EGY MEGJEGYZÉS H. DELANGE „SUR UN THEOREME DE RÉNYI" CÍMŰ DOLGOZATÁHOZ

Írta: KÁTAI IMRE

1. Bevezetés

Jelölje $\omega(n)$ az n természetes szám különböző, $\Omega(n)$ az n összes prímosztói számát, azaz ha n prímtényezős felbontása $n=p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$, akkor $\Omega(n)=\alpha_1+\dots+\alpha_k$, $\omega(n)=k$.

Világos, hogy $\Omega(n)\geqq\omega(n)$ és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha, n négyzetmentes.

Legyen q nemnegatív egész,

$$\lambda_q(n)=\begin{cases}1, & \text{ha } \Omega(n)-\omega(n)=q,\\ 0 & \text{egyébként,}\end{cases}$$

$$v_q(x)=\sum_{n\leqq x}\lambda_q(n).$$

RÉNYI A. kimutatta [1], hogy

$$\frac{v_q(x)}{x}\to d_q, \qquad (x\to\infty).$$

A $q=0$ esetre vonatkozóan LANDAU megmutatta [2], hogy

$$\sum_{n\leqq x}\lambda_0(n)=d_0x+o(x^{1/2}) \tag{1}$$

fennállása a prímszámtételből következik, pontosan abból a tényből, hogy a *Riemann*-féle $\zeta(s)$ függvény a $\operatorname{Re}s=1$ egyenesen sehol sem vesz fel zérus értéket. H. DELANGE címben idézett [3] dolgozatában megmutatta, hogy ugyanebből a tényből IKEHARA *Tauber*-tételének általánosításával következik a

$$v_q(x)=d_qx+o(x^{1/2}(\log\log x)^q) \tag{2}$$

egyenlőség is.

Jelen dolgozatban megmutatjuk, hogy (1)-ből rendkívül egyszerűen, minden további *Tauber*-típusú tétel igénybevétele nélkül következik (2). Továbbá megmutatjuk, hogy a jól ismert

$$v_0(x)=d_0x+O(x^{1/2}(\log x)^{-1})$$

egyenlőség felhasználásával

$$v_q(x)=d_qx+O(x^{1/2}(\log\log x)^{q-1}) \tag{3}$$

minden $q\geqq 1$ esetén.

A bizonyítási gondolatmenetet finomítva adódna, hogy minden $n \geqq 0$ egészre

$$(4) \qquad v_q(x) = d_q x + x^{1/2}(\log\log x)^{q-1} P_{n,q}\left(\frac{1}{\log\log x}\right) + O\left(x^{1/2}(\log\log x)^{q-n-2}\right),$$

ahol $P_{n,q}(x)$ alkalmas n-edfokú polinom. Ezt az állítást azonban nem fogjuk bizonyítani.

2. A (2) és (3) formulák bizonyítása

Jelölje $\mathfrak{A}_q$ azon k természetes számok halmazát, amelyek törzstényezős előállítása $k = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ alakú, ahol $\alpha_i \geqq 2$ $(i = 1, \dots, r)$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_r - r = q$. Világos, hogy minden n természetes szám, amelyre $\lambda_q(n) = 1$, egyértelműen állítható elő $n = km$, $k \in \mathfrak{A}_q$, m négyzetmentes, $(k, m) = 1$ alakban. Ezért

$$(5) \qquad v_q(x) = \sum_{\substack{km \leqq x \\ k \in \mathfrak{A}_q \\ (k,m)=1}} |\mu(m)| = \sum_{\substack{k \leqq x \\ k \in \mathfrak{A}_q}} \sum_{\substack{m \leqq \frac{x}{k} \\ (k,m)=1}} |\mu(m)| = \sum_{\substack{k \leqq x \\ k \in \mathfrak{A}_q}} M\left(\frac{x}{k}, k\right),$$

bevezetve az

$$(6) \qquad M(y, k) = \sum_{\substack{m \leqq y \\ (m,k)=1}} |\mu(m)|,$$

jelöléseket.

A bizonyításhoz szükségünk lesz a következő segédtételekre.

1. LEMMA. *Ha* $k = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, *akkor*

$$M(y, k) = \sum_{v \leqq y} \lambda(v) M\left(\frac{y}{v}\right),$$

ahol v *az összes* $v = p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r}$, $\beta_1, \dots, \beta_k = 0, 1, \dots$ *típusú számokon fut végig, továbbá* $\lambda(v) = (-1)^{\beta_1 + \dots + \beta_r}$.

Bizonyítás. A lemma állítása legegyszerűbben talán a következő módon verifikálható.

Legyen χ_0 a mod k vett főkarakter, $L(s, \chi_0)$ a hozzátartozó *Dirichlet*-féle L-függvény, akkor

$$\sum_{(n,k)=1} \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \frac{L(s, \chi_0)}{L(2s, \chi_0)} = \prod_{p|k} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \left(\sum \frac{\lambda(v)}{v^s}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s}.$$

A fenti azonosságból közvetlenül látható a Lemma állítása.

2. LEMMA. *Jelölje* $\vartheta_m(x)$ *az* x*-et meg nem haladó, legfeljebb* m *különböző prímfaktort tartalmazó egészek számát, amelyben minden törzstényező legalább a második hatványon szerepel. Akkor*

$$\vartheta_m(x) = O\left(\frac{x^{1/2}}{\log x} (\log\log x)^{m-1}\right).$$

Bizonyítás.

$$\vartheta_1(x) = \sum_{\substack{p^\alpha \leqq x \\ \alpha \geqq 2}} 1 = \pi(\sqrt{x}) + \pi(\sqrt[3]{x}) + \ldots = O\left(\frac{x^{1/2}}{\log x}\right).$$

Így $m=1$-re az állítás igaz. Másrészt $m \geqq 2$ esetén, feltéve, hogy $(m-1)$-re érvényes az állítás, így

$$\vartheta_m(x) = O\left(\sum_{p^\alpha \leqq x^{1/m}} \vartheta_{m-1}\left(\frac{x}{p^\alpha}\right)\right) = O\left(\frac{x^{1/2}(\log\log x)^{m-2}}{\log x} \sum_{\substack{p^\alpha \leqq x^{1/m} \\ \alpha \geqq 2}} \frac{1}{p^{\alpha/2}}\right) =$$

$$= O\left(\frac{x^{1/2}(\log\log x)^{m-1}}{\log x}\right).$$

Vezessük be a

$$\Delta(x) = M(x) - d_0 x$$

jelölést. (5) és az 1. Lemma felhasználásával kapjuk a

$$v_q(x) = \sum_{kv \leqq x} \lambda(v) M\left(\frac{x}{kv}\right) = d_0 x \sum_{kv \leqq x} \frac{\lambda(v)}{kv} + \sum_{kv \leqq x} \lambda(v)\, \Delta\left(\frac{x}{kv}\right)$$

előállítást.

Legyen $d_0 \sum_{kv}^{\infty} \frac{\lambda(v)}{kv} = d_q$. Világos, hogy a baloldalon álló összeg konvergens.

Bebizonyítjuk, hogy

$$\text{(I)} \qquad \sum_{kv > x} \frac{1}{kv} = O\left(\frac{(\log\log x)^{q-1}}{x^{1/2}}\right),$$

továbbá azt, hogy a $\Delta(x) = o(x^{1/2})$, illetve a $\Delta(x) = O\left(\frac{x^{1/2}}{\log x}\right)$ ismert becslések felhasználásával

$$\text{(II)} \qquad \sum_{kv \leqq x} \left|\Delta\left(\frac{x}{kv}\right)\right| = o\left(x^{1/2}(\log\log x)^q\right), \quad \text{illetve} \quad = O\left(x^{1/2}(\log\log x)^{q-1}\right),$$

amiből (2), illetve (3) érvényessége következik.

Tekintsük először a rögzített $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ típusú k-kat, azaz azokat, amelyekre $k = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$; $\alpha_i \geqq 2$, $(i = 1, \ldots, r)$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = r + q$. Világos, hogy a különböző típusok száma véges. Másrészt rögzített típus esetén kv alakban egy szám legfeljebb egyféleképpen állítható elő, továbbá $r \leqq q$. Így

$$\sum_{kv > x} \frac{1}{kv} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{2^l x < kv \leqq 2^{l+1} x} \frac{1}{kv} < \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\vartheta_q(2^{l+1}x)}{2^l x} = O\left(\frac{1}{x^{1/2}} \frac{(\log\log x)^{q-1}}{\log x}\right),$$

s innen az (I) állítás következik.

Térjünk most rá a (II) állítás bizonyítására. Legyen $\varepsilon(x)$ pozitív, monoton-csökkenő, nullához tartó függvény, amelyre $|\Delta(x)| < \varepsilon(x) x^{1/2}$. (1) miatt ilyen $\varepsilon(x)$

létezik. Legyen továbbá $g(x)$ pozitív, monoton végtelenhez tartó függvény. Ekkoı

$$\sum_{kv \leqq \frac{x}{g(x)}} \left| \Delta\left(\frac{x}{kv}\right) \right| < \varepsilon(g(x)) x^{1/2} \sum_{kv \leqq x} \frac{1}{(kv)^{1/2}} < \varepsilon(g(x)) x^{1/2} O\left(\left\{\sum_{\substack{p^\alpha \leqq x \\ \alpha \geqq 2}} \frac{1}{p^{\alpha/2}}\right\}^q\right) =$$

$$= \varepsilon(g(x)) x^{1/2} O((\log\log x)^q),$$

továbbá

$$\sum_{\frac{x}{g(x)} \leqq kv < x} \left| \Delta\left(\frac{x}{kv}\right) \right| = (g(x))^{1/2} O\left(\sum_{\frac{x}{g(x)} < kv < x} 1\right) = g(x)^{1/2} O(\vartheta_q(x)) =$$

$$= O\left(\frac{(g(x))^{1/2} x^{1/2} (\log\log x)^{q-1}}{\log x}\right).$$

Fentiekből már következik, hogy

$$\nu_q(x) = d_q x + o(x^{1/2} (\log\log x)^q).$$

Felhasználva a pontosabb

$$\nu_0(x) = (M(x) =) d_0 x + O(x^{1/2}/\log x)$$

formulát, innen $\varepsilon(x) = \frac{1}{\log x}$, $g(x) = (\log x)^2$ választással a (II) állítás második része is következik.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] A. RÉNYI, On the density of certain sequences of integers, *Publications de Institut de Mathematiques de l'Academie Serbe des Sciences* **8** (1955), 157—162.
[2] E. LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Bd. II. XLIV, § 162.
[3] H. DELANGE, Sur un théorème de Rényi, *Acta Arithm.* **11** (1965), 241—252.

(Beérkezett: 1966. II. 1.)

A REMARK ON H. DELANGE'S PAPER „SUR UN THEOREME DE RÉNYI"

by

IMRE KÁTAI

Summary

Let $\Omega(n), \omega(n)$ defined by $\Omega(p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}) = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$, $\omega(p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}) = r$, let $q \geqq 0$ be any integer,

$$\lambda_q(n) = \begin{cases} 1, & \text{if } \Omega(n) - \omega(n) = q, \\ 0 & \text{another,} \end{cases}$$

$$\nu_q(x) = \sum_{n \leqq x} \lambda_q(n).$$

H. DELANGE proved in the paper [3], that the estimation

$$\nu_q(x) = d_q x + o(x^{1/2}(\log\log x)^q),$$

follows from the prime-number theorem. The proof is based on the use of IKEHARA's tauberian-theorem.

In the present paper we proved that this estimation follows very simply from the relation [2[

$$\nu_0(x) = d_0 x + o(x^{1/2}).$$

Further from the little stronger estimation

$$\nu(x) = d_0 x + O(x^{1/2}/\log x)$$

follows the estimation

$$\nu_q(x) = d_q x + O(x^{1/2}(\log\log x)^{q-1}).$$

With the refinement of proof we could prove, that

$$\nu_q(x) = d_q x + x^{1/2}(\log\log x)^{q-1} P_{n,q}\left(\frac{1}{\log\log x}\right) + O(x^{1/2}(\log\log x)^{q-n-2}),$$

where $P_{n,q}(x)$ is a suitable polynomial of degree n.