

HAZAI EREDMÉNYEK A FÉLCSOPORTELMÉLET TERÜLETÉN AZ 1956—1965 ÉVEKBEN

Írta: SZÁSZ GÁBOR

1. Bevezetés

Hazánkban az algebrai kutatások a múlt század utolsó negyedében indultak meg. Az akkori, majd a két világháború közötti társadalmi viszonyok azonban a kutatómunka számára kedvezőtlenek voltak. Ebben kell keresnünk annak magyarázatát, hogy bár akkor is jelentős, sőt világszínvonalon is kimagasló eredményeket értek el, de igen kevesen voltak tudományos munkát végző matematikusaink.

A felszabadulás után a matematikai, s ezen belül az algebrai kutatómunka minden eddiginél nagyobb támogatást kapott. Az egyetemek oktatólétszámának emelése, valamint a Matematikai Kutató Intézet létrehozása és az aspirantúra intézménye a korábbival össze sem hasonlítható lehetőséget teremtett a fiataloknak a kutatómunkába való bekapcsolódásra. Így alakulhatott ki az a kedvező helyzet, hogy a matematika legtöbb ágában ma legalább annyian végeznek kutatómunkát, mint korábban a matematika egész területén.

Különösen nagymértékű volt a fejlődés az algebra területén: a magyar algebrai kutatócsoport a világ élvonalába emelkedett. Ebben nagy része volt Rédei Lászlónak és korán elhunyt tehetséges tanítványának, Szele Tibornak. A felszabadulás utáni hazai algebrai kutatások első szakaszáról igen jó összefoglalót írt Fuchs László¹, akinek magának is jelentős érdemei vannak a kutatómunka fellendülésében.

Dolgozatomban az absztrakt algebra egyik fiatal ágának, a félcsoportelméletnek azokat az eredményeit kívánom összefoglalni, amelyeket a hazai kutatók a legutóbbi évtizedben értek. Ebben az alig több mint negyedszázados tudományágban végzett eredményes munka jól illusztrálja a magyarországi matematikai kutatások korszerűségét.

Nem térek ki azokra a jelentős eredményekre, amelyeket hazai kutatóink az operátormodulusok elméletének terén értek. Ez ugyanis meghaladná ennek az ismertetésnek a kereteit, hiszen számos gyűrűelméleti fogalmat kellene tárgyalnunk. Ezt a kérdéskört egyébként is a gyűrűelmélet általánosításaként szokás tekinteni.

2. Alapfogalmak

Mint ismeretes, *félcsoport*nak olyan halmazt nevezünk, amelyben definiálva van egy asszociatív művelet; ezt a műveletet szorzásként jelöljük. A művelet kommutativitása általában nincs kikötve; ha teljesül, akkor *kommutatív félcsoport*ról

¹ FUCHS LÁSZLÓ, Az algebra fejlődéséről, különös tekintettel a hazai algebrai kutatásokra, *MTA III. Osztályának Közleményei*, 3 (1953), 381—396.

beszélünk. Nemkommutatív félcsoportnak is lehetnek olyan c elemei, hogy $cx = xc$ a félcsoport bármely x elemére érvényes; az ilyen elemek összességét a félcsoport *centrumának* nevezzük.

Legyenek H és K az F félcsoport részhalmazai. A H és K *részhalmazok szorzatán* értjük és HK -val jelöljük az F összes hk ($h \in H, k \in K$) alakú elemeinek összességét. Ha az F valamely R részhalmazára $RR \subseteq R$ teljesül, akkor R -et az F *részfélcsoportjának* nevezzük. Ha az F valamely I részhalmazára

$$FI \subseteq I, \text{ ill. } IF \subseteq I,$$

akkor azt mondjuk, hogy I az F -nek *balideálja*, ill. *jobbideálja*; ha I egyidejűleg bal- és jobbideál, akkor egyszerűen *ideálnak* mondjuk.

Számos olyan félcsoport ismeretes, amelyben a tekintett műveleten kívül olyan rendezési (azaz: reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív) reláció is van értelmezve, amelyre nézve a művelet monoton, azaz ha $a \leq b$, akkor a félcsoport bármely c elemére $ca \leq cb$ és $ac \leq bc$. Az ilyen félcsoportot a tekintett \leq relációra nézve (*részben*) *rendezett félcsoportnak* nevezzük: ha a félcsoport a tekintett \leq relációra nézve teljesen rendezett (azaz érvényes a trichotómia is), akkor *teljesen rendezett félcsoportról* beszélünk.

A hazai félcsoportelméleti kutatómunka fő irányai az utolsó évtizedben a következők voltak:

- a) Az ideálfogalom általánosításai.
- b) A félcsoportok egyes speciális osztályainak vizsgálata.
- c) Félcsoportok bővítése.
- d) Rendezett félcsoportok elmélete.

Az alábbiakban erről a négy területről külön-külön számolunk be.

3. Az ideálfogalom általánosításai

Ismeretes, hogy az ideálok fontos szerepet játszanak a félcsoportelmélet számos problémakörében. Az újabb vizsgálatok azt mutatták, hogy bizonyos kérdések megválaszolásához hasznosak lehetnek az ideálfogalom egyes általánosításai.

STEINFELD OTTÓ 1956-ban megjelent [22] dolgozatában bevezeti a félcsoport *kváziideáljának* fogalmát²: az F félcsoport valamely Q részhalmazát kváziideálnak nevezi, ha

$$FQ \cap QF \subseteq Q.$$

Látható, hogy minden ideál kváziideál is, tehát valóban az ideálfogalom általánosításáról van szó. Továbbá, F minden kváziideálja egyszersmind részfélcsoportja is F -nek.

Az ideál és a kváziideál fogalmát közös alapfogalomnak megfelelően tovább általánosította LAJOS SÁNDOR ([8] vagy [14]), a következőképpen: az F félcsoport A részfélcsoportját (m, n) -ideálnak nevezi, ha

$$A^m F A^n \subseteq A$$

² Gyűrűkre már korábban definiálta a kváziideált; l.: STEINFELD OTTÓ, On ideal-quotients and prime ideals, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 4 (1953), 289—298.

($m=0$, ill. $n=0$ esetén az illető tényezőt törölni kell). Hasonló az (m, n) -kváziideál definíciója is: így nevezi az A részfélcsoportot akkor, ha

$$A^m F \cap F A^n \subseteq A.$$

Nyilvánvaló, hogy az

- (0, 1)-ideál a balideál,
- (1, 0)-ideál a jobbideál,
- (1, 1)-kváziideál az eredeti kváziideál;

az új fogalomalkotás tehát magában foglalja a régieket.

A bevezetett fogalmak hasznosaknak bizonyultak egyes félcsoportosztályok tulajdonságainak vizsgálatában. Mielőtt áttérnénk az ilyen természetű eredmények ismertetésére, az ezekre a fogalmakra vonatkozó fontosabb tételeket soroljuk fel.

STEINFELD — fentebb idézett dolgozatában — megmutatta, hogy ha egy F félcsoportban B balideál, J pedig jobbideál, akkor a $Q = B \cap J$ halmaz kváziideál, s F minden Q kváziideálja előállítható ilyen módon; mégpedig ha B a bal-, J a jobbideálok között minimális, akkor Q is minimális a kváziideálok között, és viszont. (Az előbbi tételt LAJOS SÁNDOR a [8]-ban általánosította; l. alább.) Megállapította, hogy a minimális kváziideálok éppen azok a kváziideálok, amelyek az F -beli műveletre nézve csoportot alkotnak, s egy félcsoport összes minimális kváziideáljai izomorfok. Bebizonyította, hogy ha egy félcsoportnak van minimális kváziideálja, akkor minden minimális bal- (és jobb-) ideál minimális kváziideálok egyesítéseként állítható elő, az összes minimális kváziideálok egyesítése pedig a félcsoport összes ideáljainak metszetével, az ún. *Szuskevics-maggal* egyenlő. Részletesebben vizsgálja az *inverzes félcsoportok* kváziideáljait; így nevezzünk egy F félcsoportot akkor, ha bármely a eleméhez egy és csak egy olyan b elem található F -ben, hogy $aba = a$ és $bab = b$.

Egy évvel későbbi, [23] dolgozatában olyan félcsoportok kváziideáljait vizsgálja, amelyek valódi (tehát nem üres) M Szuskevics-maggal rendelkeznek. Egy I ideált *relatív minimálisnak* mond, ha $M \subset I$, de nincs olyan J ideál, hogy $M \subset J \subset I$ teljesülne; hasonlóan értendő a relatív minimális balideál stb. is. Kimutatja, hogy relatív minimális bal- és jobbideál metszete vagy egyenlő M -mel, vagy pedig relatív minimális kváziideál; továbbá, hogy minden relatív minimális Q kváziideál rendelkezik az alábbi két tulajdonság valamelyikével:

- (A) $QQ \subseteq M$;
- (B) Ha $a, b \in Q - M$, akkor az $ax = b$ és $ya = b$ egyenlet megoldható.

Fordítva, ha egy Q kváziideálra $Q \supset M$ és (B) teljesül, akkor Q relatív minimális.

LAJOS SÁNDOR 1960-ban — Steinfeld egyik tételét általánosítva — kimutatja [8], hogy az F félcsoport valamely részalmeza akkor és csak akkor (m, n) -kváziideál, ha egy $(m, 0)$ - és egy $(0, n)$ -ideál metszete. Ezt az eredményét kiegészíti az a későbbi megállapítása ([12], III. rész), hogy ha egy F félcsoport valamely I ideálja részcsoporthoz (tehát, nem csak részfélcsoport) F -ben, akkor I benne van az F minden (m, n) -ideáljában.

Több dolgozatban vizsgálja a reguláris félcsoportok kváziideáljait. *Regulárisnak*³ nevezzük az F félcsoportot, ha bármely a eleméhez található olyan $x \in F$,

³ A magyar nyelvű algebrai irodalomban az olyan félcsoportot szokás „reguláris”-nak nevezni, amelyet ebben a dolgozatban „egyszerűsíthető”-nek mondunk. A jelen dolgozat terminológiája a bevett angol—francia terminológiához igazodik.

hogy $axa = a$. (Az inverzes félcsoportok, s még inkább a csoportok, nyilvánvalóan regulárisak.) LAJOS SÁNDOR eredményei szerint reguláris félcsoport bármely két kváziideáljának szorzata ismét kváziideál [9]⁴, bármely két $(1, 1)$ -ideál szorzata ismét $(1, 1)$ -ideál, sőt az utóbbiak maguk is reguláris félcsoportot alkotnak [10]. Továbbá, tetszőleges félcsoportban minden (m, n) -kváziideál (m, n) -ideál, reguláris félcsoportban pedig a fordított állítás is igaz, tehát ezekben a félcsoportokban a két fogalom egybeesik [8].

Egy további dolgozatában ([12], II. rész) bebizonyítja, hogy ha B bal-, J pedig jobbideál, akkor $A = JB$ $(1, 1)$ -ideál; fordítva, reguláris félcsoport bármely A $(1, 1)$ -ideálja előállítható ilyen módon.

Előbb idézett, [9] gyűrűelméleti dolgozatában lényegileg megfogalmazza annak szükséges és elegendő feltételét, hogy reguláris félcsoport valamely részfélcsoportja kváziideál legyen: a reguláris F félcsoport A részfélcsoportja akkor és csak akkor kváziideál F -ben, ha $AFA \subseteq A$.

4. A félcsoportok egyes speciális osztályainak vizsgálata

1. Csoportok egyesítéseként előállítható félcsoportok. Ezeknek a félcsoportoknak a tulajdonságai ma már eléggé tisztázottak és számos jellemzésük ismeretes. Az utóbbiak közül az elsők közé tartozik SZÉP JENŐ eredménye, amelyet a következő bekezdésben ismertetünk.

Az F félcsoport minden egyes a eleméhez rendeljük hozzá az F valamely F_a részhalmazát a következőképpen: Ha a -nak van inverze F -ben, tehát a $G = \{a^n\}$ ($n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) halmaz F -nek részcsoportja, továbbá ha az F minden olyan b eleme felcserélhető a G egységelemével, amelyre $b^2 = a$ teljesül, akkor legyen $F_a = G$; minden más esetben legyen $F_a = \{a^n\}$ ($n = 1, 2, \dots$), tehát az F -ben az a elem által generált részfélcsoport. SZÉP tétele (l. [33]) kimondja, hogy egy F félcsoport akkor és csak akkor állítható elő közös elem nélküli csoportok halmazelméleti egyesítettjeként, ha az F minden a eleméhez van olyan $C_a \subseteq F - F_a$, hogy $F_a C_a = F - F_a$.

2. Egységelemes félcsoportok. Mint ismeretes, egy F félcsoport valamely e elemét az F bal-, ill. jobbegységelemének nevezünk, ha $ex = x$, ill. $xe = x$ az F minden x elemére; ha e egyidejűleg bal- és jobbegységelem, akkor az F egységelemének mondjuk. Tudjuk, hogy minden félcsoportnak legfeljebb egy egységeleme van, de lehetséges az is, hogy nincs egységeleme.

RÉDEI LÁSZLÓ [20] dolgozatában bevezette a „balegység” fogalmát: az F félcsoport a elemét az F balegységének nevezte el, ha $aS = S$. Nyilvánvaló, hogy minden balegységelem még inkább balegység; fordítva azonban nem, sőt RÉDEI példát adott olyan félcsoportra, amelynek nincsen balegységeleme, de van balegysége.

Ha a balegységet definiáló egyenletben a bal oldali két tényezőt felcseréljük, akkor a *jobbegység* definíciójához jutunk; *egység* az olyan elem, amely egyidejűleg bal- és jobbegység. Ezeknek a fogalmaknak a segítségével LAJOS SÁNDOR és SZÉP JENŐ [15] az egységelemes félcsoportok két érdekes jellemzését adták meg: egy félcsoport akkor és csak akkor egységelemes, ha van benne egység, ill. akkor

⁴ LAJOS SÁNDOR ezt az eredményt formailag reguláris gyűrűk kváziideáljaira mondta ki, de eredményéből triviálisan következik ugyanez a reguláris félcsoportokra is.

és csak akkor, ha tartalmaz olyan baleséget, amely nem balnövelő (a *Ljapin*-féle értelemben) és tartalmaz olyan jobbegséget is, amely nem jobbnövelő elem. Az F félcsoport valamely b elemét *balnövelőnek* nevezzük, ha van F -nek olyan valódi R részalmozsa, hogy $bR = F$.

3. *Reguláris félcsoportok.* KOVÁCS LÁSZLÓ és LAJOS SÁNDOR a reguláris félcsoportok néhány fontos tulajdonságát derítették fel. KOVÁCS LÁSZLÓnak igen nevezetes eredménye az az [5]-beli tétel, hogy egy félcsoport akkor és csak akkor reguláris, ha bármely J jobboldali ideálnak és B balideálnak JB szorzata a két részalmozsa közös részével egyenlő⁵. Az 1956-ból származó eredményt azóta többen is felhasználták és tovább is fejlesztették.

Egy félcsoport bármely elemét tartalmazza legalább egy ideál, ti. a félcsoport maga, de általában több ideál is tartalmazza. Az a elemet tartalmazó összes ideál közös része ismét ideál; ezt az a által generált *főideálnak* nevezzük, és (a) -val jelöljük. Hasonlóan, az a elemet tartalmazó összes bal-, ill. jobboldali metszetét az a által generált *főbalideálnak*, illetve *főjobboldali* ideálnak nevezzük és $(a)_B$ -vel, ill. $(a)_J$ -vel jelöljük. Ezek segítségével jellemzi LAJOS SÁNDOR 1961-ből való tétele a reguláris félcsoportokat: egy F félcsoport akkor és csak akkor reguláris, ha bármely B főbalideáljára és J főjobboldali ideáljára $JB = J \cap B$ (l. [7]). Tovább menve, ennél még kevesebbet kívánó elegendő feltételt is adott, megállapítva, hogy a regularitáshoz már az is elegendő, ha csak $(a)_J(a)_B = (a)_J \cap (a)_B$ teljesül a félcsoport minden a elemére. Ebből pedig az következik, hogy kommutatív félcsoport akkor és csak akkor reguláris, ha minden főideálja idempotens.

Nemrég megjelent, [13] dolgozatában az olyan F félcsoportok regularitását vizsgálja, amelyekben bármely x elem eleget tesz az $xF = Fx$ egyenlőségnek; az ilyen félcsoportokat — a csoportelméletből vett analógia alapján — *normális félcsoportoknak* nevezzük. Kimutatja, hogy normális félcsoport akkor és csak akkor reguláris, ha minden balideálja idempotens (azaz, minden B balideálra $BB = B$).

A reguláris félcsoportokéval bizonyos mértékig rokon az intrareguláris félcsoportok osztálya. Egy F félcsoportot *intraregulárisnak* nevezünk, ha az F bármely a eleméhez található olyan $x, y \in F$, hogy $xa^2y = a$. LAJOS SÁNDOR a [11]-ben bebizonyítja, hogy ha F intrareguláris félcsoport, I pedig az F ideálja, akkor I minden ideálja F -ben is ideál. (Ugyanez tetszőleges F félcsoportra nyilvánvalóan nem érvényes.) Az intrareguláris félcsoportok elméletébe vág egy, megjelenés alatt álló eredményem [29], amely STONE egyik fontos hálólélméleti tételének félcsoportelméleti analogonja: egy F félcsoport akkor és csak akkor intrareguláris, ha minden olyan a, b elem párhozhoz, amelyre $(a) \ni b$, található olyan P primideál, amely az a elemet tartalmazza, de b -t nem.

4. *Egyszerűsíthető félcsoportok.* Egy F félcsoportról azt mondjuk, hogy *balról egyszerűsíthető*, ha tetszőleges $a, b, c \in F$ elemekre az $ab = ac$ egyenletből mindig $b = c$ következik; ha F (hasonló értelemben) jobbról is egyszerűsíthető, akkor *egyszerűsíthető* félcsoportnak nevezzük.

PEÁK ISTVÁN 1958-ban megírt [16] dolgozatában megállapítja, hogy ha egy ilyen félcsoportnak van centruma, de önmagán kívül nincs más ideálja, akkor ez a félcsoport szükségképpen csoport.

⁵ A ⁴ lábjegyzetben elmondottak KOVÁCS LÁSZLÓ tételére is vonatkoznak.

Hasonló természetű problémát vizsgál, POLLÁK GYÖRGYgel közösen, a későbbi, [18] dolgozatban. Ebben olyan félcsoporthokról van szó, amelyekben minden $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ ideálsorozat véges; az ilyenekről azt mondjuk, hogy az ideáljaira nézve *minimumkövetelménynek* tesznek eleget. A dolgozat fő tétele a következő: Ha egy nem üres centrumú, balról egyszerűsíthető F félcsoporthoz az ideáljaira nézve eleget tesz a minimumkövetelménynek, akkor F csoport.

5. *Teljes félcsoporthok.* Ismeretes, hogy a csoportelméletben milyen nagy szerepet játszanak a csoport normális részcsoporthjai. E fogalom általánosításaképpen RÉDEI LÁSZLÓ még 1952-ben megalkotta a félcsoporth normális részcsoporthjainak fogalmát⁶: az F félcsoporth valamely N részfélcsoporthját *balnormálisnak* nevezi, ha az

$$F = N \cup a_1 N \cup a_2 N \cup \dots \quad (a_1, a_2, \dots \in F)$$

osztályozás kompatibilis (azaz ha a hozzá tartozó \equiv ekvivalenciarelációra teljesül az, hogy az F bármely x, y, z elemeire $x \equiv y$ -ből $xz \equiv yz$ és $zx \equiv zy$ következik), továbbá, ha bármely i -re és $n_1, n_2 \in N$ elempárra $a_i n_1 = a_i n_2$ csak $n_1 = n_2$ esetén teljesül. WIEGANDT (l. [32]) egy félcsoporth *normális* részfélcsoporthján olyan részfélcsoporthot ért, amely egyidejűleg bal- és jobbnormális.

A WIEGANDT által a [34]-ben vizsgált probléma, a félcsoporthok osztályára leszűkítve, a következőképpen fogalmazható meg. Legyen T valamilyen, a félcsoporthokra vonatkozó tulajdonság (pl. kommutativitás, regularitás stb.). Nevezzük a T -tulajdonságú F félcsoporthot erre a tulajdonságra nézve *teljesnek*, ha F ún. *direkt komponens* minden olyan T -tulajdonságú S félcsoporthban, amely F -et *balnormális* részfélcsoporthként tartalmazza. (Akkor mondjuk, hogy F *direkt komponens* S -ben, ha van S -nek olyan G részfélcsoporthja, hogy S minden eleme egyértelműen előállítható egy F -beli és egy G -beli elem szorzataként, továbbá F minden eleme G minden elemével felcserélhető.) A feladat az, hogy adott T tulajdonsághoz határozzuk meg az összes teljes félcsoporthokat.

WIEGANDT ezt a feladatot előbb az egységelemes egyszerűsíthető félcsoporthok, majd a kommutatív félcsoporthok osztályára oldja meg ([34], illetve [35]). Az előbbiekkel kapcsolatos eredmény megfogalmazása előtt emlékeztetünk arra, hogy egy F félcsoporth *automorfizmusán* az F -nek olyan, önmagára való kölcsönösen egyértelmű φ leképezését értjük, amelyre $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ ($a, b \in F$) érvényes; ha a φ -ről a kölcsönös egyértelműség helyett csak az egyértelműséget tételezzük fel, akkor *endomorfizmusnak* mondjuk. Egységelemes F félcsoporthnak lehetnek *belső automorfizmusai*: így nevezünk egy φ automorfizmust akkor, ha található olyan $c \in F$, hogy c -nek van inverze F -ben és $\varphi(x) = cxc^{-1}$ az F minden x elemére. Ez utóbbi fogalom felhasználásával WIEGANDT első eredménye így fogalmazható meg: Egységelemes, egyszerűsíthető félcsoporth akkor és csak akkor teljes, ha minden automorfizmusa *belső* és *centruma* csak az egységelemből áll.

A [35] egyik eredménye szerint kommutatív F félcsoporth akkor és csak akkor teljes, ha $F^n = F$ minden n természetes számra. De megadja az összes ilyen félcsoporthok leírását is: bármely teljes kommutatív félcsoporth egyértelműen előállítható olyan direkt komponensek szorzataként, amelyek között csak a racionális számok additív csoportjával, a nemnegatív racionális számok additív félcsoporthjával és

⁶ RÉDEI LÁSZLÓ, Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie, *Acta Sci. Math.*, 14 (1952), 252—273.

a Prüfer-féle p^∞ típusú csoportokkal izomorf félcsoportok fordulnak elő. Végül megállapítja, hogy minden kommutatív félcsoport izomorf egy alkalmasan választott teljes kommutatív félcsoport valamely részfélcsoportjával.

Nem a teljes félcsoportok elméletébe vág ugyan, de a normalitás fogalmához kapcsolódik PEÁK ISTVÁN [17] dolgozata, s ezért erről itt számolunk be. PEÁK a részfélcsoport normalitásának követelményeként egyedül a fentebb felírt osztályozás kompatibilitását tartja meg, s ezt az általánosabb normalitási fogalmat egység-elemes F félcsoportban vizsgálja. Kimutatja, hogy ha N az F -nek olyan rész-csoportja, amely tartalmazza F egységelemét, akkor az alábbi négy állítás ekvivalens:

1. N balnormális;
2. N jobbnormális;
3. $aN=Na$ az F minden a elemére,
4. az $F=N \cup aN \cup bN \cup \dots$ és $F=N \cup Na \cup Nb \cup \dots$ osztályozások osztályai páronként megegyeznek.

Másik tétele szerint, ha az M és N részfélcsoportok mindketten balnormálisak és mindketten tartalmazzák az F egységelemét, akkor az MN komplexusszorzat — s ha F még egyszerűsíthető is, akkor az $M \cap N$ metszet — szintén balnormális.

6. *Végesen generált kommutatív félcsoportok.* Egy F félcsoportot *végesen generálnak* nevezünk, ha megadható F -nek olyan a_1, a_2, \dots, a_n véges részhalmaza, hogy az F minden eleme ezek szorzataként előállítható (persze, ehhez az előállítás-hoz egy-egy elemet többször is felhasználhatunk tényezőként); pontosabban azt is mondjuk, hogy az F félcsoport *n elemmel generált*. RÉDEI LÁSZLÓ nemrég megjelent [21] könyvében részletesen kifejti a végesen generált kommutatív félcsoportok elméletét. Ebben a dolgozatban nincs elég helyünk arra, hogy RÉDEINEK a könyvével jelentőségéhez mérten foglalkozzunk; erre csak külön részletes referátum vállalkozhatik. Így arra kell szorítkoznunk, hogy egészen röviden ismertessük a könyv tárgyát.

Az n elemmel generált F félcsoport elemeit az n -dimenziós affin tér pontjaival reprezentálva, F beágyazható a tér egész koordinátájú pontjainak F_0 modulusába. Az F_0 -ban hálóműveletek értelmezhetők a következőképpen: ha az F félcsoport a és b elemének a tér $\{a_1, \dots, a_n\}$, illetve $\{b_1, \dots, b_n\}$ pontja felel meg, akkor legyen $\inf(a, b) = \{\min(a_1, b_1), \dots, \min(a_n, b_n)\}$ és $\sup(a, b) = \{\max(a_1, b_1), \dots, \max(a_n, b_n)\}$.

A könyv túlnyomó részben a végesen generált kommutatív félcsoportok kongruenciarelációinak leírásával foglalkozik. E célból bevezeti az úgynevezett *magfüggvényt*: a C kongruenciarelációhoz tartozó f_C magfüggvény értelmezési tartománya az $M_C = \{a-b; aCb\}$ halmaz (ahol aCb azt jelenti, hogy a kongruens b -vel a C -re nézve), értékkészlete az F félcsoport ideáljainak valamely halmaza, és

$$aCb \text{ akkor és csak akkor, ha } \inf(a, b) \in f_C(a-b).$$

Az ilyen f_C függvények teljes jellemzését megadja, s részletesen vizsgálja különböző típusaikat. Ellentétben a csoportok esetével, az M_C halmaz nem határozza meg a C -t, de van F -nek olyan I főideálja, amelyen meghatározza, tehát az I főideálban levő a, b elempárra aCb akkor és csak akkor teljesül, ha $a-b \in M_C$. Az ilyen főideálok egyesítését nevezi RÉDEI a *C kongruenciareláció magjának*. A vizsgálatok egyik fő eredménye az, hogy a végesen generált kommutatív félcsoportok osztálya (a csoportokhoz és a gyűrűkhöz hasonlóan) olyan algebrai struktúraosztály, amely-

ben a kongruenciarelációk a struktúra bizonyos részalmazai segítségével egyértelműen meghatározhatók.

A könyv behatóan vizsgálja a végesen generált kommutatív félcsoportok ideáljainak hálóját, s megállapítja, hogy az olyan disztributív háló, amely eleget tesz a maximumkövetelménynek.

7. *Félhálók.* Az olyan kommutatív félcsoportot, amelyben minden elem idempotens is, *félhálónak* nevezzük.

A. H. CLIFFORD nyomán az F félcsoport önmagába való egyértelmű λ leképezését *baltranszláció*nak nevezzük, ha $\lambda(x) \cdot y = \lambda(xy)$, és *jobbtranszláció*nak nevezzük, ha $x \cdot \lambda(y) = \lambda(xy)$ az F minden x, y elempárjára; az F *transzlációján* pedig olyan leképezést értünk, amely az F -nek egyidejűleg bal- és jobbtranszlációja. Nyilvánvaló, hogy kommutatív félcsoportnak (speciálisan, félhálónak) minden baltranszlációja és jobbtranszlációja egyszersmind a félcsoport transzlációja. A λ baltranszlációt *speciálisnak* mondjuk, ha van olyan c elem F -ben, hogy $\lambda(x) = cx$ minden x -re; az F speciális jobbtranszlációja olyan λ jobbtranszláció, amely előállítható $\lambda(x) = xc$ alakban, ahol c az F valamely rögzített eleme. CLIFFORD nyomán a λ bal- és μ jobbtranszlációt *egymáshoz kapcsoltnak* nevezzük, ha $x \cdot \lambda(y) = \mu(x) \cdot y$ a félcsoport bármely x, y elempárjára teljesül.

[25] dolgozatomban megállapítottam, hogy egy F félháló önmagába való leképezése akkor és csak akkor transzláció, ha a leképezés idempotens endomorfizmus és a képelemek halmaza F -nek ideálja. Továbbá kimutattam, hogy az „ $x \leq y$ akkor és csak akkor, ha $xy = y$ ” rendezési relációra nézve F minden egyes λ transzlációja teljesíti az *extenzivitás* (azaz, az $x \leq \lambda(x)$ minden x -re) és a *monotonitás* követelményét. A vizsgálatokat SZENDREI JÁNossal közösen folytatva (l. [30]), újabb eredményeket sikerült elérnünk. Megállapítottuk, hogy az F félháló transzlációi F -nek pontosan azok az önmagába való egyértelmű leképezései, amelyek F minden speciális transzlációjával felcserélhetők, továbbá hogy az F összes transzlációi maguk is félhálót alkotnak, s ebben a félhálóban a speciális transzlációk az F -fel izomorf ideált képeznek.

8. *Félcsoportok különleges tulajdonságú részfélcsoportokkal, illetve ideálokkal.* POLLÁK GYÖRGY és RÉDEI LÁSZLÓ közös [19] dolgozatukban meghatározták az összes olyan félcsoportokat, amelyeknek minden valódi részfélcsoportjuk csoport. Kimutatták, hogy minden ilyen félcsoport szükségképpen *torziófélcsoport*, azaz olyan, amelyben bármely a elemhez található olyan m és n természetes szám, hogy $n > m$ és $a^n = a^m$. Pontosabban, a vizsgált tulajdonságú félcsoportok a következők: 1. az összes torziócsoportok; 2. az összes kételemű félcsoportok; 3. az összes olyan egy elemmel generált félcsoportok, amelyeknek a generáló eleméhez található olyan $n > 2$ természetes szám, hogy $a^n = a^2$.

SZÁSZ FERENC, korábbi gyűrűelméleti eredményeit általánosítva, az olyan félcsoportokat határozta meg, amelyekben minden végesen generált valódi részfélcsoport főjobbideál. A [24]-ben közölt vizsgálatok eredményeképpen kiderült, hogy pontosan 8 ilyen félcsoport van, s mind legfeljebb négy elemű; közülük 4 olyan, hogy minden valódi részfélcsoportja előáll a félcsoport alkalmasan választott elemének és magának a félcsoportnak a szorzataként.

RÉDEI LÁSZLÓ algebra könyvének német kiadásában⁷ jellemzi az olyan fél-

⁷ RÉDEI LÁSZLÓ, *Algebra I.*, Akademische Verlagsgesellschaft, Geest & Portig K.—G., Leipzig, 1959.

csoportokat, amelyeknek minden részhalmazuk részfélcsoport, s az ilyeneket *széttagolható félcsoport*oknak nevezi el. Azután felveti a következő problémát: Igaz-e, hogy ha egy F félcsoport ún. *Frattini-féle részfélcsoportja*⁸ üres, akkor F széttagolható? Egyidejűleg megjegyzi, hogy legfeljebb három elemből álló félcsoportra ez igaz. A problémát LAJOS SÁNDOR oldotta meg, kimutatván a [6]-ban, hogy nagyobb számosságú félcsoport esetén a válasz tagadó.

RÉDEI, idézett könyvében, meghatározza az összes olyan véges nemkommutatív félcsoportokat, amelyeknek minden valódi részfélcsoportjuk kommutatív. Ő vezeti be az ilyen félcsoportokra az *elsőfokúban nemkommutatív félcsoport* elnevezést (s hasonló értelemben beszél más „elsőfokúban nemkommutatív struktúrák”-ról is).

Megjelenés alatt álló [26] dolgozatomban azokkal a félcsoportokkal foglalkozom, amelyeknek minden ideálja, vagy legalábbis minden főideálja *prim*, azaz minden I ideál (illetve főideál) olyan tulajdonságú, hogy a félcsoport tetszőleges x, y elempárja esetén az $xy \in I$ tartalmazás csak akkor áll fenn, ha $x \in I$ és $y \in I$ közül legalább az egyik teljesül. Kimutatom, hogy ilyen félcsoport összes ideáljai, illetve összes főideáljai teljesen rendezett halmazt képeznek a halmazelméleti tartalmazás relációjára nézve.

5. Félcsoportok bővítése

Legyen I az F félcsoport ideálja, s tekintsük F -nek azt az osztályozását, amelynek egyik osztálya I , az I -be nem tartozó minden egyes elem pedig önmaga alkot egy osztályt. Könnyen belátható, hogy az osztályok halmaza, amelyet F/I -vel jelölünk, az F -nek homomorf képe, s így szintén félcsoport, mégpedig zéruselemes: zéruseleme az I osztály. (Mint ismeretes, egy F félcsoport 0 elemét az F zéruselemének nevezzük, ha az F minden x elemére $x0 = 0x = 0$ teljesül.) A konstrukció első alkalmazójának tiszteletére az F/I -t az F félcsoport I szerinti *Rees-féle faktorfélcsoportjának* nevezzük.

A faktorfélcsoport fogalmára támaszkodva CLIFFORD⁹ kidolgozott egy, a csoportok *Schreier-féle* bővítésével analóg félcsoportbővítési eljárást. Legyen S és T két, közös elem nélküli félcsoport, s T -nek legyen zéruseleme. Az S -nek T -vel való *Clifford-féle bővítésén* értünk minden olyan F félcsoportot, amely S -et ideálként tartalmazza, s az F/S faktorfélcsoport izomorf T -vel.

RÉDEI¹⁰ és VAN LEEUWEN¹¹ gyűrűelméleti vizsgálatainak analógiájára SZENDREI a [31]-ben bevezette a *kettőstranzláció* (más néven: *bitranszláció*) fogalmát. Ezen az F félcsoport olyan, önmagába való $\lambda = (\lambda_b, \lambda_j)$ leképezéspárját érti, amelynek első komponense baltranzláció, második komponense jobbtranzláció F -en, a λ_b és λ_j egymáshoz kapcsoltak és egymással felcserélhetők. A kettőstranzlációk valamely halmazát *barátságosnak* mondja, ha e halmaz bármely két, $\lambda = (\lambda_b, \lambda_j)$ és $\mu = (\mu_b, \mu_j)$ elemére $\lambda_b \mu_j = \mu_j \lambda_b$. Könnyen belátható, hogy ha egy ilyen halmaz

⁸ A Frattini-féle részfélcsoportot ugyanúgy definiáljuk, mint a csoportelméletben a Frattini-féle részcsoportot.

⁹ A. H. CLIFFORD, Extension of semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **68** (1950), 165—173.

¹⁰ RÉDEI LÁSZLÓ, Csoportok és gyűrűk holomorfelmélete, *MTA III. Osztályának Közleményei*, **4** (1954), 27—48.

¹¹ L. C. A. VAN LEEUWEN, On the holomorphs of a ring, *Nederl. Akad. Wet. Proceedings, Ser. A*, **61** (1958), 162—169.

maximális, akkor félcsoportot alkot; az ilyent éppen ezért *maximális barátságos kettőstranzláció-félcsoport*nak nevezzük.

Egy félcsoporthoz általában több maximális barátságos kettőstranzláció-félcsoport tartozik. SZENDREI a [31]-ben elegendő, a [32]-ben pedig szükséges feltételt ad meg arra, hogy egy félcsoportnak csak egyetlen maximális barátságos kettőstranzláció-félcsoportja legyen: elegendő az egyoldali egyszerűsíthetőség, vagy az $FF=F$ fennállása; szükséges, hogy a tranzlációk félcsoportja kommutatív legyen. Szükséges és elegendő feltételt is megállapít: T_1' -vel, illetve T_2' -vel jelölve azoknak a bal-, illetve jobbtranzlációknak a halmazát, amelyek legalább egy kettőstranzláció első, illetve második komponenseként fellépnek, bebizonyítja, hogy egy F félcsoportnak akkor és csak akkor van egyetlen maximális barátságos kettőstranzláció-félcsoportja, ha a T_1' minden eleme a T_2' bármely elemével felcserélhető.

A fenti fogalmak segítségével nyeri két dolgozatának fő eredményeit. A [31]-ben szükséges és elegendő feltételt ad meg arra, hogy egy S félcsoportnak létezzék a zéruselemes T félcsoporttal való Clifford-féle bővítése. A [32]-ben bevezeti a félcsoport *holomorfj*ának fogalmát, s vizsgálja annak bizonyos részfélcsoportokkal való kapcsolatát: az F félcsoport holomorfján az F -nek saját maximális barátságos kettőstranzlációival való Clifford-féle bővítéseit értjük.

6. Rendezett félcsoportok elmélete

Ismeretes, hogy a természetes számok N additív félcsoportjának rendezése kiterjeszthető az N -et tartalmazó egész számok additív félcsoportjára. Ennek a konkrét esetnek általánosítása a következő probléma. Legyen S teljesen rendezett félcsoport, T pedig az S -et tartalmazó félcsoport; vajon az S -beli rendezés kiterjeszthető-e a T -re? FUCHS LÁSZLÓ az [1]-ben kimutatja, hogy ez lehetséges, mégpedig egyértelműen, ha egyrészt a $T-S$ bármely α eleméhez van olyan x és y ($x, y \in S$), hogy $x\alpha \in S$ és $\alpha y \in S$, másrészt bármely $a \in S$ és $\xi, \eta \in T$ elemekre mind az $a\xi = a\eta$, mind a $\xi a = \eta a$ egyenletből $\xi = \eta$ következik.

Egy másik dolgozatában [2] a teljesen rendezett félcsoportok bizonyos speciális osztályaival foglalkozik. A rendezett F félcsoportról azt mondjuk, hogy

1. *pozitív rendezésű*, ha F bármely a, b elemére $ab \cong a, b$;
2. *negatív rendezésű*, ha F bármely a, b elemére $ab \cong a, b$;
3. *természetes rendezésű*, ha F bármely $a < b$ elempárjához van olyan $c \in F$ és $d \in F$, hogy $b = ca = ad$;
4. *archimedeszi rendezésű*, ha F -ben $a^n < b$ minden természetes n -re csak akkor teljesülhet, ha a egységelem F -ben.

Továbbá, az F_1 és F_2 rendezett félcsoportot *rendezésizomorf*nak mondjuk, ha F_1 -nek van olyan, kölcsönösen egyértelmű φ leképezése F_2 -re, hogy az F_1 valamely a, b elempárjára $a \leq b$ akkor és csak akkor, ha $\varphi(a) \leq \varphi(b)$. FUCHS meghatározza az összes olyan teljesen rendezett pozitív rendezésű félcsoportokat, amelyek rendezésizomorfok a valós számok additív félcsoportjának valamely részfélcsoportjával: ilyen, nyilvánvalóan, az egyelemű rendezett félcsoport, valamint minden olyan, teljesen és archimedeszien rendezett félcsoport, melynek nincs maximális eleme és nincs olyan (ún. *anomális*) a, b elempárja, hogy $a \neq b$, de $a^n < b^{n+1}$ és $b^n < a^{n+1}$

minden n természetes számra. Az archimedeszien rendezett csoportokra vonatkozó ismert tétel általánosításaként kimutatja, hogy minden, teljesen és archimedeszien rendezett természetes rendezésű félcsoport kommutatív, s megadja ezek teljes felsorolását.

A részben-rendezett félcsoportokat vizsgálva [3], ezeknek egy eléggé széles osztályára vonatkozólag jellemzi az olyan részben-rendezett csoportokat, amelyek a tekintett félcsoportosztályba tartozó valamely félcsoport homomorf képeként adódnak, s bennük a rendezés az illető félcsoportbeli rendezés következménye (azaz, ha a G csoport a részben-rendezett F félcsoport homomorf képe a φ homomorfizmus szerint és $\varphi(a) \cong \varphi(b)$ a G -ben, akkor $a \cong b$ az F -ben).

FUCHS LÁSZLÓ és STEINFELD OTTÓ nemrég megjelent közös [4] dolgozata a rendezett félcsoportok elemeinek prímelemek szorzatára való felbonthatóságát vizsgálja. Legyen F legalább két elemet tartalmazó, negatív és természetes rendezésű olyan félcsoport, amelyben bármely $a_1 < a_2 < \dots$ növekvő sorozat véges. Továbbá, tartalmazzon F olyan e maximális elemet, amely balegységelem F -ben, s F minden egyes a, b elempárjához legyen olyan elem — jelöljük, szokás szerint, $a:b$ -vel — hogy $xb \cong a$ akkor és csak akkor, ha $x \cong a:b$. FUCHS és STEINFELD kimutatták, hogy ha még az is teljesül, hogy az F bármely a, b elemére az $a = ba$ ($\neq 0$) összefüggésből $b = e$ és az $ab = 0$ egyenletből $a = 0$ vagy $b = 0$ következik, akkor e az F -nek egységeleme és a $0 < a < e$ feltételnek eleget tevő minden a elem felbontható páronként felcserélhető prímelemekre, s ez a felbontás sorrendtől eltekintve egyértelmű. Megjegyzik, hogy gyűrű és félgűrű ideáljainak félcsoportjában a felsorolt követelmények teljesülnek.

Egyik legutóbbi dolgozatomban ([27], illetve német nyelven [28]) az F félcsoport elemeire egy \cong relációt vezettem be a következőképpen: legyen $a \cong b$ akkor és csak akkor, ha $a \in (b)$. Ez a reláció mindig reflexív és tranzitív, de nem mindig antiszimmetrikus; az eredmények éppen arra vonatkoznak, hogy mikor antiszimmetrikus is ez a reláció, illetve hogy ha antiszimmetrikus, akkor a félcsoport milyen különleges tulajdonságokkal rendelkezik.

7. Záró megjegyzés

Ez a dolgozat annak az előadásnak a kibővítése, amelyet a Nyíregyházi Tanárképző Főiskolán hazánk felszabadulásának huszadik évfordulója alkalmából rendezett tudományos ülészakon tartottam. Az előadás az ülészak matematikai-fizikai szekciójában, 1965. április 2-án hangzott el.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] FUCHS LÁSZLÓ, On the ordering of quotient rings and quotient semigroups, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 42—45.
- [2] FUCHS LÁSZLÓ, Note on fully ordered semigroups, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), 255—260.
- [3] FUCHS LÁSZLÓ, On group homomorphic image of partially ordered semigroups, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 139—142.
- [4] FUCHS LÁSZLÓ—STEINFELD OTTÓ, Principal components and prime factorisation in partially ordered semigroups, *Ann. Univ. Sci. Budapestensis, Sect. Math.*, **6** (1963), 103—111.

- [5] KOVÁCS LÁSZLÓ, A note on regular rings, *Publicationes Math.*, **4** (1956), 465—468.
- [6] LAJOS SÁNDOR, Rédei László egy félcsoporthelméleti problémájáról, *Mat. Lapok*, **10** (1959), 274—277.
- [7] LAJOS SÁNDOR, A Remark on Regular Semigroups, *Proc. Japan Acad.*, **37** (1961), 29—30.
- [8] LAJOS SÁNDOR, Generalized ideals in semigroups, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 217—222.
- [9] LAJOS SÁNDOR, On quasiideals in regular rings, *Proc. Japan Acad.*, **38** (1962), 210—211.
- [10] LAJOS SÁNDOR, О полугруппе подмножеств полугруппы, *Publicationes Math.*, **9** (1962), 223—226.
- [11] LAJOS SÁNDOR, A note on intraregular semigroups, *Proc. Japan Acad.*, **39** (1963), 626—627.
- [12] LAJOS SÁNDOR, Notes on (m, n) -ideals, I—III, *Proc. Japan Acad.*, **39** (1963), 419—421; **40** (1964), 631—632; **41** (1965), 383—385.
- [13] LAJOS SÁNDOR, A criterion for Neumann regularity of normal semigroups, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 172—173.
- [14] LAJOS SÁNDOR, A félcsoporthok ideálelméletéhez, I—II., *M. Tud. Akad. III. Osztályának Közleményei*, **11** (1961), 57—66 és **14** (1964), 293—300.
- [15] LAJOS SÁNDOR—SZÉP JENŐ, Az egységelemes félcsoporthok néhány jellemzése, *M. Tud. Akad. III. Osztályának Közleményei*, **15** (1965), 29—32.
- [16] PEÁK ISTVÁN, Ein Satz über Halbgruppen, *Publicationes Math.*, **6** (1959), 111—112.
- [17] PEÁK ISTVÁN, Über gewisse spezielle kompatible Klasseneinteilungen von Halbgruppen, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 346—349.
- [18] PEÁK ISTVÁN—POLLÁK GYÖRGY, Bemerkungen über die Halbgruppen mit Minimalbedingung, *Ann. Univ. Sci. Budapestensis, Sect. Math.*, **3—4** (1960—61), 223—225.
- [19] POLLÁK GYÖRGY—RÉDEI LÁSZLÓ, Die Halbgruppen, deren alle echten Teilhalbgruppen Gruppen sind, *Publicationes Math.*, **6** (1959), 126—130.
- [20] RÉDEI LÁSZLÓ, Halbgruppen und Ringe mit Linkseinheiten ohne Linkseinselemente, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **11** (1960), 217—222.
- [21] RÉDEI LÁSZLÓ, *Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen*, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1963.
- [22] STEINFELD OTTÓ, Über die Quasiideale von Halbgruppen, *Publicationes Math.*, **4** (1956), 262—275.
- [23] STEINFELD OTTÓ, Über die Quasiideale von Halbgruppen mit eigentlichem Suschkewitsch-Kern, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 235—242.
- [24] SZÁSZ FERENC, Die Halbgruppen, deren endlich erzeugte echte Teilhalbgruppen Hauptrechtsideale sind, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 135—138.
- [25] SZÁSZ GÁBOR, Die Translationen der Halbverbände, *Acta Sci. Math.*, **17** (1956), 165—169.
- [26] SZÁSZ GÁBOR, Über Primideale von Halbgruppen, megjelenik a *Publicationes Math.*, **13**. kötetében.
- [27] SZÁSZ GÁBOR, A félcsoporthok egy kvázirendezéséről, *Nyíregyházi Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei*, **1** (1965), 168—172.
- [28] SZÁSZ GÁBOR, Über eine Quasiordnung von Halbgruppen, megjelenik a *Publicationes Math.*, **13**. kötetében.
- [29] SZÁSZ GÁBOR, Halbgruppen, deren Elemente durch Primideale trennbar sind, megjelenik az *Acta Sci. Math.* c. folyóiratban.
- [30] SZÁSZ GÁBOR—SZENDREI JÁNOS, Über die Translationen der Halbverbände, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 44—47.
- [31] SZENDREI JÁNOS, Félcsoporthok bővítéséről, *A Szegedi Pedagógiai Főiskola Évkönyve*, 1962, 243—248.
- [32] SZENDREI JÁNOS, A félcsoporthok holomorfjai, *A Szegedi Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei*, 1965, 187—192.
- [33] SZÉP JENŐ, Zur Theorie der Halbgruppen, *Publicationes Math.*, **4** (1956), 344—346.
- [34] WIEGANDT RICHÁRD, On complete semi-groups, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 93—97.
- [35] WIEGANDT RICHÁRD, On complete semi-modules, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 219—223.