MEGJEGYZÉS G. WINTGEN EGY TÉTELÉHEZ

Írta: BOD PÉTER

Georg WINTGENtől származik a következő definíció [1]:

Adva van valamilyen programozási feladat megvalósítható megoldásainak a halmaza $L=\{\underline{x}|\underline{g}(\underline{x})\geqq\underline{o}\}$, valamint a célfüggvényeknek egy osztálya: $\mathfrak{Z}$. Tekintsük a következő típusú feladatot:

$$\underline{g}(\underline{x})\geqq\underline{o}$$

$$z(\underline{x})\to\max! \text{ (vagy min!)} \qquad [z(\underline{x})\in\mathfrak{Z}].$$

A feladatot a célfüggvények $\mathfrak{Z}$ osztályára nézve indifferensnek nevezzük akkor és csak akkor, ha létezik olyan $\underline{x}_0$ pont a megvalósítható megoldások halmazában, amelyre

$$z(\underline{x}_0)\geqq z(\underline{x}) \qquad (\text{illetve } z(\underline{x}_0)\leqq z(\underline{x}))$$

minden $\underline{x}\in L$ és $z(\underline{x})\in\mathfrak{Z}$-re.

WINTGEN bebizonyította a következő két tételt:

1. Ha $z_1(\underline{x}), z_2(\underline{x}), \ldots, z_k(\underline{x})$ véges sok, folytonos célfüggvény, amelyek mindegyike az L halmazon véges maximumot (minimumot) vesz fel és ha bármely két megvalósítható megoldásra áll, hogy

$$\underline{x}_1\in L;\ \underline{x}_2\in L \Rightarrow \underline{z}(\underline{x}_1)\cup\underline{z}(\underline{x}_2)\in\underline{z}(L)\ [\underline{z}(\underline{x}_1)\cap\underline{z}(\underline{x}_2)\in\underline{z}(L)]$$

— ahol általában $\underline{z}(\underline{x})=\begin{pmatrix} z_1(\underline{x})\\ z_2(\underline{x})\\ \vdots\\ z_k(\underline{x})\end{pmatrix}$ és $\underline{z}(L)$ a megvalósítható megoldások halmazának a $\underline{z}(\underline{x})$ vektor-vektor függvénnyel nyert képhalmaza és $\cup$, illetve $\cap$ az alábbi műveletek jele:

$$\underline{x}\cup\underline{y} = [\max(x_i, y_i)];\ \underline{x}\cap\underline{y} = [\min(x_i, y_i)]$$

— akkor a feladat indifferens a $z_1(\underline{x}), z_2(\underline{x}), \ldots, z_k(\underline{x})$ függvényekből nemnegatív lineáris kombináció révén képezhető célfüggvények osztályára nézve.

2. A

$$B\underline{x}\leqq\underline{b}$$

$$\underline{c}^*\underline{x}\to\min!$$

lineáris programozási feladat, amelyben B minden sora pontosan egyetlen pozitív elemet tartalmaz indifferens a nemnegatív együtthatójú lineáris függvények osztályára nézve.

Az alábbiakban szükséges és elégséges feltételt adunk arra vonatkozóan, hogy egy kanonikus alakban megadott lineáris programozási feladat indifferens legyen a nem negatív együtthatójú lineáris függvényeknek, mint minimalizálandó célfüggvényeknek az osztályára nézve.

Előre bocsátunk néhány fogalmat és feltételezést [2]:

Kanonikus alakúnak nevezzük a lineáris programozás általános feladatának alábbi megfogalmazását: meghatározandó azon $\underline{x}$ vektorok halmaza, amelyekre

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geqq \underline{o} \quad \text{(Az } A \text{ mátrix } (m \times n) \text{ típusú)}$$

és amelyekben a $\underline{c}^*\underline{x}$ lineáris függvény minimumát veszi fel. Feltételezzük, hogy a megvalósítható megoldások halmaza *egynél több elemet tartalmaz*, és a feltételrendszer *nem tartalmaz felesleges egyenleteket*, vagyis, hogy $m \leqq n$ és

$$Rang\,(A) = m.$$

Bázisnak nevezzük az A mátrix minden lineárisan független oszlop — m-esét. Legyen $A = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n]$. A $B = [\underline{a}_{i_1}, \underline{a}_{i_2}, \ldots, \underline{a}_{i_m}]$ mátrix oszlopvektorai bázist alkotnak, ha

$$Rang\,(B) = m.$$

Bázismegoldásnak mondjuk a feltételi egyenletrendszer azon megoldásait, amelyek a $\underline{b}$ vektort egy bázis oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként állítják elő, amelyekben tehát legalább $n - m$ zéruskomponens van (a nem bázisváltozók értéke zérus) és a bázisváltozókhoz tartozó oszlopvektorok az A mátrixban lineárisan függetlenek. Jelöljük $\underline{x}_B$-vel valamely B bázishoz tartozó bázisváltozók alkotta vektort, akkor

$$B\underline{x}_B = \underline{b} \quad \text{és} \quad \underline{x}_B = B^{-1}\underline{b}.$$

Valamely bázist *megvalósítható bázisnak* nevezzük, ha a hozzátartozó bázismegoldás nemnegatív. Végül egy bázis *degenerált*, ha a hozzátartozó bázismegoldásban van zérusértékű bázisváltozó is.

A lineáris programozás elméletéből ismert tény, hogy a megvalósítható bázismegoldások képe a megvalósítható megoldások L halmazának extremális pontjai és megfordítva, az L halmaz minden extremális pontjának koordinátáit egy megvalósítható bázismegoldás határozza meg.

TÉTEL: *Az*

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geqq \underline{o}$$

$$z(\underline{x}) \in \mathfrak{Z} \to \min! \qquad \mathfrak{Z} = \{\underline{c}^*\underline{x} \mid \underline{c}^* \geqq \underline{o}\}$$

lineáris programozási feladat indifferens minden nemnegatív együtthatójú lineáris függvényre akkor és — degenerációmentes esetben — csak akkor, ha az A mátrixnak van olyan B_0 megvalósítható bázisa, amelyre vonatkoztatva a mátrix valamennyi többi (tehát nem B_0-beli) oszlopvektorának koordinátái nem pozitívak. Ez a feltétel azt jelenti, hogy ha az A mátrixnak van megjelölt tulajdonságú bázisa (és az, tegyük fel, éppen a mátrix első m oszlopvektorából áll), akkor $A = [B_0, A_s]$ és $B_0^{-1}A_s \leqq$ **o**.

Bizonyítás: 1. *A feltétel elégséges:* legyen B_0 a tételben jelzett tulajdonsággal rendelkező megvalósítható bázis. Akkor $\underline{x}_{B_0} = B_0^{-1}\underline{b} \geqq \underline{o}$. Könnyű belátni, hogy az $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} \underline{x}_{B_0} \\ \underline{o} \end{bmatrix}$ vektor optimális bázismegoldás. Az optimalitás elegendő feltétele ugyanis, hogy

$$\underline{\gamma}^* = \underline{c}^* - \underline{c}^*_{B_0} B_0^{-1} A \geqq \underline{o}^*$$

legyen, ahol $\underline{c}^*_{B_0}$ tartalmazza a bázisváltozók célfüggvényegyütthatóit. Mivel

$$B_0^{-1}A = B_0^{-1}[B_0, A_s] = [E_m, B_0^{-1}A_s]$$

ezért $\underline{\gamma}^*$ első m komponense zérus, az utána következő $n-m$ komponens pedig nemnegatív. (Ugyanis $\underline{c}^* \geqq \underline{o}^*$, $\underline{c}^*_{B_0} \geqq \underline{o}^*$ és $B_0^{-1}A_s \leqq \mathbf{o}$).

2. *A feltétel szükséges.* Legyen $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} \underline{x}_{B_0} \\ \underline{o} \end{bmatrix}$ olyan extremális pont az L halmazban, amelyben minden $z(\underline{x}) \in \mathfrak{Z}$ felveszi minimumát. Válasszunk ki egy tetszőleges célfüggvényt: $z = \underline{c}^x \underline{x} (\underline{c} \geqq \underline{o}^*)$. Az ehhez tartozó minimális célfüggvényérték: $z_0 = \underline{c}^*_{B_0} B_0^{-1} \underline{b}$. Tekintsük a $H(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \underline{c}^*_{B_0} B_0^{-1} \underline{b} = o$ $(\underline{c}^* \neq \underline{o}^*)$ hipersíkot. Ez átmegy az $\underline{x}_0$ ponton és az $\underline{x}_0$ pontra tett feltevés miatt az L halmaz támaszsíkja. A halmaz minden pontjára $H(\underline{x}) \geqq 0$ kell, hogy teljesüljön. Állítsuk elő az L halmaz egy tetszőleges pontjának koordinátáit a feltételi egyenletrendszer általános megoldásának a segítségével:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_{B_0} \\ \underline{o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_0^{-1}A_s \\ E_s \end{bmatrix} \underline{t}$$

Itt $\underline{t}$ egy $s = n-m$ elemű nemnegatív paramétervektor, amelynek komponense i minden nemnegatív valós számértéket felvehetnek, kivéve azokat, amelyekre az $\underline{x}$ vektor valamelyik eleme már negatív lenne. A $H(\underline{x})$ függvény az $\underline{x}$ helyen nem lehet negatív:

$$H(\underline{x}) = \underline{c}^* \underline{x} - \underline{c}^*_{B_0} B_0^{-1} \underline{b} = \underline{c}^* \begin{bmatrix} \underline{x}_{B_0} \\ \underline{o} \end{bmatrix} + \underline{c}^* \begin{bmatrix} -B_0^{-1}A_s \\ E_s \end{bmatrix} \underline{t} - \underline{c}^*_{B_0} B_0^{-1} \underline{b} \geqq 0$$

$$\underline{c}^* \begin{bmatrix} -B_0^{-1}A_s \\ E_s \end{bmatrix} \underline{t} \geqq 0$$

vagyis a $\underline{c}^* = [\underline{c}^*_{B_0}, \underline{c}^*_s]$ felbontás bevezetésével:

$$-\underline{c}^*_{B_0} B_0^{-1} A_s \underline{t} + \underline{c}^*_s \underline{t} \geqq 0$$

Ez az egyenlőtlenség azonban minden nemnegatív $\underline{c}^*$ vektor és $\underline{t}$ minden megengedett értéke mellett fenn kell, hogy álljon, így $\underline{c}^*_s$ és $\underline{t}$ komponenseinek minden elég kicsiny pozitív és $\underline{c}^*_{B_0}$ komponenseinek akármilyen nagy értékei mellett is. Ez csak úgy állhat fenn, ha

$$B_0^{-1} A_s \leqq \mathbf{o}$$

Ezzel a tételt igazoltuk.

Amennyiben a degeneráció fellépését is megengedjük, az indifferencia szükséges feltétele enyhébbé válik.

a) Az ún. „teljesen degenerált” esetben a feltételrendszer

$$A\underline{x}=\underline{o}$$

$$\underline{x}\geqq\underline{o}$$

alakú. Ilyen körülmények között a megvalósítható megoldások halmaza az $L=\{\underline{o}\}$ egyetlen triviális megoldásra zsugorodik. Ez az eset része a vizsgálatból kizárt $|L|=1$ helyzetnek, annak ti., hogy a megvalósítható megoldások halmaza nem üres ugyan, de egyetlen elemből áll. Az ilyen szerkezetű feladatok nem tekinthetők igazi programozási feladatoknak; ezek minden egyértékű valós függvényre, mint célfüggvényre nézve, triviálisan indifferensek.

b) A nem teljesen degenerált esetben a $B_0^{-1}A_s$ mátrix azon soraiban, amelyek zérusértékű bázisváltozókhoz tartoznak, állhatnak pozitív elemek is. Az

$$\underline{x}=\begin{bmatrix}\underline{x}_{B_0}\\ \underline{o}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-B_0^{-1}A_s\\ E_s\end{bmatrix}\underline{t}$$

általános megoldásban ugyanis ekkor a nemnegativitási követelmény ($\underline{x}\geqq\underline{o}$) miatt a paramétervektor bizonyos komponensei csak zérus értéket vehetnek fel. Ha viszont $\underline{t}$ zérus elemeket is tartalmazó nem negatív vektor, akkor a

$$\underline{c}_{B_0}^{*}B_0^{-1}A_s\underline{t}+\underline{c}_s^{*}\underline{t}\geqq 0$$

követelmény teljesüléséhez nem szükséges, hogy a $B_0^{-1}A_s$ mátrix minden eleme nempozitív legyen.

Meg kell jegyezni, hogy a tétel állításának elégséges volta következik WINTGEN 1. tételéből is. Tekintsük ugyanis az alábbi célfüggvényekből összeállított vektor-vektor függvényt:

$$\underline{z}(\underline{x})=\begin{bmatrix}\underline{e}_1^{*}\underline{x}\\ \underline{e}_2^{*}\underline{x}\\ \vdots\\ \underline{e}_n^{*}\underline{x}\end{bmatrix}=E_n\underline{x}$$

ahol $\underline{e}_i^{*}=[0,0,\ldots,\overset{i}{1},\ldots,0]$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Ez a függvény a megvalósítható megoldások halmazának minden elemét és így magát az L halmazt is önmagába képezi le. Megmutatható, hogy a WINTGEN 1. tételében értelmezett feltétel a $\underline{z}(L)=L$ halmazra teljesül. Az L halmaz zárt mind a $\cup$ mind a $\cap$ műveletre (tehát hálót alkot). Legyen ugyanis az L halmaz két tetszőleges eleme:

$$\underline{x}_1=\begin{bmatrix}\underline{x}_{B_0}\\ \underline{o}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-B_0^{-1}A_s\\ E_s\end{bmatrix}\underline{t}_1;\quad \underline{x}_2=\begin{bmatrix}\underline{x}_{B_0}\\ \underline{o}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-B_0^{-1}A_s\\ E_s\end{bmatrix}\underline{t}_2$$

Feltevésünk szerint $B_0^{-1}A_s\leqq\mathbf{o}$ és így $\underline{t}$ akármilyen nemnegatív komponensei mellett is

$$\underline{x}=\begin{bmatrix}\underline{x}_{B_0}\\ \underline{o}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-B_0^{-1}A_s\\ E_s\end{bmatrix}\underline{t}\in L.$$

Könnyen belátható azonban, hogy

$$\underline{x}_1 \cup \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} \underline{x}_{B_0} \\ \underline{o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_0^{-1} A_s \\ E_s \end{bmatrix} [\underline{t}_1 \cup \underline{t}_2] \in L$$

$$\underline{x}_1 \cap \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} \underline{x}_{B_0} \\ \underline{o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_0^{-1} A_s \\ E_s \end{bmatrix} [t_1 \cap t_2] \in L.$$

Abból a tényből, hogy az L halmaz zárt a metszés műveletére, következik, hogy a megfelelő minimum-feladat indifferens a

$$z_1 = \underline{e}_1^* \underline{x}; \quad z_2 = \underline{e}_2^* \underline{x}; \quad \dots \quad z_n = \underline{e}_n^* \underline{x}$$

függvények nemnegatív lineáris kombinációjára, de ez éppen a nemnegatív együtthatójú lineáris függvények osztályát jelenti.

IRODALOM

[1] G. WINTGEN: Indifferente Optimierungsprobleme. *Beitrag zur internationalen Tagung „Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie" Berlin, Október 1964. Konferenzprotokoll. Teil II.* Akademie Verlag. Berlin.

[2] G. HADLEY: *Linear Programming*, Addison—Wesley Publ. Comp. 1962.

(Beérkezett: 1965. nov. 11)

EINE BEMERKUNG ZU EINEM SATZ VON G. WINTGEN

von

PÉTER BOD

Verfasser beweist in Zusammenhang mit dem Begriff der sogenannten indifferenten Optimierungsaufgaben-eingeführt von G. Wintgen — [1] den folgenden Satz:

Die lineare Optimierungsaufgabe

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geqq \underline{o}$$

$$z(\underline{x}) \in \mathfrak{Z} \rightarrow \min! \quad \mathfrak{Z} = \{\underline{c}^* \underline{x} | \underline{c}^* \geqq \underline{o}^*\}$$

ist indifferent gegenüber der Klasse der linearen Zielfunktionen mit nicht negativen Koeffizienten dann und — falls Entartung ausgeschlossen — nur dann, wenn die Matrix A so eine zulässige Basis B_0 besitzt, in der sämtliche Spalten von A die nicht zu B_0 gehören, nicht positive Koordinaten bekommen.