$, akkor x eleme egy $u_i + A$ ($u_i \in U_i^*$) mellékosztálynak. Mivel $x + A = u_i + A$, és így

$(u_i + A) \cap U_i^* = (x + A) \cap U_i^*$, azért

$$(x + A) \cap U_i^* = (u_i + A) \cap U_i^* = u_i + (A + U_i^*)$$

érvényes. Így $\mathbf{D} = \{(x + A) \cap U_i^*\}_{A \in \mathbf{A}}$ U_i^* -ban zárt kétoldali részmodulusok szerinti mellékosztályokból álló filter. Minthogy U_i^* nyílt és így zárt is, azért a 4, 5. állítás szerint lineárisan kompakt, tehát van olyan $u_0 \in U_i^*$ elem, amelyre $u_0 \in \mathbf{D} = \bigcap_{A \in \mathbf{A}} (x + A) \cap U_i^*$. Ebből $u_0 \in x + A$ következik minden $A \in \mathbf{A}$ -ra, azaz $x - u_0 \in \bigcap_{A \in \mathbf{A}} A = 0$, és így $x \in U_i^*$. Tehát érvényes a $\bigcap_{A \in \mathbf{A}} (A + U_i^*) \subseteq U_i^*$ tartalmazás. Másrészt világos, hogy érvényes a fordított irányú tartalmazás is, ezért $\bigcap_{A \in \mathbf{A}} (A + U_i^*) = U_i^*$.

Ha minden $A \in \mathbf{A}$ -ra $A + U_i^* \neq U_i^*$ állna fenn, akkor ebből $C_i \subseteq \bigcap_{A \in \mathbf{A}} (A + U_i^*) = U_i^* \subset C_i$ következne, ami ellentmondás. Ezért valamilyen A -ra érvényes $A + U_i^* = U_i^*$, azaz $A \subseteq U_i^*$. Válasszuk ezután $A_0 (\in \mathbf{A})$ -t úgy, hogy A_0 legyen benne minden U_i^* -hoz tartozó A -ban. Az U_i^* -ok véges száma miatt ilyen A_0 létezik. Ekkor fennáll $A_0 \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i^* = U^*$, tehát valóban $\lim \mathbf{A} = 0$.

Legyen most τ' a τ -nál durvább lineárisan kompakt topológia, és U' τ' -nek egy részmodulusokból álló bázisfiltere. U' elemei nyilván τ -zártak is, és így az előzőek szerint τ^* -zártak is. Ezért $\downarrow U' = 0$ -ból a τ^* -topológiában $\lim U' = 0$ következik, azaz $\tau' \leq \tau^*$.

Legyen τ_1 olyan τ -nál durvább lineárisan kompakt topológia, amelyben minden A zárt kétoldali részmodulusokból álló filter esetén $\downarrow A = 0$ -ból $\lim A = 0$ következik. Ha U^* jelöli a τ^* topológiának egy kétoldali részmodulusokból álló bázisfilterét, akkor ennek elemei nyilván τ_1 -zártak, és $\downarrow U^* = 0$ miatt τ_1 -ben $\lim U^* = 0$ érvényes, vagyis $\tau^* \leq \tau_1$. $\square$

4, 16. állítás. Legyen N az M lineárisan kompakt (R, S) -modulusnak zárt kétoldali részmodulusa. M legdurvább lineárisan kompakt topológiája N -ben legdurvább lineárisan kompakt topológiát indukál.

Ha ugyanis $\mathbf{A}$ olyan zárt kétoldali részmodulusokból álló filter, amelyre érvényes $\downarrow \mathbf{A} = 0$, akkor M legdurvább topológiájában $\lim \mathbf{A} = 0$, és így az indukált topológiában is hasonló igaz. Ezért a 4, 15. állítás szerint ez legdurvább lineárisan kompakt topológia. $\square$

4, 17. állítás. Legyen φ az M lineárisan kompakt (R, S) -modulusnak az N lineárisan kompakt (R, S) -modulusba való folytonos homomorfizmusa. Tegyük fel, hogy N -ben a topológia a legdurvább lineárisan kompakt topológia. φ M legdurvább τ^* lineárisan kompakt topológiájára nézve is folytonos.

A 4, 16. állítás szerint $\text{Im } \varphi$ -ben a topológia a legdurvább lineárisan kompakt topológia. Elegendő azt kimutatnunk, hogy ha $V \subseteq \text{Im } \varphi$ nyílt kétoldali részmodulus, akkor $U = \varphi^{-1}(V)$ is nyílt M -ben a τ^* topológia szerint.

Világos, hogy U τ -nyílt kétoldali részmodulus. A 4, 15. állítás szerint U τ^* -zárt is. Mivel algebrai értelemben érvényes az $M/U \cong \text{Im } \varphi/V$ izomorfia és V a feltétel szerint véges sok olyan $V_i \subseteq \text{Im } \varphi$ nyílt kétoldali részmodulus metszete, amelyekhez van minimális őket tartalmazó kétoldali részmodulus, azért hasonló igaz U -ra is, következésképp U τ^* -nyílt. $\square$

Az alábbi definíció és a következő tételek szintén LEPTIN [18] és [19] dolgozata alapján jöttek létre. Igen fontosnak bizonyul a továbbiakban a következő

4, 18. definíció. Az $M(R, S)$ -modulust szűkebb értelemben lineárisan kompaktnak nevezzük, ha M lineárisan kompakt és minden nyílt kétoldali részmodulusához létezik minimális, őt valódi módon tartalmazó kétoldali részmodulusa.

Vizsgálatainkban a szűkebb értelemben lineárisan kompakt modulusoknak két speciális esete fog szerepelni. Az egyik az $S = \emptyset$ eset, ekkor a LEPTIN által bevezetett és vizsgált szűkebb értelemben lineárisan kompakt modulusokat kapjuk. Ezeket a modulusokat L -kompakt modulusoknak fogjuk nevezni. A másik fontos eset az $S = R$ esethez tartozik; ebben az esetben röviden K -kompakt modulusokról fogunk beszélni.

Egy R gyűrűt L -kompaktnak, illetve K -kompaktnak nevezünk, ha mint R -modulus, illetve (R, R) -modulus L -kompakt, illetve K -kompakt.

A szűkebb értelemben lineárisan kompakt (R, S) -modulusok többféleképpen jellemezhetők. Látni fogjuk, hogy egy szűkebb értelemben lineárisan kompakt modulusban a topológia mindig a legdurvább. Nem igaz azonban a megfordítás, vagyis egy lineárisan kompakt modulus a legdurvább lineárisan kompakt topológiában nem szűkséggéppen szűkebb értelemben lineárisan kompakt. (Erre vonatkozóan LEPTIN [18] 248. oldalára utalunk.)

4, 19. állítás. Egy $M(R, S)$ -modulusra a következő állítások ekvivalensek:

- (I) M szűkebb értelemben lineárisan kompakt;
- (II) M topológiája teljes és kielégíti az alábbi feltételek valamelyikét:
 - (i) M -nek bármely olyan φ folytonos homomorfizmusa, amelyre $\text{Im } \varphi$ lineárisan topológikus, nyílt;
 - (ii) M -nek bármely olyan φ folytonos homomorfizmusa, amelyre $\text{Im } \varphi$ lineárisan topológikus, olyan, hogy $\text{Im } \varphi$ -ben a topológia a legdurvább lineáris topológia;
 - (iii) M -nek bármely nyílt U kétoldali részmodulusa szerinti faktormodulusában teljesül a kétoldali részmodulusok minimumfeltétele;
- (III) M olyan $[M_\alpha, \pi_\beta]$ rendszer inverz-limesze, amelyben az M_α -k diszkrét és eleget tesznek a kétoldali részmodulusok minimumfeltételének.

Először kimutatjuk, hogy az (I) feltételből következik a (II) feltétel (i) pontja. A 4, 3. állítás alapján világos, hogy M teljes. Tekintsük M -nek egy φ folytonos homomorfizmusát és tegyük fel, hogy $\text{Im } \varphi$ lineárisan topológikus. Azt kell kimutatnunk, hogy bármely $U \subseteq M$ nyílt kétoldali részmodulus $U' = \varphi(U)$ képe nyílt kétoldali részmodulus. Az világos, hogy $U' \text{ Im } \varphi$ -nek kétoldali részmodulusa. Mivel $\text{Im } \varphi$ topológiája lineáris, azért a 4, 7. állítás következtében $\text{Im } \varphi$ lineárisan kompakt. Minthogy U' a 4, 7. állítás szerint szintén lineárisan kompakt, ezért a 4, 6. állítás miatt U' zárt. Tekintsük ezután az $N = M/U$ és $N' = \text{Im } \varphi/U'$ faktormodulusokat. Minthogy $U' = \varphi(U + \text{Ker } \varphi)$, azért feltehető, hogy $\text{Ker } \varphi \subseteq U$. Ezért φ N -nek N' -re való folytonos izomorfizmusát indukálja. U nyílt lévén N diszkrét és M szűkebb értelemben vett lineáris kompaktsága miatt N -nek bármely kétoldali részmodulusához létezik minimális őt tartalmazó kétoldali részmodulus. Az előbbi izomorfia miatt hasonló állítás érvényes N' -ben is.

A 4, 10. állítás szerint N -nek B talpa véges sok minimális kétoldali részmodulus direkt összege. Ezért N' -nek B' talpa szintén ilyen. Így B' -ben teljesül a kétoldali részmodulusok minimumfeltétele. Ennek folytán B' -ben, mint N' alterében, a topológia a 4, 4. állítás következtében diszkrét. Következésképp 0 nyílt részmodulus B' -ben. Ezért létezik N' -nek olyan A' nyílt kétoldali részmodulusa, amelyre fennáll $A' \cap B' = 0$. Az állítás bizonyításához elegendő kimutatnunk, hogy $A' = 0$, mert ekkor N' diszkrét és így U' nyílt $\text{Im } \varphi$ -ben. Tegyük fel az ellenkezőjét, azaz legyen $A' \neq 0$. A Kuratowski—Zorn lemma alkalmazásával válasszunk A' -höz olyan C' kétoldali részmodulust N' -ben, amely maximális az $A' \cap C' = 0$ tulajdonságra nézve. Az előző bekezdés vége szerint C' -höz létezik olyan D' kétoldali részmodulus, amely minimális a C' -t tartalmazó kétoldali részmodulusok között. C' választása miatt fennáll $A' \cap D' \neq 0$. Mivel érvényes az

$$A' \cap D' = A' \cap D' / A' \cap C' \cong \{A' \cap D', C'\} / C' \cong D' / C'$$

izomorfia és D' / C' minimális kétoldali részmodulus N' / C' -ben, azért $A' \cap D'$ is minimális kétoldali részmodulus N' -ben. Ezért fennáll $0 \neq A' \cap D' \subseteq B$, amiből viszont $A' \cap B' \neq 0$ következik, ellentmondásban A' választásával.

Most kimutatjuk, hogy az (i) feltételből következik az (ii) feltétel teljesülése. Legyen $\text{Im } \varphi$ -ben a topológia τ és legyen $\tau_1 \cong \tau$ $\text{Im } \varphi$ -nek egy lineáris topológiája. Ha V τ_1 -nyílt részmodulus, akkor $\tau_1 \cong \tau$ miatt τ -nyílt is, és φ folytonossága miatt $\varphi^{-1}(V)$ nyílt M -ben. φ tehát a τ_1 topológiával ellátott $\text{Im } \varphi$ -re való folytonos homomorfizmus. Ezért az (i) feltétel szerint φ nyílt. Ha most U $\text{Im } \varphi$ -nek egy tetszőleges τ -nyílt részmodulusa, akkor $\varphi^{-1}(U)$ is nyílt és létezik olyan U_1 τ_1 -nyílt kétoldali részmodulus, hogy fennáll $U \supseteq U_1$. Így tehát $\tau \cong \tau_1$ is érvényes.

Az (ii) feltételből következik az (iii) feltétel. Tekintsük ugyanis M/U -ban kétoldali részmodulusoknak egy $V_1 \supset V_2 \supset \dots$ leszálló láncát, amelyre $\bigcap V_i = 0$. $V = \{V_i\}$ M/U -ban egy lineáris τ_1 topológiát definiál. Tekintsük ezután M/U -ban az M által indukált τ topológiát. Ez diszkrét és az (ii) feltétel szerint a legdurvább lineáris topológia. Ezért fennáll $\tau_1 \leq \tau$, vagyis τ_1 is diszkrét. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha valamelyik véges k indexre $V_k = 0$. Ezzel kimutattuk a minimumfeltétel teljesülését.

Teljesüljön az (iii) feltétel, és jelölje $U = \{U\}$ M -nek egy kétoldali részmodulusokból álló bázisfilterét. Mivel M teljes, azért a 4, 13. állítás szerint M előállítható az M/U ($U \in U$) faktormodulusok által alkotott inverz-rendszer limeszeként. Az triviális, hogy minden M/U faktormodulus diszkrét és eleget tesz a kétoldali részmodulusok minimumfeltételének.

Ha az M modulus eleget tesz a (III) feltételnek, azaz $M = \lim [M_\alpha, \pi_\beta^\alpha]$, akkor, mivel a 4, 4. állítás szerint minden M_α lineárisan kompakt, alkalmazható a 4, 12. állítás, és így M is lineárisan kompakt. Mivel minden M_α -nak van minimális kétoldali részmodulusa, azért világos, hogy M szűkebb értelemben lineárisan kompakt. []

4, 20. állítás. Egy M szűkebb értelemben lineárisan kompakt (R, S) -modulus minden G zárt kétoldali részmodulusa is szűkebb értelemben lineárisan kompakt.

G -nek minden V nyílt kétoldali részmodulusa előállítható $G \cap U$ alakban, ahol U M -nek nyílt kétoldali részmodulusa. A

$$G/V \cong \{G, U\}/U \subseteq M/U$$

izomorfia miatt G/V -ben teljesül a kétoldali részmodulusok minimumfeltétele. Másrészt G a 4, 5. állítás szerint lineárisan kompakt és így a 4, 3. állítás szerint teljes is. Ezért G a 4, 19. állítás (II) (iii) feltétele szerint valóban szűkebb értelemben lineárisan kompakt. $\square$

4, 21. állítás. Jelölje φ az M szűkebb értelemben lineárisan kompakt (R, S) -modulusnak az N lineárisan topológikus (R, S) -modulusba való folytonos homomorfizmusát. Ekkor $\text{Im } \varphi$ is szűkebb értelemben lineárisan kompakt.

4, 7. állítás szerint $\text{Im } \varphi$ lineárisan kompakt. Legyen $V \subseteq \text{Im } \varphi$ nyílt kétoldali részmodulus. φ folytonossága miatt $U = \varphi^{-1}(V)$ nyílt részmodulus, ezért M szűkebb értelemben vett lineáris kompaktsága miatt létezik minimális U -t tartalmazó kétoldali részmodulus. Az $M/U \cong \text{Im } \varphi/V$ izomorfia miatt hasonló igaz V -re is, így $\text{Im } \varphi$ valóban szűkebb értelemben lineárisan kompakt. $\square$

4, 22. állítás. Szűkebb értelmezésben lineárisan kompakt (R, S) -modulusok komplett direkt összege is szűkebb értelemben lineárisan kompakt.

A 4, 11. állítás figyelembe vételével az állítás triviális.

4, 23. állítás. Legyen M lineárisan topológikus (R, S) -modulus és N zárt kétoldali részmodulusa. Ha N és M/N az M által indukált topológiában szűkebb értelemben lineárisan kompakt, akkor M is szűkebb értelemben lineárisan kompakt.

A 4, 9. állítás alapján elegendő kimutatni, hogy M -nek bármely U nyílt kétoldali részmodulusához van minimális U -t tartalmazó kétoldali részmodulus. Amennyiben $N \subseteq U$, akkor M/N szűkebb értelemben vett lineáris kompaktsága miatt világos, hogy U -hoz van ilyen kétoldali részmodulus. Ha $N \not\subseteq U$, akkor $N \cap U$ N -ben nyílt részmodulus és így a feltételek szerint van minimális, őt tartalmazó $C \subseteq N$ kétoldali részmodulus. Tekintsük a $\{C, U\} \subseteq M$ részmodulust. Ez $C/N \cong U \cong \{C, U\}/U$ miatt nyilván U -tól különböző, minimális U -t tartalmazó részmodulus. $\square$

Legyen az M lineárisan topológikus (R, S) -modulus, mint R -modulus, hű. Ez esetben R elemeit M folytonos endomorfizmusainak tekinthetjük. Ekkor az R gyűrűbe bevezethetünk egy lineáris topológiát, pontosabban olyan topológiát, amelynek van balideálokból álló bázisfiltere, a következőképpen. Legyen $U = \{U\}$ M -nek nyílt kétoldali részmodulusaiból álló bázisfiltere és $x_1, \dots, x_r \in M$ véges sok elem. Könnyű látni, hogy az

$$L(x_1, \dots, x_r; U) = \{q \in R \mid qx_1, \dots, qx_r \in U\} \quad (U \in U)$$

halmaz R -nek balideálja. Ha $y_1, \dots, y_s \in M$ további véges sok elem és $V \in U$, akkor nyilvánvalóan fennáll az

$$L(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s; U \cap V) \subseteq L(x_1, \dots, x_r; U) \cap L(y_1, \dots, y_s; V)$$

összefüggés. Ezért ezek a balideálok egy L filtert alkotnak. Válasszunk L -et R -ben bázisfilternek. Kimutatjuk, hogy ezáltal R lineárisan topológikus gyűrű lesz. Ha ugyanis $\xi \in \bigcap_{L \in L} L$, akkor minden $x \in M$ -re $\xi x \in \bigcap_{U \in U} U = 0$, amiből $\bigcap_{L \in L} L = 0$ következik, tehát a bevezetett topológia Hausdorff-féle lesz. Mivel L balideálokból áll, azért a műveletek folytonosságához elegendő a jobbszorítás folytonosságát kimutatni, azaz azt, hogy bármely $L = L(x_1, \dots, x_r; U)$ balideálhoz és $q \in R$ elemhez van olyan

$L_1 \in L$ balideál, amelyre $L_1 \varrho \subseteq L$ teljesül. Válasszuk L_1 -nek $L(\varrho x_1, \dots, \varrho x_r; U)$ -t, most bármely $\xi \in L_1$ elemre $\xi \varrho x_i \in U$ ($i = 1, \dots, r$), tehát $L_1 \varrho \subseteq L$ és így R topológikusan gyűrű.

Ennek a §-nak a hátralevő részében tegyük fel, hogy az M (R, S)-modulus, mint R -modulus hű és lineárisan topológikus.

4, 24. definíció. M -nek egy ϱ folytonos endomorfizmusát LEPTIN nyomán *hiperfolytonosnak* nevezzük, ha M -nek minden zárt rész-balmodulusát önmagába képezi le.

Világos, hogy R elemei hiperfolytonosak. M -nek összes S elemeivel felcserélhető hiperfolytonos endomorfizmusai egy H gyűrűt alkotnak és H R -et részgyűrűként tartalmazza. A továbbiakban feltételezzük, hogy H -t M lineáris topológiája segítségével a fent leírt módon topologizáltuk. Láttuk, hogy ezáltal H lineárisan topológikus gyűrű lett.

4, 25. állítás. Ha az M (R, S)-modulus, mint R -modulus lineárisan kompakt, akkor a hiperfolytonos endomorfizmusok H gyűrűje is lineárisan kompakt.

Először azt mutatjuk ki, hogy H teljes. Evégből tekintsük H -nak egy $C = \{\alpha_\mu + L_\mu\}$ Cauchy-filterét. Defináljuk M -nek egy önmagába történő leképezését a következőképpen. Ha $x \in M$ tetszőleges elem, akkor ehhez tartoznak bizonyos $\alpha + L(x, U) \in C$ mellékosztályok, és képezzük az $\alpha x + U$ M -beli mellékosztályokat. Ezek egy C^* Cauchy-filtert alkotnak, és így M teljessége miatt létezik olyan $y \in M$ elem, amelyre $y \in \downarrow C^*$. Világos, hogy ilyen módon minden x -hez egyetlen y -t rendeltünk hozzá. Jelöljük M -nek ezt az önmagába történő leképezését γ -val.

Kimutatjuk, hogy γ M -nek endomorfizmusa. Minthogy érvényes

$$L(x, y; U) \subseteq L(x; U) \cap L(y; U) \subseteq L(x - y; U),$$

azért megfelelő C -beli mellékosztályokon fennáll

$$\alpha + L(x, y; U) \subseteq (\alpha_1 + L(x; U)) \cap (\alpha_2 + L(y; U)) \subseteq \alpha_3 + L(x - y; U).$$

Ezekből a C^* filter elemeire

$$\alpha x + U = \alpha_1 x + U, \quad \alpha y + U = \alpha_2 y + U, \quad \alpha(x - y) + U = \alpha_3(x - y) + U$$

következik. Ezért érvényes

$$\alpha_3(x - y) + U = \alpha(x - y) + U = \alpha x - \alpha y + U = (\alpha_1 x + U) - (\alpha_2 y + U).$$

Így γ definíciója miatt fennáll

$$\gamma(x - y) = \gamma x - \gamma y,$$

tehát γ endomorfizmus.

Ha U M -nek nyílt részmodulusa, akkor tetszőleges $x \in U$ elemre és $\alpha + L(x, U) \in C$ mellékosztály esetén érvényes $\gamma x \in \alpha x + U \subseteq U$, tehát fennáll $\gamma U \subseteq U$. Mivel bármely A zárt kétoldali részmodulus előállítható nyílt részmodulusok metszeteként, azért $\gamma A \subseteq A$ is érvényes.

Legyen U nyílt részmodulus és $\sigma \in S$ tetszőleges elem. Mivel σ folytonos jobboperátor, azért van olyan V nyílt részmodulus, hogy $V\sigma \subseteq U$ teljesül. Tekintsük M -nek egy tetszőleges x elemét,¹ és legyen α közös elem az $\alpha_1 + L(x; V)$, $\alpha_2 +$

$+L(x\sigma; U) \in \mathbf{C}$ mellékosztályokban. Ekkor γ definíciója miatt $\gamma x \in \alpha x + V$, továbbá fennáll

$$(\gamma x)\sigma \in (\alpha x + V)\sigma \subseteq (\alpha x)\sigma + U = \alpha(x\sigma) + U;$$

másrészt érvényes

$$\gamma(x\sigma) \in \alpha(x\sigma) + U.$$

Minthogy ezek az összefüggések minden U nyílt részmodulusra igazak, azért szükségképpen

$$\gamma(x\sigma) = (\gamma x)\sigma$$

tehát γ bármely σ -val felcserélhető. Így tehát γ , az előbbieket figyelembe véve, eleme H -nak. Minthogy pedig $\gamma \in \downarrow \mathbf{C}$, azért H teljes.

A bizonyításban eddig csupán azt használtuk ki M -ről, hogy teljes.

H teljessége miatt alkalmazhatjuk a 4, 13. állítást, amely szerint H izomorf nyílt balideáljai szerinti faktormodulusainak inverz-limeszével. A 4, 12. állítás szerint tehát elegendő kimutatni, hogy bármilyen $L \in \mathbf{L}$ nyílt balideál esetén H/L lineárisan kompakt. Legyen evégből $L(x_1, \dots, x_r; U) \in \mathbf{L}$, és jelöljük M -nek U szerinti faktormodulusának r példányban vett direkt összegét M_r -rel. A

$$\varphi(\xi) = (\xi x_1 + U, \dots, \xi x_r + U) \quad (\xi \in H)$$

leképezés H -nak, mint H -modulusnak M_r -be való homomorfizmusa. Minthogy $\varphi(\xi) = 0$ azt jelenti, hogy $\xi x_i \in U$ ($i = 1, \dots, r$), azért $\text{Ker } \varphi = L(x_1, \dots, x_r; U)$ így H/L , mint H -modulus izomorf M_r -nek egy részmodulusával. Ez utóbbi viszon; lineárisan kompakt. $\square$

Ezeknél a meggondolásoknál már lényegesen kihasználtuk azt a körülményt, hogy M , mint H -modulus lineárisan kompakt, és nem lett volna elegendő az a feltevés, hogy M , mint (H, S) -modulus lineárisan kompakt. Teljesen hasonlóan látható be az is, hogy egy M lineárisan kompakt R -modulusnak teljes endomorfizmus gyűrűje is lineárisan kompakt.

4, 26. állítás. *Ha M L -kompakt R -modulus, akkor hiperfolytonos endomorfizmusainak H gyűrűje is L -kompakt.*

A 4, 25. állítás szerint H lineárisan kompakt. Ezért elegendő azt kimutatni, hogy H bármely L nyílt balideálja esetén H/L -nek van minimális részmodulusa. Megtartva az előző jelöléseket a 4, 21. és 4, 22. állításból következik, hogy M_r és annak H/L -lél izomorf részmodulusa is L -kompakt. H/L diszkrét lévén, az L -kompaktságból következik a minimális részmodulus létezése. $\square$

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] G. BIRKHOFF: *Lattice theory*, New York. 1948.
- [2] N. BOURBAKI: *Общая топология, основные структуры*, Москва, 1958.
- [3] C. FAITH—Y. UTMU: On a new proof of Litoff's theorem, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **14** (1963), 369—371.
- [4] FUCHS L.: *Abelian groups*, Budapest, 1958.
- [5] FUCHS L.—SZELE T.: Contribution to the theory of semi-simple rings, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952), 235—239.
- [6] O. GOLDMAN: A characterization of semi-simple rings with descending chain conditions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 1021—1027.

- [7] N. JACOBSON: The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, *Amer. Journ. Math.*, **67** (1945), 300—230.
- [8] N. JACOBSON: *Structure of rings*, Providence, 1956.
- [9] J. P. JANS: *Rings and homology*, New York, 1964.
- [10] I. KAPLANSKY: Topological rings, *Amer. Journ. Math.*, **69** (1947), 153—183.
- [11] I. KAPLANSKY: Locally compact rings I., *Amer. Journ. Math.*, **70** (1948), 447—459.
- [12] I. KAPLANSKY: Locally compact rings II., *Amer. Journ. Math.*, **73** (1951), 20—24.
- [13] I. KAPLANSKY: Locally compact rings III., *Amer. Journ. Math.*, **74** (1952), 929—935.
- [14] KERTÉSZ A.: Beiträge zur Theorie der Operatormoduln, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), 235—257.
- [15] KERTÉSZ A.: Vizsgálatok az operátormodulusok elméletében, III., *M.T.A. III. Oszt. Közl.*, **8** (1958) 105—120.
- [16] A. KUROSCH: Zur Zerlegung unendlicher Gruppen, *Math. Annalen*, **106** (1932), 107—113.
- [17] S. LEFSCHETZ: *Algebraic topology*, New York, 1942.
- [18] H. LEPTIN: Linear kompakte Moduln und Ringe, *Math. Zeitschr.*, **62** (1955), 241—267.
- [19] H. LEPTIN: Linear kompakte Moduln und Ringe II., *Math. Zeitschr.*, **66** (1957), 289—327.
- [20] Л. С. ПОНТЯГИН: Непрерывные группы, Москва, 1954.
- [21] RÉDEI L.: *Algebra I.*, Budapest, 1954.
- [22] E. SĄSIADA: Solution of the problem of existence of simple radical rings., *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **9** (1961), 257.
- [23] L. A. SKORNJAKOV: Einfache lokal bikompakte Ringe, *Math. Zeitschr.*, **87** (1965), 241—251.
- [24] SZÁSZ F.: Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptideale II., *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), 417—439.
- [25] SZÁSZ F.: A főbbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrűk, *M.T.A. III. Oszt. Közl.*, **11** (1961), 135—177.
- [26] SZÁSZ F.: A topológikus algebrákról és gyűrűkről I., *Mat. Lapok* **13** (1962), 256—278.
- [27] SZÁSZ F.: A topológikus algebrákról és gyűrűkről II., *Mat. Lapok* **14** (1963), 74—87.
- [28] SZÁSZ G.: *Bevezetés a hálóméletbe*, Budapest, 1959.
- [29] SZELE T.: Nilpotent Artinian rings. *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1955), 71—78.
- [30] B. L. VAN DER WAERDEN: *Algebra II.*, Springer-Verlag 1959.
- [31] WIEGANDT R.: Über halbeinfache linear kompakte Ringe, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* **1** (1966), (megjelenés alatt).
- [32] WIEGANDT R.: Über transfinit nilpotente Ringe, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **17** (1966) (megjelenés alatt).
- [33] WIEGANDT R.: Über linear kompakte reguläre Ringe, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **13** (1965), 445—446.
- [34] WIEGANDT R.: Über lokal linear kompakte Ringe, *Acta Sci. Math.* (megjelenés alatt).
- [35] D. ZELINSKY: Rings with ideal nuclei, *Duke Math. Journ.* **18** (1951), 431—442.
- [36] D. ZELINSKY: Linearly compact modules and rings, *Amer. Journ. Math.*, **75** (1953), 79—90.

(Beérkezett: 1966. I. 17)