

ADOTT ZAVARJELZŐ RENDSZER ALKALMAZÁSÁVAL KAPCSOLATOS OPTIMALIZÁLÁSI PROBLÉMÁRÓL

Írta: MÉSZÁROS LAJOS

Bevezetés

Valamely adott termelési folyamatnak komplex módon történő automatizálása során bizonyos rendszerbeli hibák előfordulása következtében többnyire szakaszos időközökben történik a termelés. Amennyiben a termelési folyamatot elektronikus számológéppel vezéreljük, akkor a számológép programját, — adott szempontok szemelőtt tartása mellett, — bizonyos célfüggvény maximumának, vagy minimumának elérése érdekében határozzuk meg. A gyakorlatban a célfüggvény lehet pl. a rendszer efficienciája (a rendszer hatásfoka), melyet adott feltételek mellett maximalizálni akarunk. Mivel a termelési folyamatoknál a hiba előfordulások következtében kényszerállások lépnek fel, ezért a rendszer efficienciájának maximalizálása a kényszerállási idők csökkentésével érhető el. A kényszerállási időket pl. azáltal csökkenthetjük, hogy a hibaforrásokat igyekszünk megszüntetni, illetve a termelést gátló hatásaikat törekszünk kiküszöbölni. Ez megvalósítható pl. úgy, hogy zavarjelző (hibajelző) készüléket alkalmazunk a hibák bekövetkezésének megelőzése érdekében. A hibák egy részét gyakran a technológiai paramétereknek megengedett tűrés határokra kívül felvett értékei okozhatják. Ha a zavarjelző készüléket a még megengedett tűrés intervallumokon kívül felvett technológiai paraméter értékek jelzésére használjuk, akkor ezen paraméter szintek kellő módon történő megválasztásával elérhetjük, hogy a katasztrofális hiba bekövetkezése előtt — optikai, akusztikai jelzés esetén — a hibákat még időben elhárítsuk.

Ha valamely termelési folyamatot automatizáló rendszer működését M számú hibaforrás — amit a továbbiakban csatornának nevezünk — befolyásolja, akkor felmerül az a kérdés, hogy egy zavarjelző készüléket — amennyiben lehetséges — hány csatornára célszerű rákapsolni, ha azt kívánjuk elérni, hogy a jelzőkészülékek alkalmazása hatásos és „kifizetődő” legyen. Egy zavarjelző készülék alkalmazása akkor „kifizetődő”, ha a megfigyelés alatt álló csatornák számától és a hibák elhárítási költségétől függő ún. haszonfüggvény maximális, feltéve, hogy előírt megbízhatósági szint mellett a jelzőkészülék a kívánalmaknak megfelelően működik.

Tárgyalásaink során feltételezzük, hogy amennyiben valamelyik csatornán meghibásodás (paraméter túllépés) történik, akkor azt a zavarjelző készülék azonnal jelzi. Ezt követően megkezdődik a hiba elhárítása. (Ha valamely csatornán a hiba elhárítása befejeződik, akkor ezt a zavarjelző készülék nem jelzi). Ha M nagy értéket vesz fel, akkor gyakran előfordulhat, hogy egyidejűleg két vagy több meghibásodást kellene a készüléknek jeleznie. Feltételezzük, hogy a zavarjelző egy csatornán egyidejűleg mindig csak egy meghibásodást tud jelezni, vagyis, hogy az alkalmazott hibajelző készüléknek nincs tárolója (tárolóval ellátott készülék igénybevétele ugyanis lényegesen költségesebb volna). Azért, hogy a katasztrofális hiba be-

következését nagy megbízhatósággal megelőzzük, azt kívánjuk elérni, hogy a zavarjelző rendszer lehetőleg minden meghibásodást adott T ideig jelezzen.

A vázolt témakörben DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR végzett bizonyos vizsgálatokat az [1] alatti dolgozatban. A jelen dolgozat kapcsolódik az [1] s ennek alapján a NEHÉZVEGYIPARI KUTATÓ INTÉZET, Automatizálási Osztályán megkezdett ilyen irányú vizsgálatokhoz, melynek matematikai megfogalmazását DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR igen általánosan — a megbízhatóságelmélet egy problémaköré-ként — a következőképpen adták meg:

Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ tetszés szerinti valószínűségi változó, $g_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) pedig a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ valószínűségi változók értékészletén értelmezett tetszés szerinti, az adott esetektől függően bizonyos feltételeknek eleget tevő függvények.

Jelöljön $a_1, a_2, \dots, a_l$ bizonyos paramétereket és $h_i(a_1, a_2, \dots, a_l)$ ezeknek egy függvényét. Tekintsük a

$P\{g_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) < h_i(a_1, a_2, \dots, a_l)\} = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ valószínűségeket, s legyenek $f_j(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) ezen valószínűségeknek a függvényei ($m \leq l$).

Meghatározandó az $a_1, a_2, \dots, a_l$ paraméterek közül jól definiált m számúnak azon értéke, melyre az $L(y_1, y_2, \dots, y_n)$ függvény maximumát (minimumot) veszi fel az alábbi feltételek teljesülése mellett.

$$1 - \varepsilon_1 \equiv f_1(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$1 - \varepsilon_2 \equiv f_2(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\vdots$$

$$1 - \varepsilon_m \equiv f_m(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Bizonyos a feltételekkel definiált paraméter tartomány meghatározásával kapcsolatos problémát az [1] dolgozat tárgyal.

A vizsgálataink során — mint látni fogjuk — az [1]-ben kapott eredményekből közvetlen helyettesítéssel nem származtathatók az esetünkben kívánt eredmények. Ennek ellenére a válaszadásnál jelentősen hasznosíthatók az ott alkalmazott megfontolások.

A csatornaszám optimális meghatározásánál alkalmazott matematikai feltételeket az 1. §-ban ismertetjük. A koincidencia eloszlásfüggvényt a 2. §-ban határozzuk meg.

A felvetett kérdésre a 3. §-ban válaszolunk. A kapott eredményből közvetlenül látni fogjuk, hogy a közölt vizsgálat a DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR által definiált problémakörhöz tartozik.

1. §.

A matematikai modell felállítása

Legyen adott M csatorna. Ha valamelyik csatornán meghibásodás történik, azt egy zavarjelző készülék jelzi. Ezt követően megkezdődik a hiba elhárítása. (A tárgyalás során mindvégig feltételezzük, hogy javítás addig sohasem kezdődik el, amíg a zavarjelző készülék a meghibásodást nem jelezte.)

Jelöljük ξ -vel egy tetszés szerinti csatornán valamely folyamat működési idejét (élettartamát), η -val pedig a javítási idő hosszát. Nevezzük a zavarjelző által jelzendő időpontokat realizációs időpontoknak. Legyen ζ az az időtartam, melyre a zavarjelző készüléknek szüksége van ahhoz, hogy bármelyik csatornán egy realizációs pontot érdemlegesen jelezni tudjon.

Tegyük fel, hogy kivétel nélkül minden csatornán ugyanazon alábbi feltételek teljesülnek:

$$1. \quad P(\xi < t + \Delta t | \xi \geq t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

Ez azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy egy csatornán a $(t, t + \Delta t)$ időközben meghibásodás történik, feltéve, hogy a t időpontban nem volt meghibásodás $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$.

$$2. \quad P(\eta < t + \Delta t | \eta \geq t) = \mu \Delta t + o(\Delta t)$$

vagyis annak a valószínűsége, hogy a $(t, t + \Delta t)$ időközben a javítás befejeződjék, feltéve, hogy a t időpontban a hibaelhárítás folyamatban volt $\mu \Delta t + o(\Delta t)$.

Tegyük fel továbbá, hogy

$$3. \quad P(\zeta < t + \Delta t | \zeta \geq t) = \gamma \Delta t + o(\Delta t)$$

azaz annak a valószínűsége, hogy a $(t, t + \Delta t)$ időközben egy jelzés befejeződik, feltéve, hogy a t időpontban a jelzés folyamatban volt $\gamma \Delta t + o(\Delta t)$.

A továbbiakban mindvégig feltételezzük azt is, hogy valamely tetszés szerinti i csatornán egy realizációs pontnak a bekövetkezése független attól, hogy korábban melyik k ($k \neq i$) csatornán volt realizációs pont. Bár a gyakorlatban ez a feltétel sem teljesül mindig, ez azonban — az extrém esetek tárgyalása szempontjából — nem jelent túlzottan erős feltételt, ha a zavarjelző készülékünk elég gyors, pl. másodpercnyi nagyságrendű.

2. §.

A koincidencia eloszlásfüggvénye

Jelölje τ_1 az első olyan realizációs pontot, amelynek bekövetkezésekor az előző realizációs pont jelzése még nem fejeződött be. A bevezetésben felvetett kérdés megválaszolásához szükségünk lesz — bizonyos feltételek mellett — a τ_1 eloszlásfüggvényének ismeretére. Ennek meghatározására az [1]-ben alkalmazott meggondolásokat fogjuk alkalmazni, s ez alapján bizonyítjuk az alábbi tételt.

1. TÉTEL: Ha τ_1 jelenti az első olyan realizációs pontot, amelynek bekövetkezésekor az előző realizációs pont jelzése még nem fejeződött be, akkor

$$P(\tau_1 < t) = F(t) = 1 - [R_0(t) + R_1(t)],$$

ahol $R_l(t)$ ($l=0, 1$) eleget tesz az alábbi differenciál-egyenletrendszernek:

$$R'_0(t) = -R_0(t)\lambda MQ(t) + R_1(t)\gamma$$

$$R'_1(t) = -R_1(t)(\gamma + \lambda(M-1)Q(t)) + R_0(t)\lambda MQ(t),$$

amelyben

$$Q(t) = \frac{Q_1(t)}{Q_1(t) + Q_3(t)}$$

és itt $Q_1(t)$, $Q_2(t)$, $Q_3(t)$ a következő differenciál-egyenletrendszernek tesz eleget

$$Q_1'(t) = -\lambda Q_1(t) + \mu Q_3(t)$$

$$Q_2'(t) = -\gamma Q_2(t) + \lambda Q_1(t)$$

$$Q_3'(t) = -\mu Q_3(t) + \gamma Q_2(t)$$

Bizonyítás: Tekintsünk egy tetszés szerinti csatornát. Jelölje $Q_1(t)$ annak a valószínűségét, hogy a csatorna a t időpontban működés alatt áll, $Q_2(t)$ pedig annak a valószínűségét, hogy a zavarjelző készülék a t időpontban meghibásodást jelez. A $Q_3(t)$ legyen annak a valószínűsége, hogy a csatorna a t időpontban javítás alatt áll. Ekkor könnyen belátható, hogy $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ és $Q_3(t)$ eleget tesz az alábbi differenciál-egyenletrendszernek:

$$Q_1'(t) = -\lambda Q_1(t) + \mu Q_3(t)$$

$$Q_2'(t) = -\gamma Q_2(t) + \lambda Q_1(t)$$

$$Q_3'(t) = -\mu Q_3(t) + \gamma Q_2(t)$$

Nyilvánvaló, hogy $Q_1(t) + Q_2(t) + Q_3(t) = 1$ így a $Q_1(0) = 1$ feltétel mellett kapjuk, hogy:

$$Q_1(t) = \frac{\gamma\mu}{\gamma\lambda + \gamma\mu + \lambda\mu} \cdot e^{\omega_1 t} \left(\frac{\lambda(\gamma + \mu)}{\omega_1^2 - \omega_1\omega_2} + \frac{\lambda}{\omega_1 - \omega_2} \right) + e^{\omega_2 t} \left(\frac{\lambda(\mu + \gamma)}{\omega_2\omega_1 - \omega_2^2} + \frac{\lambda}{\omega_1 - \omega_2} \right)$$

$$Q_2(t) = \frac{\lambda\mu}{\gamma\lambda + \gamma\mu + \lambda\mu} + e^{\omega_1 t} \left(\frac{\lambda\mu}{\omega_1^2 - \omega_1\omega_2} + \frac{\lambda}{\omega_1 - \omega_2} \right) - e^{\omega_2 t} \left(\frac{\lambda\mu}{\omega_2\omega_1 - \omega_2^2} + \frac{\lambda}{\omega_1 - \omega_2} \right)$$

$$Q_3(t) = \frac{\lambda\gamma}{\gamma\lambda + \gamma\mu + \lambda\mu} + e^{\omega_1 t} \frac{\gamma\lambda}{\omega_1^2 - \omega_1\omega_2} - e^{\omega_2 t} \frac{\gamma\lambda}{\omega_1\omega_2 - \omega_2^2}$$

ahol:

$$\omega_1 = \frac{-(\lambda + \gamma + \mu) + \sqrt{\gamma^2 + \lambda^2 + \mu^2 - 2(\gamma\lambda + \gamma\mu + \lambda\mu)}}{2}$$

$$\omega_2 = \frac{-(\lambda + \gamma + \mu) - \sqrt{\gamma^2 + \lambda^2 + \mu^2 - 2(\gamma\lambda + \gamma\mu + \lambda\mu)}}{2}$$

s itt

$$\omega_2 < \omega_1 < 0.$$

Jelölje $R_l(t)$ ($l=0,1$) annak valószínűségét, hogy a zavarjelzőnek a t időpontban l realizációs pontot kell jeleznie úgy, hogy a t ideig 1-nél több realizációs pontot egyetlen esetben sem kellett egyidejűleg jeleznie. Ekkor könnyen belátható, hogy:

$$R_0(t + \Delta t) = R_0(t) \left[\sum_{i=0}^M V_{i,0}(t) (1 - \lambda\Delta t)^i \right] + R_1(t) \left[\gamma\Delta t \sum_{i=0}^{M-1} V_{i,1}(t) (1 - \lambda\Delta t)^i \right] + o(\Delta t)$$

$$R_1(t + \Delta t) = R_1(t) \left[(1 - \gamma\Delta t) \sum_{i=0}^{M-1} V_{i,1}(t) (1 - \lambda\Delta t)^i \right] + \\ + R_0(t) \left[\sum_{i=0}^M V_{i,0}(t) \binom{i}{1} \lambda\Delta t (1 - \lambda\Delta t)^{i-1} (1 - \gamma\Delta t) \right] + o(\Delta t),$$

ahol

$$V_{i,k}(t) = \binom{M-k}{i} Q^i(t)(1-Q(t))^{M-k-i} \quad (k=0,1)$$

és

$$Q(t) = \frac{Q_1(t)}{Q_1(t) + Q_3(t)}.$$

Ebből következik, hogy:

$$R'_0(t) = -R_0(t)\lambda MQ(t) + R_1(t)\gamma$$

$$R'_1(t) = -R_1(t)(\gamma + \lambda(M-1)Q(t)) + R_0(t)\lambda MQ(t)$$

Annak a valószínűsége, hogy t ideig a zavarjelző készülék minden realizációs pontot jelzett, feltéve hogy a zavarjelző készülék hibátlanul működött:

$$R_0(t) + R_1(t).$$

Ez alapján annak a valószínűsége, hogy a készüléknek t ideig valamely $(0,t)$ -be eső időpontban legalább 2 realizációs pontot kellett volna jeleznie:

$$F(t) = 1 - [R_0(t) + R_1(t)] = P(\tau_1 < t).$$

Q. e. d.

KÖVETKEZMÉNY: *Elég nagy $t > T_0$ esetén*

$$P(\tau_1 < t) = F(t) \approx 1 - e^{-\alpha t}$$

ahol:

$$\alpha = \frac{M(M-1)}{\gamma} \left[\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \right]^2,$$

feltéve, hogy γ értéke λ és μ értékhez viszonyítva meglehetősen nagy és M értéke is legfeljebb tízes nagyságrendű.

Ennek belátása az [1] dolgozat 3. tételénél alkalmazott megfontolásokkal történhet.

3. §.

Az optimális csatornaszám meghatározása

Tételezzük fel, hogy bármely csatornán valamely előforduló hiba elhárítási költsége K' illetőleg K'' attól függően, hogy zavarjelző készüléket alkalmazunk, vagy sem ($K' < K''$). Legyen a termelési folyamat s egyben a zavarjelző készülék használati ideje elég nagy, rögzített T érték, $\delta > 0$ pedig tetszőlegesen kicsiny számmal előírt $\varepsilon = 1 - \delta$ megbízhatósági szint. Tételezzük fel, hogy γ, λ, μ paramétereket ismerjük. A gyakorlatban γ értéke λ és μ értékhez viszonyítva meglehetősen nagy.

Vegyük figyelembe ugyanis azt, hogy $\frac{1}{\gamma}$ a jelzési idő, $\frac{1}{\lambda}$ a működési $\frac{1}{\mu}$ pedig a javítási idő várható értékét jelenti, és az esetek többségében hetek, hónapok is eltelnek míg egy meghibásodás bekövetkezik. A javítási idő is órákig, napokig tarthat, ugyanekkor a jelzési idő mindössze néhány másodperc. Jelölje a csatornaszámtól függő haszon

függvényt $H(M)$. Ezen szempontok figyelembe vétele mellett az 1. tétel következménye alapján rögzített T esetén, egy tetszés szerinti csatornán a nem jelzett realizációs pontok száma jó közelítéssel αT paraméterű Poisson eloszlást követ.

Amennyiben nem alkalmaznánk zavarjelző készüléket, akkor elég nagy értékű T esetén egy tetszés szerinti csatornán jó közelítéssel átlagosan $\frac{T}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}}$ meghibásodás

fog bekövetkezni. Ezen szempontok szemelőtt tartása mellett, már közvetlenül adódik, hogy

$$H(M) = K'' \frac{T}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}} M - \left(M K' \frac{T}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}} + (K'' - K') \alpha T \right) \quad (0 < K' < K''),$$

ahol

$$\alpha = \frac{M(M-1)}{\gamma} \left[\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \right]^2.$$

A $H(M)$ függvénynek maximuma az

$$M_{\max} = \frac{1}{2} + \gamma \left[\frac{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}}{2} \right]$$

helyen van. Az 1. tétel következményéből közvetlenül adódik, hogy előírt ε megbízhatóság mellett, γ, λ, μ ismeretében és T megadásával, ha M értékét úgy választjuk meg, hogy arra nézve teljesüljön az

$$M \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4\gamma \ln \frac{1}{\varepsilon}}{\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 T}}$$

egyenlőtlenség, akkor legalább ε 100% biztonsággal állíthatjuk, hogy a készülék $0 \leq t \leq T$ intervallumon minden realizációs pontot jelez. Ez utóbbi szempont figyelembe vétele mellett a bevezetésben felvetett kérdésre már most jó közelítéssel az alábbi tétel adja meg a választ.

2. TÉTEL: Adott ε kockázat mellett rögzített γ, λ, μ és T esetén (feltéve, hogy azok nagyságrendje a már közölt módon alakul) a $H(M)$ haszon függvénynek feltételes maximuma azon $M = M_{\text{opt}}$ helyen van, melyre nézve

$$M_{\text{opt}} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda} \right), & \text{ha } \gamma \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda} \right) \leq \sqrt{1 + \frac{4\gamma \ln \frac{1}{\varepsilon}}{\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 T}} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4\gamma \ln \frac{1}{\varepsilon}}{\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 T}}, & \text{ha } \sqrt{1 + \frac{4\gamma \ln \frac{1}{\varepsilon}}{\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 T}} \geq \gamma \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda} \right). \end{cases}$$

Más szóval ez azt jelenti, hogy a γ , λ , μ ismeretében T megadásával, ha M értékét M_{opt} -nak választjuk akkor, a $H(M)$ haszon függvény maximális olyan értelemben, hogy $\varepsilon 100\%$ -nál nagyobb biztonsággal állíthatjuk, hogy a zavarjelző készülékünk a $0 \leq t \leq T$ intervallumon minden realizációs pontot jelez.

Megjegyzések:

- I. Gyakorlati szempontból rendkívül előnyös az a tény, hogy M_{opt} értéke nem függ K' és K'' értékétől.
- II. Valójában a zavarjelző készülék alkalmazása bizonyos költséggel jár. (Vételár, beszerelési költség, karbantartási költség.) Ennek megfelelően a tényleges hasznot úgy kapjuk meg, ha ezen utóbbi költségek összegét $H(M_{\text{opt}})$ értékéből levonjuk. Amennyiben ez az érték pozitív, úgy a közölt szempontok mellett feltétlenül előnyös a zavarjelző készülék alkalmazása.
- III. Természetesen a $H(M)$ haszon függvény maximalizálására több feltételt is előírhatunk. Ekkor egy több változós függvény feltételes maximumát kell megkeresni.

IRODALOM

- [1] DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR: Regisztrálással kapcsolatos sztochasztikus problémákról. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei*, 15 (1965) 1. szám.

(Beérkezett: 1965. XII. 21.)

ON THE OPTIMALIZATION PROBLEM OF THE APPLICATION OF A GIVEN DISTURBANCE INDICATOR SYSTEM

By

L. MÉSZÁROS

SUMMARY

Author occupies in this papers with the question of that a given disturbance indicator system is to practically switch on to how many ducts, that the application of one be paying. To this had to determine the probability of that the disturbance indicator should indicate only not more than one defect within a certain time.