

EGY ÁLTALÁNOS MÓDSZER FÜGGVÉNYEGYENLETEK NÉHÁNY OSZTÁLYÁNAK MEGOLDÁSÁRA, II.*

Írta: VINCZE ENDRE

4. §. A sinus- és cosinus-egyenlet, s egy közös általánosításuk

A trigonometriai függvényegyenleteknek és általánosításainak igen nagy irodalma van, így ezt valamelyest részletesebben kívánjuk ismertetni.

Már PTOLEMAIOS [55] ismerte, hogy a $\sin x$ és $\cos x$ függvények kielégítik a

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

egyenletet (ezt egy, a húrnégyszögekre vonatkozó arányossági tételből vezette le), s ennek az egyenletnek az alapján egy ún. „húrtáblázatot” készített (lényegében az első szögfüggvénytáblázat!), tehát a szóban forgó egyenletet a $\sin x$ és $\cos x$ függvények *tényleges meghatározására* használta. Természetesen nem kívánjuk PTOLEMAIOS-t a trigonometriai függvényegyenletek első „úttörőjeként” emlegetni, de rámutatunk, hogy a trigonometriai függvényegyenletek elméletében fontos és egyben ösztönző szerepet játszó gondolat magva már itt megtalálható, ti. hogy az összeadási és kivonási tételek *bármelyike* megfelelő mellékfeltételekkel *meghatározza* ezeket a függvényeket.

N. H. ABEL [1] kétszeri differenciálhatóság feltételezésével oldja meg az

$$S(x+y) = S(x)C(y) + S(y)C(x)$$

egyenletet, eredménye azonban nem teljes, mert a megoldásnál „elsikkad” az $S(x) = cx$, $C(x) \equiv 1$ megoldáspár. Később J. TANNERY [63] (vö. [30]) a

$$(4. a) \quad \begin{cases} C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y), \\ S(x+y) = S(x)C(y) + S(y)C(x) \end{cases}$$

egyenletrendszer vizsgálja, majd W. F. OSGOOD [49] foglalkozik ezzel az egyenletrendszerrel; mindketten differenciálhatósági feltételek mellett (vö. [78], [43]). A továbbiak során W. H. WILSON [80] vizsgálatait emeljük ki, aki több más egyenlettel is kapcsolatba hozva, az

$$\begin{aligned} S(x-y) &= S(x)C(y) - C(x)S(y), \\ C(x-y) &= C(x)C(y) - k^2 S(x)S(y) \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldását az

$$F(x+y) = F(x)F(y)$$

(F komplex) egyenlet megoldásaira vezet vissza.

* A dolgozat első része a *MTA Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, 16 (1966), 179—208 oldalain jelent meg; az egyes fejezetek, képletek, tételek stb. számozása ehhez csatlakozóan folytatódólagos. A *teljes irodalomjegyzéket* is az első részhez csatoltuk.

O. PERRON [51] a

$$(4. b) \quad \begin{cases} C(x-y) = C(x)C(y) + S(x)S(y), \\ S(x-y) = S(x)C(y) - S(y)C(x) \end{cases}$$

egyenletrendszerhez a

$$(4. c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x} = 1$$

mellékfeltételt véve kimutatja, hogy a megoldás az $S(x) = \sin x$ és $C(x) = \cos x$ trigonometriai függvénypár, majd J. MOLLERUP [47] is a (4. b) egyenletrendszer kapcsán végez hasonló axiomatikus vizsgálatokat (folytonossági feltevés mellett). M. KRAFFT [36] az előbbieknél is egyszerűbb feltételek mellett [$C(x) > 0$ a nullapont környezetében] oldja meg a (4. a) egyenletrendszert. J. C. H. GERRETSEN [25] kimutatja (vö. [2]), hogy a (4. b) rendszer helyett elegendő csupán a

$$(4. d) \quad C(x-y) = C(x)C(y) + S(x)S(y)$$

egyenlettel foglalkozni és ha itt (4. c) teljesül, akkor a megoldás ismét a $C(x) = \cos x$, $S(x) = \sin x$ függvénypár. Ezt az eredményt tovább egyszerűsíti és élesíti J. G. VAN DER CORPUT [19] és J. RIDDER [56].

L. VIETORIS [67] *egymástól függetlenül* oldja meg az összes trigonometriai függvényegyenletet; a megoldás egy HAMEL-bázis segítségével az

$$A(x+y) = A(x)A(y),$$

$$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

függvényegyenletekre való visszavezetéssel történik, ahol $A(x)$ és $g(x)$ valós változójú komplex függvényeket jelölnek. Valós változókra szorítkozva L. VIETORIS eredménye az eddig ismert legáltalánosabb, bár a megoldások hiányosak: a

$$(4. e) \quad C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y)$$

egyenletnél a $C(x) = A(x)[1 \pm g(x)]$, $S(x) = A(x)g(x)$; az

$$S(x+y) = S(x)C(y) + S(y)C(x)$$

egyenletnél az $S(x) = A(x)g(x)$, $C(x) = A(x)$; az

$$S(x-y) = S(x)C(y) - S(y)C(x)$$

egyenletnél pedig az $S(x) = g(x)$, $C(x) = 1 - g(x)$ megoldaspár hiányzik.

V. ALACI [8] a (4. a) rendszer megoldását végtelen hatványsor alakban keresi, majd ezt az egyenletrendszert TH. ANGHELTZA [12] a

$$C(x+y) + C(x-y) = 2C(x)C(y)$$

egyenletre való visszavezetéssel oldja meg, a szereplő függvényekről folytonosságot feltételezve (vö. P. MONTEL [48]). J. C. W. LA BERE [16] a sinus addíciós egyenletet egyszeri differenciálhatóság mellett oldja meg; hasonlóan differenciálhatóságot feltételezve tárgyalja S. PARAMESWARAN [50] is az ún. sinus kivonási egyenletet.

S. I. NOVOSELOV [84] (vö. [83]), majd H. E. VAUGHAN [65] ismét foglalkoznak a (4. d) egyenlettel, s azt a trigonometriai függvények jellemzésére használják. J. ACZÉL [3] egy G. KIRSCHMER [35] által felvetett problémára válaszolva a

$$C(u+v) = C(u)C(v) - S(u)S(v),$$

$$S(u+v) = S(u)C(v) + S(v)C(u),$$

$$S(u)^2 + C(u)^2 = E(u)^2,$$

$$E(u+v) = E(u)E(v)$$

egyenletrendszert oldja meg *komplexben* folytonossági feltevés mellett. Ugyancsak komplexben folytonossági feltevés mellett vizsgálják E. B. VAN VLECK és F. H'DOUBLER [77] a (4. a) egyenletrendszert, s ezt további általánosabb egyenletek megoldására használják.

S. KUREPA [41] (vö. [40]) mérhetőségi feltételek mellett BANACH térben vizsgálja a (4. e) egyenletet.

Mint látható, a nagyszámú vizsgálat és eredmény még ily hézagos és vázlatos ismertetése, ill. pusztá felsorolása is eléggé terjedelmes.

Az e §-ban tárgyalandó

$$(4. f) \quad F(x+y) = G(x)H(y) + K(x)L(y)$$

egyenlet kapcsán utalunk még C. STÉPHANOS [61], T. LEVI-CIVITA [42] és P. STÄCKEL [60] munkáira, akik az

$$(4. g) \quad F(x+y) = \sum_{j=1}^n G_j(x)H_j(y)$$

egyenletet n -szeres differenciálhatóság mellett vizsgálják, de megoldást csak $F(x)$ -re nézve adnak. I. FENYŐ [22], az előzőektől sokkal általánosabban, megoldási módszert mutat (4. g)-re a disztribúció-elmélet felhasználásával. További általános vizsgálatok találhatók W. H. WILSON [79] és R. SATO [58] munkáiban. A (4. g) speciális eseteit illetően utalunk még O. HÁJEK [26] és H. P. THIELMAN [64] munkáira is. Az $F(x) \equiv 0$ esetén (4. g)-ből előálló egyenlet speciális megoldásaival foglalkozik O. SUTO [62], D. S. MITRINOVITCH [45], [46]. J. ACZÉL [3], [2] és O. E. GHEORGHIU [82], majd legutóbb ACZÉL J. [4] a problémát teljes általánosságban elintézi.

A (4. f) egyenlet komplex megoldásait [67]-ben adtuk meg, de az ott követett megoldási módszer lényegesen hosszadalmasabb.

4. 1. Jelöljön a továbbiakban Q^2 *tetszőleges kvadratikus testet*, melyben tehát minden $x^2 = a$ ($a \in Q^2$) *másodfokú egyenletnek van megoldása* és tekintsük most az

$$(4. 1) \quad S(z_1 * z_2) = S(z_1)C(z_2) + S(z_2)C(z_1)$$

$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0(*); S(z), C(z): Q_0(*) \rightarrow Q^2]$$

függvényegyenletet. Ezt röviden csak „sinus-egyenlet” néven szokás említeni. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy mivel e függvényegyenlet jobb oldala a szereplő változóknak és függvényeknek egyaránt szimmetrikus, a megoldás is nehezebbé válik. Ezekben az esetekben a $z_1 * z_2$ művelet asszociativitásának ismételt kihasználása vezet célra. Érvényes a

4. 1. TÉTEL. A $Q_0(*)$ félcsoponton érvényes (4. 1) függvényegyenlet legáltalánosabb megoldásai a következő függvények:

$$(M4. 1) \quad S(z) \equiv 0, \quad C(z) \text{ tetszőleges};$$

$$(M4. 2) \quad C(z) \equiv 0, \quad S(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha } z \in Q_{02}, \\ \text{tetszőleges}, & \text{ha } z \in (Q_0 \setminus Q_{02}), \end{cases}$$

$$(M4. 3) \quad C(z) = g(z), \quad S(z) = \begin{cases} g(z)f(z), & \text{ha } z \in (Q_0 \setminus Q_{00}), \\ G_0(z), & \text{ha } z \in \bar{Q}_{00}, \\ 0, & \text{ha } z \in (Q_{00} \setminus \bar{Q}_{00}); \end{cases}$$

$$(M4. 4) \quad S(z) = a[g_1(z) - g_2(z)], \quad C(z) = \frac{1}{2}[g_1(z) + g_2(z)];$$

ahol az $f(z)$ ill. $g(z)$, $g_1(z)$, $g_2(z)$ függvények a (2. 23) ill. (2. 26) Cauchy-egyenletet elégítik ki, $G_0(z)$ a (2. 28)-ban definiált függvény, „ a ” pedig tetszőleges konstans. Más megoldások nincsenek.

BIZONYÍTÁS. Ismét elég csak annyit bizonyítanunk, hogy a felsoroltakon kívül más megoldások nincsenek, mivel az (M4. 1)—(M4. 4) függvények valóban megoldások.

Használjuk ki a $z_1 * z_2$ művelet asszociatív és kommutatív voltát:

$$(4. 2) \quad \begin{aligned} S(z_1 * t * z_2) &= S(z_1 * t)C(z_2) + S(z_2)C(z_1 * t) = \\ &= S(z_1)C(z_2 * t) + S(z_2 * t)C(z_1), \end{aligned}$$

tehát a szokásos jelöléssel

$$(4. 3) \quad \Delta[S(z_1 * t), C(z_2)] + \Delta[C(z_1 * t), S(z_2)] = 0.$$

„Bővítjük” ezt az egyenletet $C(z)$ -vel:

$$\Delta[C(z_1 * t), C(z_2), S(z_3)] = 0,$$

mely a 2. 2. korollárium szerint az

$$(4. 1. A) \quad S(z) \equiv 0,$$

$$(4. 1. B) \quad C(z) = b_1 S(z), \quad (b_1 = \text{konst.})$$

$$(4. 1. C) \quad C(z * t) = M_1(t)S(z) + M_2(t)C(z)$$

esetek egyikét vonja maga után.

4. 1. A. Az $S(z) \equiv 0$ esetén tetszőleges $C(z)$ függvény kielégíti (4. 1)-et, tehát éppen az (M4. 1) megoldáspárt kaptuk. A továbbiakban feltesszük, hogy $S(z) \not\equiv 0$.

4. 1. B. Ha $C(z) = b_1 S(z)$, akkor (4. 1)-ből egy (2. 22) alakú

$$(4. 4) \quad S(z_1 * z_2) = 2b_1 S(z_1)S(z_2)$$

PEXIDER-egyenletet nyerünk. Itt két eset van:

$$(4. 1. B1) \quad b_1 = 0,$$

$$(4. 1. B2) \quad b_1 \neq 0.$$

4. 1. B1. Ha $b_1 = 0$, akkor valóban az (M4. 2) megoldaspárt nyerjük. A továbbiakban $S(z) \neq 0$ egyenlőtlenségen kívül $S(z_1 * z_2) \neq 0$ fennállását is feltesszük.

4. 1. B2. Ha viszont (4. 4)-ben $b_1 \neq 0$, akkor az $S(z) = \frac{1}{2b_1} g(z)$ helyettesítéssel a (2.26) CAUCHY-egyenlethez jutunk, továbbá $C(z) = \frac{1}{2} g(z)$. Ezt a megoldaspárt (M4. 4) tartalmazza, éspedig a $g_2(z) \equiv 0$ esetben. Ezzel a (4. 1. B) esetet is elintéztük, s a továbbiakban feltehetjük, hogy $\Delta(C, S) \neq 0$ is fennáll.

4. 1. C. A (4. 1. C) eset vizsgálatánál először a bal oldal szimmetriáját kihasználva a

$$(4. 5) \quad \Delta(M_1, S) + \Delta(M_2, C) = 0$$

egyenletet írjuk fel, majd ezt S -sel „bővítjük”:

$$\Delta(M_2, C, S) = 0.$$

Mivel feltevésünk szerint $\Delta(C, S) \neq 0$, innen szükségképpen

$$(4. 6) \quad M_2(z) = b_1 C(z) + b_2 S(z) \quad (b_1, b_2 = \text{konst.})$$

következik. Ennek felhasználásával (4. 5)-ből $M_1(z)$ is megadható a $C(z)$ és $S(z)$ függvények segítségével:

$$\Delta(M_1, S) + \Delta(b_1 C + b_2 S, C) = \Delta(M_1 - b_2 C, S) = 0,$$

tehát $S(z) \neq 0$ miatt

$$(4. 7) \quad M_1(z) - b_2 C(z) = b_3^2 S(z) \quad (b_3 = \text{konst.})$$

adódik.

MEGJEGYZÉS. Csupán e helyen, a (4. 7) egyenlet felírásánál, használjuk csak ki a Q^2 test kvadratikus voltát, ti. hogy a b_3^2 konstans a Q^2 test bármely eleme lehet.

A (4. 6) és (4. 7) összefüggésekkel (4. 1. C)-ből a

$$(4. 8) \quad C(z_1 * z_2) = b_1 C(z_1) C(z_2) + b_2 S(z_1) C(z_2) + b_2 S(z_2) C(z_1) + b_3^2 S(z_1) S(z_2)$$

egyenletet nyerjük.

A b_1, b_2, b_3 konstansokra további megszorításokat nyerünk, ha (4. 8)-at és (4. 1)-et a (4. 3) egyenletbe helyettesítjük (a rövidség kedvéért az $S(t) = S'$ és $C(t) = C'$ jelöléseket használjuk):

$$\begin{aligned} \Delta[S(z_1 * t), C(z_2)] + \Delta[C(z_1 * t), S(z_2)] &= \\ = \Delta(S' C + C' S, C) + \Delta(b_1 C' C + b_2 S' C + b_2 C' S + b_3^2 S' S, S) &= \\ = C' \Delta(S, C) + (b_1 C' + b_2 S') \Delta(C, S) &= \\ = [(b_1 - 1) C' + b_2 S'] \Delta(C, S) &= 0, \end{aligned}$$

tehát $\Delta(C, S) \neq 0$ miatt $b_1 = 1$ és $b_2 = 0$. Így a (4. 8) egyenletből

$$(4. 9) \quad C(z_1 * z_2) = C(z_1) C(z_2) + b_3^2 S(z_1) S(z_2)$$

adódik, ahol két esetet kell megkülönböztetnünk:

$$(4.1. C1) \quad b_3 = 0,$$

$$(4.1. C2) \quad b_3 \neq 0.$$

4.1. C1. Ha (4.9)-ben $b_3 = 0$, akkor $C(z) = g(z)$, ahol $g(z)$ a (2.26) CAUCHY-egyenletet elégíti ki. Így (4.1)-ből az

$$(4.10) \quad S(z_1 * z_2) = S(z_1)g(z_2) + S(z_2)g(z_1)$$

egyenletet nyerjük. Vezessük be az $S(z) = g(z)F(z)$ helyettesítést, akkor a

$$(4.11) \quad g(z_1)g(z_2)[F(z_1 * z_2) - F(z_1) - F(z_2)] = 0$$

egyenlethez jutunk. Tudjuk (vö. 2.4. lemma), hogy $g(z_1)g(z_2) \neq 0$, ha $z_1, z_2 \in (Q_0 \setminus Q_{00})$. Így (4.11)-ből látható, hogy e halmazon $F(z) = f(z)$, ahol $f(z)$ a (2.23) CAUCHY-egyenletet elégíti ki, s ezzel $S(z) = g(z)f(z)$. Legyen most $z_{01}, z_{02} \in Q_{00}$, $g(z_{01}) = g(z_{02}) = 0$ és (4.10) miatt $S(z_{01} * z_{02}) \equiv 0$ is fennáll, tehát $S(z) = 0$ ha $z \in Q_{002}$. Ezt felhasználva megmutatjuk végül, hogy

$$S(z) = \begin{cases} G_0(z), & \text{ha } z \in \bar{Q}_{00}, \\ 0, & \text{ha } z \in (Q_{00} \setminus \bar{Q}_{00}), \end{cases}$$

ahol $G_0(z)$ -t (2.28) értelmezni.

Válasszunk ki ugyanis egy tetszőleges $z_0 \in (Q_{00} \setminus Q_{002})$ elemet; két eset van: $z_0 = z'_{0a} \in [(Q_{00} \setminus Q_{002}) \setminus \bar{Q}_{00}]$ vagy $z_0 \in \bar{Q}_{00}$. Az első esetben értelmezés szerint van olyan $z_a \in (Q_0 \setminus Q_{00})$, hogy $z'_{0a} * z_a \in Q_{002}$, tehát (4.10) szerint

$$0 = S(z'_{0a} * z_a) = S(z'_{0a})g(z_a) + S(z_a)g(z'_{0a})$$

és $g(z'_{0a}) = 0, g(z_a) \neq 0$ miatt $S(z'_{0a}) = 0$. A második esetben viszont bármely $z_1 \in (Q_0 \setminus Q_{00})$ esetén (4.10)-ből

$$S(z_0 * z_1) = S(z_0)g(z_1) + S(z_1)g(z_0) = S(z_0)g(z_1)$$

$$[z_0, z_0 * z_1 \in \bar{Q}_{00}, z_1 \in (Q_0 \setminus Q_{00}); g(z_1) \neq 0]$$

adódik, amit éppen bizonyítani kívántunk.

A (4.1. C1) esetben tehát valóban az (M4.3) megoldáspárt nyertük.

4.1. C2. Végül a $b_3 \neq 0$ esetben (4.9) és (4.1) alapján a

$$C(z_1 * z_2) + b_3 S(z_1 * z_2) = [C(z_1) + b_3 S(z_1)][C(z_2) + b_3 S(z_2)],$$

$$C(z_1 * z_2) - b_3 S(z_1 * z_2) = [C(z_1) - b_3 S(z_1)][C(z_2) - b_3 S(z_2)]$$

CAUCHY-egyenletpárt nyerjük, tehát

$$C(z) + b_3 S(z) = g_1(z),$$

$$C(z) - b_3 S(z) = g_2(z),$$

ahol $g_1(z)$ és $g_2(z)$ a (2.26) egyenletet elégíti ki. Innen, $b_3 \neq 0$ miatt, $C(z)$ és $S(z)$ számítható, s valóban az (M4.4) alakú megoldáspárt nyerjük.

Minden esetet megvizsgáltunk és csak (M4. 1)—(M4. 4) alakú megoldásokat találtunk, tehát a tétel bizonyítása véget ért.

4. 2. A következő egyenlet, melyet vizsgálni kívánunk, a „cosinus-egyenlet” néven ismert

$$(4. 12) \quad C(z_1 * z_2) = C(z_1)C(z_2) - S(z_1)S(z_2)$$

$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0(*); C(z), S(z): Q_0(*) \rightarrow Q^2]$$

függvényegyenlet. A következőt bizonyítjuk be:

4.2. TÉTEL. *A $Q_0(*)$ Abel-félcsoporton érvényes (4. 12) függvényegyenlet legáltalánosabb megoldásai a következő függvények:*

$$(M5. 1) \quad C(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha } z \in Q_{02}, \\ \text{tetszőleges}, & \text{ha } z \in (Q_0 \setminus Q_{02}), \end{cases}$$

$$S(z) = aC(z), \quad a^2 = 1;$$

$$(M5. 2) \quad C(z) = \frac{1}{2b} [(a+b)g_2(z) - (a-b)g_1(z)],$$

$$S(z) = \frac{1}{2b} [g_1(z) - g_2(z)], \quad a^2 - b^2 = 1, \quad b \neq 0;$$

$$(M5. 3) \quad C(z) = \begin{cases} g(z)[1 \pm f(z)], & \text{ha } z \in Q_0 \setminus Q_{00}, \\ \pm G_0(z), & \text{ha } z \in \bar{Q}_{00}, \\ 0, & \text{ha } z \in (Q_{00} \setminus \bar{Q}_{00}), \end{cases}$$

$$S(z) = \begin{cases} g(z)f(z), & \text{ha } z \in (Q_0 \setminus Q_{00}), \\ G_0(z), & \text{ha } z \in \bar{Q}_{00}, \\ 0, & \text{ha } z \in (Q_{00} \setminus \bar{Q}_{00}); \end{cases}$$

ahol az $f(z)$ ill. $g(z)$, $g_1(z)$, $g_2(z)$ függvények a (2. 23) ill. (2. 26) Cauchy-egyenletet elégítik ki, $G_0(z)$ a (2. 28)-ban definiált függvény, a és b pedig tetszőleges konstansok a feltüntetett megszorítással. Más megoldások nincsenek.

BIZONYÍTÁS. Mivel az (M5. 1)—(M5. 3) függvények valóban megoldások, itt is elég csak annyit bizonyítanunk, hogy a felsoroltakon kívül más megoldások nincsenek.

A szokásos módon $z_1 * z_2$ asszociatív voltát kihasználva a

$$(4. 13) \quad \Delta[C(z_1 * t), C(z_2)] + \Delta[S(z_1), S(z_2 * t)] = 0$$

egyenlethez jutunk, melyet $C(z)$ -vel „bővítünk”:

$$-\Delta[S(z_1 * t), S(z_2), C(z_3)] = 0.$$

Ez a 2. 2. korollárium szerint csak a

$$(4. 2. A) \quad C(z) \equiv 0,$$

$$(4. 2. B) \quad S(z) = b_1 C(z), \quad (b_1 = \text{konst.})$$

$$(4. 2. C) \quad S(z * t) = M_1(t) S(z) + M_2(t) C(z)$$

esetekben állhat fenn.

4. 2. A. A $C(z) \equiv 0$ esetén (4. 12)-ből $S(z_1)S(z_2) = 0$ adódik, tehát $S(z) \equiv 0$. Ezt a megoldáspárt az (M5. 2) a $g_1(z) \equiv g_2(z) \equiv 0$ ill. (M5. 3) a $g(z) \equiv 0$ és $G_0(z) \equiv 0$ esetekben tartalmazza. A továbbiakban feltesszük, hogy $C(z) \neq 0$.

4. 2. B. Ha (4. 12)-ben $S(z) = b_1 C(z)$, akkor a

$$(4. 14) \quad C(z_1 * z_2) = (1 - b_1^2) C(z_1) C(z_2)$$

PEXIDER-egyenlethez jutunk, ahol két esetet kell megkülönböztetnünk:

$$(4. 2. B1) \quad 1 - b_1^2 = 0,$$

$$(4. 2. B2) \quad 1 - b_1^2 \neq 0.$$

4. 2. B1. Ha (4. 14)-ben $1 - b_1^2 = 0$, kapjuk az (M5. 1) megoldáspárt. A továbbiakban $C(z) \neq 0$ mellett $C(z_1 * z_2) \neq 0$ teljesülését is feltételezzük.

4. 2. B2. Legyen (4. 14)-ben $1 - b_1^2 \neq 0$, akkor a $C(z) = g(z)/(1 - b_1^2)$ helyettesítéssel a (2. 26) CAUCHY-egyenletet nyerjük; továbbá $S(z) = b_1 g(z)/(1 - b_1^2)$. E megoldáspárt (M5. 2) tartalmazza, éspedig $b_1 = 0$ esetén a $g_1(z) \equiv g_2(z)$, ill. $b_1 \neq 0$ esetén pedig a $g_2(z) \equiv 0$, $a = -(b_1^2 + 1)/2b_1$, $b = (1 - b_1^2)/2b_1$ választással és a konstansokra tett megszorítás is teljesül.

A továbbiakban feltesszük, hogy $\Delta(S, C) \neq 0$.

4. 2. C. A (4. 2. C) egyenletnél először a $z_1 * z_2$ művelet kommutativitását kihasználva a

$$(4. 15) \quad \Delta(M_1, S) + \Delta(M_2, C) = 0,$$

majd ezt C -vel „bővítve” a

$$\Delta(M_1, S, C) = 0$$

egyenlethez jutunk. Mivel $\Delta(S, C) \neq 0$, ez csak az

$$(4. 16) \quad M_1(z) = b_1 S(z) + b_2 C(z) \quad (b_1, b_2 = \text{konst.})$$

esetben állhat fenn. Most (4. 16)-ot (4. 15)-be írva M_2 -re adhatunk hasonló kifejezést:

$$\Delta(b_1 S + b_2 C, S) + \Delta(M_2, C) = \Delta(M_2 - b_2 S, C) = 0,$$

tehát $C(z) \neq 0$ miatt

$$(4. 17) \quad M_2(z) - b_2 S(z) = b_3 C(z) \quad (b_3 = \text{konst.}).$$

A (4. 16) és (4. 17) függvényekkel (4. 2. C)-ből az

$$(4. 18) \quad S(z_1 * z_2) = b_1 S(z_1) S(z_2) + b_2 S(z_1) C(z_2) + \\ + b_2 S(z_2) C(z_1) + b_3 C(z_1) C(z_2)$$

egyenletet nyerjük. A (4. 12) és (4. 18) egyenleteket (4. 13)-ba írva — közben itt is a rövidebb $C(t) = C'$ és $S(t) = S'$ jelöléseket használva — a b_1, b_2, b_3 konstansokra kapunk további megszorításokat:

$$\begin{aligned} \Delta[C(z_1 * t), C(z_2)] + \Delta[S(z_1), S(z_2 * t)] &= \\ &= \Delta(C'C - S'S, C) + \Delta(S, b_1 S'S + b_2 C'S + b_2 S'C + b_3 C'C) = \\ &= -S'\Delta(S, C) + (b_2 S' + b_3 C')\Delta(S, C) = [(b_2 - 1)S' + b_3 C']\Delta(S, C) = 0. \end{aligned}$$

Mivel $\Delta(S, C) \neq 0$, innen $b_2 = 1$ és $b_3 = 0$ következik, s így (4. 18)-ból az

$$(4. 19) \quad S(z_1 * z_2) = b_1 S(z_1) S(z_2) + S(z_1) C(z_2) + S(z_2) C(z_1)$$

egyenletet nyerjük.

Most azt kívánjuk elérni, hogy alkalmas k konstansok megválasztásával

$$(4. 20) \quad C(z_1 * z_2) + k S(z_1 * z_2) = [C(z_1) + k S(z_1)][C(z_2) + k S(z_2)]$$

típusú CAUCHY-egyenleteket írjunk fel. Egyrészt helyettesítsük a (4. 12) és (4. 19) egyenleteket (4. 20)-ba, másrészt végezzük el a jobb oldalon a szorzást:

$$\begin{aligned} C(z_1)C(z_2) - S(z_1)S(z_2) + kb_1 S(z_1)S(z_2) + k[S(z_1)C(z_2) + S(z_2)C(z_1)] &= \\ = C(z_1)C(z_2) + k[S(z_1)C(z_2) + S(z_2)C(z_1)] + k^2 S(z_1)S(z_2), \end{aligned}$$

tehát $S(z_1)S(z_2) \neq 0$ miatt a

$$(4. 21) \quad k^2 - b_1 k + 1 = 0$$

egyenlethez jutunk. Feltevésünk szerint a Q^2 test kvadratikus, tehát a (4. 21) egyenletnek is mindig van (legalább egy) megoldása. Két esetet kell megkülönböztetnünk:

(4. 2. C1) $k_1 \neq k_2$, két különböző megoldása van (4. 21)-nek;

(4. 2. C2) csak egy k_0 megoldása van (4. 21)-nek.

4. 2. C1. Ha $k_1 \neq k_2$ (4. 21) megoldásai, akkor (4. 20) miatt

$$C(z) + k_1 S(z) = g_1(z),$$

$$C(z) + k_2 S(z) = g_2(z),$$

ahol $g_1(z)$ és $g_2(z)$ a (2. 26) CAUCHY-egyenletet elégítik ki. Bevezetve itt a $k_1 - k_2 = = 2b \neq 0$, $k_1 + k_2 = 2a$ jelöléseket

$$C(z) = \frac{1}{2b} [(a+b)g_2(z) - (a-b)g_1(z)],$$

$$S(z) = \frac{1}{2b} [g_1(z) - g_2(z)].$$

E függvényeket (4. 12)-be írva:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2b} [(a+b)g_2(z_1 * z_2) - (a-b)g_1(z_1 * z_2)] = \\ & = \frac{1}{4b^2} [(a+b)g_2(z_1) - (a-b)g_1(z_1)][(a+b)g_2(z_2) - (a-b)g_1(z_2)] - \\ & \quad - \frac{1}{4b^2} [g_1(z_1) - g_2(z_1)][g_1(z_2) - g_2(z_2)], \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4b^2} [(a+b)^2 - 1 - 2b(a+b)]g_2(z_1)g_2(z_2) + \frac{1}{4b^2} [(a-b)^2 - 1 + 2b(a-b)]g_1(z_1)g_1(z_2) + \\ & \quad + \frac{1}{4b^2} [-(a^2 - b^2) + 1][g_2(z_1)g_1(z_2) + g_1(z_1)g_2(z_2)] = \\ & = \frac{a^2 - b^2 - 1}{4b^2} [g_1(z_1) - g_2(z_1)][g_1(z_2) - g_2(z_2)] = (a^2 - b^2 - 1)S(z_1)S(z_2) \equiv 0, \end{aligned}$$

azaz $S(z) \neq 0$ miatt $a^2 - b^2 = 1$ kell legyen. Így valóban az (M5. 2) megoldásrendszer nyertük.

4. 2. C2. Ha a (4. 21) egyenletnek csak egy $k_0 (\neq 0)$ megoldása van, akkor nyilván $b_1 = 2k_0$, $k_0 = 1$ vagy $k_0 = -1$ és (4. 20) miatt

$$(4. 22) \quad C(z) + k_0 S(z) = g(z),$$

ahol $g(z)$ a (2. 26) CAUCHY-egyenletet elégíti ki. A (4. 19) és (4. 22) egyenletből

$$\begin{aligned} S(z_1 * z_2) &= (b_1 - 2k_0) S(z_1) S(z_2) + S(z_1)g(z_2) + S(z_2)g(z_1) = \\ &= S(z_1)g(z_2) + S(z_2)g(z_1) \end{aligned}$$

következik. Ezt az egyenletet viszont 4. 1. C1.-ben [vö. (4. 10)] a most is érvényes $S(z) \neq 0$ feltétel mellett már megoldottuk, tehát (4. 22)-t is felhasználva a nyert megoldások valóban (M5. 3) alakúak. A megoldásokban szereplő \pm előjel úgy értendő, hogy egy megoldáson belül csak az egyiket vehetjük, mivel lényegében két külön esetről van szó. Egyszerű számítás mutatja, hogy az (M5. 3) alakú függvények valóban megoldások is.

Mivel minden esetet megvizsgáltunk, a tétel bizonyítása véget ért.

4. 3. A (4. 1) és (4. 12), s még több más hasonló típusú függvényegyenlet közös általánosítása az

$$(4. 23) \quad F(z_1 * z_2) = G(z_1)H(z_2) + K(z_1)L(z_2)$$

$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0''(*); F(z), G(z), H(z), K(z), L(z): Q_0''(*) \rightarrow Q^2]$$

egyenlet, mely (2. 29)-nek speciális esete ($n=2$). Az esetszétválasztások nagy számát elkerülendő, ennél az egyenletnél két egyszerűsítő feltevéssel élünk. Egyrészt a

$Q_0''(*)$ alaphalmazról feltesszük, hogy bármely z eleme $z_1 * z_2$ alakban is felírható, másrészt a (4. 23) egyenletet csak a

$$(4. 24) \quad \Delta(G, K, 1) \neq 0,$$

$$(4. 25) \quad \Delta(H, L, 1) \neq 0$$

feltételek teljesülése esetén tárgyaljuk. Ez utóbbi megszorítás azonban nem csorbitja az általánosságot. Ugyanis ha pl. $\Delta(G, K, 1) \equiv 0$, akkor vagy $K(z) \equiv k$ (konst.), vagy $G(z) = k_1 K(z) + k_2$ ($k_1, k_2 = \text{konst.}$), de mindkét esetben (4. 23) a már megoldott (3. 1) egyenlet egy-egy speciális esetére redukálódik:

$$F(z_1 * z_2) = G(z_1)H(z_2) + kL(z_2),$$

$$F(z_1 * z_2) = K(z_1)[k_1 H(z_2) + L(z_2)] + k_2 H(z_2),$$

melyek megoldásait már könnyen felírhatjuk. Teljesen hasonló a helyzet a $\Delta(H, L, 1) \equiv 0$ esetben is.

4. 3. TÉTEL. *A $Q_0''(*)$ Abel-félcsoporton érvényes (4. 23) függvényegyenlet összes olyan megoldásai, melyek a (4. 24) és (4. 25) feltételeket is kielégítik, csak a következő alakú függvények lehetnek:*

$$(M6. 1) \quad \begin{aligned} G(z) &= c_1 C_1(z), \\ H(z) &= c_2 C_1(z) + c_3 S_1(z), \\ K(z) &= c_4 C_1(z) + c_5 S_1(z), \\ L(z) &= c_6 C_1(z) + c_7 S_1(z), \\ \Delta[C_1(z_1), S_1(z_2)] &\neq 0; \end{aligned}$$

$$(M6. 2) \quad \begin{aligned} G(z) &= S_2(z), \\ H(z) &= c_1 S_2(z) + c_2 C_2(z), \\ K(z) &= c_3 S_2(z) + c_4 C_2(z), \\ L(z) &= c_5 S_2(z) + c_6 C_2(z), \\ \Delta[S_2(z_1), C_2(z_2)] &\neq 0; \end{aligned}$$

$$(M6. 3) \quad \begin{aligned} F(z_1 * z_2) &= c_1 c_2 g_1(z_1 * z_2) + c_5 c_6 g_2(z_1 * z_2), \\ G(z) &= c_1 g_1(z), \\ H(z) &= c_2 g_1(z) + c_3 g_2(z), \\ K(z) &= c_4 g_1(z) + c_5 g_2(z), \\ L(z) &= c_6 g_2(z), \\ c_1 c_3 + c_4 c_6 &= 0, \quad c_1 c_2 c_5 c_6 \neq 0; \\ \Delta[g_1(z_1), g_2(z_2), 1] &\neq 0; \end{aligned}$$

$$(M6.4) \quad F(z_1 * z_2) = \begin{cases} [c_4 c_2^2 + 2c_1 c_2 c_3 + c_1 c_2 f(z_1 * z_2)] g(z_1 * z_2), & \text{ha } z_1 * z_2 \in (Q_0'' \setminus Q_{00}''), \\ c_1 c_2 G_0(z_1) g(z_2), & \text{ha } z_1 * z_2 \in \bar{Q}_{00}'' \text{ és } z_1 \in \bar{Q}_{00}'', z_2 \in (Q_0'' \setminus Q_{00}''), \\ 0, & \text{ha } z_1 * z_2 \in (Q_{00}'' \setminus \bar{Q}_{00}''); \end{cases}$$

$$G(z) = c_1 c_2 g(z),$$

$$H(z) = \begin{cases} [c_3 + f(z)] g(z), & \text{ha } z \in (Q_0'' \setminus Q_{00}''), \\ G_0(z), & \text{ha } z \in \bar{Q}_{00}'', \\ 0, & \text{ha } z \in (Q_{00}'' \setminus \bar{Q}_{00}''), \end{cases}$$

$$K(z) = \begin{cases} [c_4 c_2 + c_1 c_3 + c_1 f(z)] g(z), & \text{ha } z \in (Q_0'' \setminus Q_{00}''), \\ c_1 G_0(z), & \text{ha } z \in \bar{Q}_{00}'', \\ 0, & \text{ha } z \in (Q_{00}'' \setminus \bar{Q}_{00}''), \end{cases}$$

$$L(z) = c_2 g(z),$$

$$\Delta[g(z_1), 1] \neq 0, \quad c_1 c_2 \neq 0;$$

ahol $C_1(z)$ és $S_1(z)$ a (4. 12) *cosinus-egyenletet*, $S_2(z)$ és $C_2(z)$ a (4. 1) *sinus-egyenletet*, $g_1(z)$, $g_2(z)$, és $g(z)$ ill. $f(z)$ a (2. 26) ill. (2. 23) *Cauchy-egyenletet kielégítő függvények*, a c_i ($i=1, 2, \dots, 6$) pedig Q^2 -beli konstansok. Az (M6. 3) és (M6. 4) alatti függvények valóban megoldások is, míg az (M6. 1) és (M6. 2) alatt felsoroltak csak a konstansok megfelelő specializálása mellett elégítik ki (4. 23)-at. A konstansok specializálására, valamint a hiányzó $F(z_1 * z_2)$ függvény meghatározására később visszatérünk.

BIZONYÍTÁS. Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy az (M6. 3) és (M6. 4) alatti függvények valóban kielégítik (4. 23)-at. Így csak azt kell bizonyítanunk, hogy ezeken, továbbá az (M6. 1)—(M6. 2) alatt felsorolt típusokon kívül más megoldások nem lehetnek.

A (4. 23) egyenlet bal oldalának szimmetriája alapján

$$(4. 27) \quad \Delta(G, H) + \Delta(K, L) = 0,$$

majd ezt $L(z)$ -vel bővítve

$$\Delta(G, H, L) = 0$$

és (4. 25) miatt csak a

$$(4. 28) \quad G(z) = b_1 H(z) + b_2 L(z) \quad (b_1, b_2 = \text{konst.})$$

eset állhat fenn. Nyilván b_1 és b_2 egyidejűleg nem zérus, mert ez ellentmondana (4. 24)-nek.

A (4. 28)-at (4. 27)-be írjuk.

$$\Delta(b_1 H + b_2 L, H) + \Delta(K, L) = \Delta(K - b_2 H, L) = 0,$$

tehát (4. 25) miatt csak a

$$(4. 29) \quad K(z) - b_2 H(z) = b_3 L(z) \quad (b_3 = \text{konst.})$$

eset jön szóba. A b_2 és b_3 itt sem lehet egyidejűleg zérus.

Helyettesítsük a (4. 28) és (4. 29) összefüggéseket (4. 23)-ba:

$$(4. 30) \quad F(z_1 * z_2) = b_1 H(z_1) H(z_2) + b_2 H(z_1) L(z_2) + \\ + b_2 H(z_2) L(z_1) + b_3 L(z_1) L(z_2).$$

Most a $z_1 * z_2$ művelet asszociativitása és kommutativitása alapján a szokásos módon a

$$(4. 31) \quad \Delta[b_1 H(z_1 * t) + b_2 L(z_1 * t), H(z_2)] + \\ + \Delta[b_2 H(z_1 * t) + b_3 L(z_1 * t), L(z_2)] = 0$$

egyenlethez jutunk, melyet $L(z)$ -vel „bővítünk”:

$$\Delta[b_1 H(z_1 * t) + b_2 L(z_1 * t), H(z_2), L(z_3)] = 0.$$

Látható, hogy (4. 25) miatt csak a

$$(4. 32) \quad b_1 H(z * t) + b_2 L(z * t) = M_1(t) H(z) + M_2(t) L(z)$$

megoldást kell vennünk. Ezek szerint viszont

$$(4. 33) \quad \Delta(M_1, H) + \Delta(M_2, L) = 0,$$

majd $L(z)$ -vel „bővítve”

$$\Delta(M_1, H, L) = 0$$

is fennáll. Innen (4. 25) miatt

$$(4. 34) \quad M_1(z) = b_4 H(z) + b_5 L(z),$$

s (4. 33) szerint hasonlóan

$$\Delta(b_4 H + b_5 L, H) + \Delta(M_2, L) = \Delta(M_2 - b_5 H, L) = 0,$$

$$(4. 35) \quad M_2(z) - b_5 H(z) = b_6 L(z) \quad (b_5, b_6 = \text{konst.})$$

írható. A (4. 34) és (4. 35) egyenletek segítségével (4. 32) már csak két ismeretlen függvényt tartalmaz:

$$b_1 H(z * t) + b_2 L(z * t) = \\ = b_4 H(z) H(t) + b_5 H(z) L(t) + b_5 H(t) L(z) + b_6 L(z) L(t).$$

Írjuk a rövidség kedvéért ezt az egyenletet a

$$(4. 36) \quad b_1 H'' + b_2 L'' = b_4 H H' + b_5 (H L' + L H') + b_6 L L'$$

alakba, ahol tehát az $M'' = M(z * t)$, $M = M(z)$, $M' = M(t)$ ($M = H, L$) jelöléseket használtuk.

Most a (4. 36) egyenlet megoldását azzal kezdjük, hogy keresünk olyan $d_1 \neq 0$, d_2, d_3 elemhármast, mellyel ez az egyenlet a

$$(4. 37) \quad d_1 (b_1 H'' + b_2 L'') = \\ = d_1^2 (b_1 H + b_2 L) (b_1 H' + b_2 L') - (d_2 H + d_3 L) (d_2 H' + d_3 L')$$

alakba írható át, vagy ha ilyen elemhármass nincsen akkor olyan d_4, d_5 elempárt, mellyel ugyanez az egyenlet a

$$(4.38) \quad \begin{aligned} b_1 H'' + b_2 L'' &= \\ &= (b_1 H + b_2 L)(d_4 H' + d_5 L') + (d_4 H + d_5 L)(b_1 H' + b_2 L') \end{aligned}$$

alakba írható. Ha van a mondott tulajdonságú $d_1 \neq 0, d_2, d_3$ elemhármass, akkor az mindenesetre kielégíti a (4.36) és (4.37) jobb oldalainak összehasonlításából $\Delta(H, L) \neq 0$ miatt adódó

$$(4.39) \quad \begin{cases} b_1^2 d_1^2 - d_2^2 = b_4 d_1, \\ b_1 b_2 d_1^2 - d_2 d_3 = b_5 d_1, \\ b_2^2 d_1^2 - d_3^2 = b_6 d_1 \end{cases}$$

egyenletrendszer. Innen d_1 -et kívánjuk kiszámítani, tehát

$$\begin{aligned} (b_1 b_2 d_1^2 - b_5 d_1)^2 &= (d_2 d_3)^2 = (b_1^2 d_1^2 - b_4 d_1)(b_2^2 d_1^2 - b_6 d_1) \\ d_1^2 [d_1 (b_2^2 b_4 + b_1^2 b_6 - 2b_1 b_2 b_5) + (b_5^2 - b_4 b_6)] &= 0. \end{aligned}$$

Mivel csak $d_1 \neq 0$ megoldásokat keresünk a

$$(4.3.A) \quad b_5^2 - b_4 b_6 \neq 0$$

$$(4.3.B) \quad b_5^2 - b_4 b_6 = 0$$

eseteket kell vizsgálnunk.

4.3.A. A $b_5^2 - b_4 b_6 \neq 0$ esetben is csak akkor van $d_1 \neq 0$ megoldás, ha

$$(4.3.A1) \quad b_2^2 b_4 + b_1^2 b_6 - 2b_1 b_2 b_5 \neq 0,$$

s emellett még külön kell vizsgálnunk a

$$(4.3.A2) \quad b_2^2 b_4 + b_1^2 b_6 - 2b_1 b_2 b_5 = 0$$

esetet is.

4.3.A1. Ha tehát van $d_1 \neq 0$ megoldása a (4.39) rendszernek, akkor (4.37)-ből a

$$(4.40) \quad \begin{cases} b_1 H(z) + b_2 L(z) = \frac{1}{d_1} C(z), \\ d_2 H(z) + b_3 L(z) = S(z) \end{cases}$$

helyettesítésekkel egy (4.12) alakú cosinus-egyenletet kapunk, ahol a következő két esetet vizsgáljuk:

$$(4.3.A1a) \quad b_1 d_3 - b_2 d_2 = 0,$$

$$(4.3.A1b) \quad b_1 d_3 - b_2 d_2 \neq 0.$$

4.3.A1a. Ha (4.40) megoldható a $H(z)$ és $L(z)$ függvényekre nézve, akkor azok valóban $C(z)$ és $S(z)$ lineáris kombinációjaként állíthatók elő, ahol a $C(z)$ és $S(z)$ függvények a (4.12) cosinus-egyenletet elégték ki:

$$\begin{cases} H(z) = c_2 C(z) + c_3 S(z), \\ L(z) = c_6 C(z) + c_7 S(z), \end{cases} \quad (c_2 c_3, c_6, c_7 \neq \text{konst.}).$$

Egyben (4. 40)-ből látható, hogy $\Delta(H, L) \neq 0$ miatt $\Delta(C, S) \neq 0$ is fennáll. E megoldásokkal (4. 28)- ill. (4. 29)-ből

$$G(z) = c_1 C(z), \quad K(z) = c_4 C(z) + c_5 S(z)$$

lesz. Így tehát valóban (M6. 1) típusú megoldásokat nyertünk.

4. 3. A1b. Könnyen belátható, hogy $b_1 d_3 - b_2 d_2 = 0$ lehetetlen. Szorozzuk meg ugyanis a (4. 39) egyenleteket rendre $b_2^2, b_1 b_2, b_1^2$ -tel és írjunk $b_1 d_3$ helyett mindenütt $b_2 d_2$ -t, akkor $d_1 \neq 0$ miatt

$$b_2^2 b_4 = b_1 b_2 b_5 = b_1^2 b_6$$

adódik, de ez (4. 3. A1) miatt lehetetlen.

4. 3. A2. Megmutatjuk, hogy ha a konstansokra (4. 3. A2) teljesül, akkor a (4. 36) egyenlet éppen (4. 38)-ba írható át. Hasonlítsuk össze (4. 36) és (4. 38) jobb oldalait, akkor $\Delta(H, L) \neq 0$ miatt a d_4, d_5 ismeretlenek meghatározására a

$$(4. 41) \quad \begin{cases} 2b_1 d_4 - b_4 = 0, \\ b_2 d_4 + b_1 d_5 - b_5 = 0, \\ 2b_2 d_5 - b_6 = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer nyerjük. A $d_4, d_5, 1$ ismeretlenekre nézve akkor és csak akkor van nem-triviális megoldás, ha

$$\begin{vmatrix} 2b_1 & 0 & -b_4 \\ b_2 & b_1 & -b_5 \\ 0 & 2b_2 & -b_6 \end{vmatrix} = -2(b_1^2 b_6 + b_2^2 b_4 - 2b_1 b_2 b_5) = 0$$

fennáll, ez viszont éppen (4. 3. A2).

A (4. 38) egyenlet megoldásai

$$(4. 42) \quad \begin{cases} b_1 H(z) + b_2 L(z) = S(z), \\ d_4 H(z) + d_5 L(z) = C(z) \end{cases}$$

alakúak, ahol az $S(z)$ és $C(z)$ függvények a (4. 1) sinus-egyenletet elégítik ki. Itt is két esetet kell megvizsgálnunk:

$$(4. 3. A2a) \quad b_1 d_5 - b_2 d_4 \neq 0,$$

$$(4. 3. A2b) \quad b_1 d_5 - b_2 d_4 = 0.$$

4. 3. A2a. Ha (4. 42) megoldható a $H(z)$ és $L(z)$ függvényekre nézve, akkor azok valóban $S(z)$ és $C(z)$ lineáris kombinációiként állíthatók elő:

$$H(z) = c_1 S(z) + c_2 C(z),$$

$$L(z) = c_5 S(z) + c_6 C(z).$$

Egyben (4. 42)-ből látható, hogy $\Delta(H, L) \neq 0$ miatt $\Delta(C, S) \neq 0$ is fennáll. E megoldásokkal (4. 28)- ill. (4. 29)-ből

$$G(z) = c_3 S(z), \quad K(z) = c_3 S(z) + c_4 C(z)$$

adódik. Így tehát valóban (M6. 2) típusú megoldásokat nyertünk.

4. 3. A2b. Könnyen látható, hogy a $b_1d_5 - b_2d_4 = 0$ eset nem állhat fenn. Ekkor ugyanis a (4. 41) egyenletrendszer alapján

$$b_4b_6 = 4b_1b_2d_4d_5 = 4b_2^2d_4^2 = (b_2d_4 + b_1d_5)^2 = b_5^2$$

írható, de ez ellentmond (4. 3. A)-nak.

Ezzel a (4. 3. A) esetet letárgyaltuk.

4. 3. B. A $b_5^2 - b_4b_6 = 0$ esetben két esetet kell vizsgálnunk:

$$(4. 3. B1) \quad b_4 = 0,$$

$$(4. 3. B2) \quad b_4 \neq 0.$$

4. 3. B1. Ha $b_4 = 0$, akkor $b_5 = 0$ is áll, s (4. 36) a

$$(4. 43) \quad b_1H(z * t) + b_2L(z * t) = b_6L(z)L(t)$$

(2. 26) alakú PEXIDER-egyenletre egyszerűsödik. Feltevésünk szerint $Q_0''(*)$ -ban bármely z_1 felírható $z_1 = z * t$ alakban is, tehát $b_1H'' + b_2L'' \equiv 0$ maga után vonja a kizárt $b_1H + b_2L \equiv 0$ (b_1, b_2 egyidejűleg nem zérus) esetet is. Ezért $b_6 \neq 0$. Így (4. 43)-ból $L(z) = cg(z) \neq 0$ és $b_1H(z) + b_2L(z) = b_6c^2g(z) \neq 0$ következik, ahol $g(z)$ a (2. 26) CAUCHY-egyenletet elégíti ki. Viszont ekkor $\Delta(H, L) \neq 0$ miatt szükségképpen $b_1 = 0$ és $b_2 \neq 0$. Ezeket figyelembe véve (4. 30)-ból

$$(4. 44) \quad F(z_1 * z_2) = b_2cH(z_1)g(z_2) + b_2cH(z_2)g(z_1) + b_3c^2g(z_1 * z_2)$$

adódik. Használjuk most ki a $z_1 * z_2$ művelet asszociatív és kommutatív voltát:

$$b_2c\Delta[H(z_1 * t), g(z_2)] + b_2c\Delta[g(t)g(z_1), H(z_2)] = 0,$$

s $b_2c \neq 0$ miatt

$$\Delta[H(z_1 * t) - g(t)H(z_1), g(z_2)] = 0,$$

tehát $g(z) \neq 0$ folytán

$$(4. 45) \quad H(z * t) - g(t)H(z) = M(t)g(z).$$

A $z * t$ művelet kommutativitása alapján

$$\Delta(g, H) + \Delta(M, g) = \Delta(M - H, g) = 0,$$

$$M(z) = H(z) + bg(z) \quad (b = \text{konst.}),$$

s ezzel (4. 45)-ből

$$H(z * t) + bg(z * t) = [H(z) + bg(z)]g(t) + [H(t) + bg(t)]g(z)$$

lesz, mely pontosan (4. 10) alakú egyenlet. A megoldás tehát, mint 4. 1. C1.-ben láttuk,

$$H(z) = \begin{cases} -bg(z) + g(z)f(z), & \text{ha } z \in (Q_0'' \setminus \bar{Q}_0''), \\ G_0(z), & \text{ha } z \in \bar{Q}_0'', \\ 0, & \text{ha } z \in (Q_0'' \setminus \bar{Q}_0''). \end{cases}$$

A $H(z)$ függvény ismeretében (4. 44)-ből

$$F(z_1 * z_2) = \begin{cases} [b_3 c^2 - 2bb_2 c + b_2 c f(z_1 * z_2)]g(z_1 * z_2), & \text{ha } z_1 * z_2 \in (Q_0'' \setminus Q_{00}''), \\ b_2 c G_0(z_1)g(z_2), & \text{ha } z_1 * z_2 \in \bar{Q}_{00}'', z_1 \in \bar{Q}_{00}'', z_2 \in Q_0'' \setminus Q_{00}'', \\ 0, & \text{ha } z_1 * z_2 \in (Q_{00}'' \setminus \bar{Q}_{00}'') \end{cases}$$

adódik, továbbá (4. 28) és (4. 29) alapján

$$G(z) = b_2 c g(z),$$

$$K(z) = \begin{cases} (b_3 c - b_2 b)g(z) + b_2 g(z)f(z), & \text{ha } z \in (Q_0'' \setminus \bar{Q}_{00}''), \\ b_2 G_0(z), & z \in \bar{Q}_{00}'', \\ 0, & \text{ha } z \in (Q_{00}'' \setminus \bar{Q}_{00}''). \end{cases}$$

E megoldások (4. 23)-at kielégítik és a konstansok megfelelő átírása után valóban (M6. 4) alakúak.

4. 3. B2. Legyen végül (4. 36)-ban $b_4 \neq 0$. Akkor (4. 3. B) miatt

$$(4. 46) \quad b_4(b_1 H'' + b_2 L'') = (b_4 H + b_5 L)(b_4 H' + b_5 L')$$

adódik, mely (2. 22) alakú PEXIDER-egyenlet. A 2. 4. tételben felsorolt megoldások közül az (M1. 1) és (M1. 2) figyelmen kívül marad, mivel $\Delta(H, L) \neq 0$. Hasonlóan nem jön szóba (M1. 4) sem, mivel $Q_0''(*)$ -ban nincs prímelem (tehát nincs közömbös részhalmaz sem). Az (M1. 3) megoldás alapján (4. 46)-ból

$$\left. \begin{aligned} b_1 H(z) + b_2 L(z) &= \frac{c^2}{b_4} g_1(z) \neq 0, \\ b_4 H(z) + b_5 L(z) &= c g_1(z) \end{aligned} \right\} \quad (c = \text{konst.})$$

adódik, s így $\Delta(H, L) \neq 0$ miatt $c = b_1$ és $cb_5 = b_2 b_4$. Innen

$$H(z) = \frac{c}{b_4} g_1(z) - \frac{b_2}{c} L(z),$$

továbbá (4. 28) és (4. 29) alapján

$$G(z) = \frac{c^2}{b_4} g_1(z), \quad K(z) = \frac{b_2 c}{b_4} g_1(z) + \frac{cb_3 - b_2^2}{c} L(z)$$

írható. E megoldásokkal (4. 23) az

$$F(z_1 * z_2) - \frac{c^3}{b_4^2} g_1(z_1 * z_2) = \frac{cb_3 - b_2^2}{c} L(z_1)L(z_2)$$

(2. 22) alakú PEXIDER-egyenletre egyszerűsödik.

Látható, hogy itt a $cb_3 - b_2^2 = 0$ eset $\Delta(G, K) \neq 0$ miatt figyelmen kívül marad. Ha viszont $cb_3 - b_2^2 \neq 0$, akkor a megoldások

$$L(z) = bg_2(z), \quad (b = \text{konst.})$$

$$F(z_1 * z_2) = \frac{c^3}{b_4^2} g_1(z_1 * z_2) + \frac{(cb_3 - b_2^2)b^2}{c} g_2(z_1 * z_2),$$

ahol $g_2(z)$ is (2. 26)-ot kielégítő függvény.

Így valóban az (M6. 3) megoldásokat nyertük és a konstansokra tett megszorítások is érvényesek.

Minden esetet megvizsgáltunk, így a tétel bizonyítása véget ért.

MEGJEGYZÉS. Szembetűnő, hogy a $Q_0''(*)$ alaphalmaznak azt a tulajdonságát, hogy nincs benne prímelem, csak a (4. 3. B1) és (4. 3. B2) esetek vizsgálatánál használtuk ki.

5. §. Függvényegyenletek, melyekben ismert függvények is szerepelnek

Külön figyelmet érdemelnek azok a (2.29) típusú függvényegyenletek, melyeknél a jobb oldalon már *ismert tulajdonságú* függvények is, vagy csak ilyenek állnak. Az ismert tulajdonság alatt azt fogjuk érteni, hogy e függvények egy megadott (az eredetinel általában egyszerűbb típusú) függvényegyenletet elégítenek ki, tehát azoknak (tetszőleges) megoldását képezik.

Itt is használni fogjuk az $M'' = M(z * t)$, $M' = M(t)$, $M = M(z)$ jelöléseket. Az e §-ban tárgyalt egyenletek néhány speciális esete J. ACZÉL [2] könyvében található.

5. 1. Vizsgáljuk először az

$$(5. 1) \quad F(z * t) = a_1 C(z) C(t) + a_2 C(z) S(t) + a_3 S(z) C(t) + a_4 S(z) S(t) \\ [F(z), C(z), S(z): Q_0(*) \rightarrow Q]$$

függvényegyenletet, ahol a C, S függvénytér a (4. 12) cosinus-egyenletet elégíti ki:

$$(5. 2) \quad C(z * t) = C(z) C(t) - S(z) S(t) \quad [C(z), S(z): Q_0(*) \rightarrow Q]$$

a_1, a_2, a_3, a_4 pedig konstansok. Nyilván elegendő arra az esetre szorítkozni, amikor $\Delta(C, S) \neq 0$, különben (5. 1) egy (2. 22) alakú PEXIDER-egyenletre egyszerűsödne. A $\Delta(C, S) \neq 0$ esetén viszont (5. 2)-ből

$$(5. 3) \quad S(z * t) = bS(z) S(t) + S(z) C(t) + C(z) S(t) \quad (b = \text{konst.})$$

következik, mint azt 4. 2. C.-ben már láttuk. Így érvényes az

5. 1. TÉTEL. *Ha a $Q_0(*)$ Abel-félcsoporton érvényes (5. 2) és (5. 3) egyenleteket kielégítő $C(z), S(z)$ függvények lineárisan függetlenek, azaz ha $\Delta(C, S) \neq 0$, s egyidejűleg (5. 1)-et is kielégítik, akkor az (5. 1) egyenletben szükségképpen $a_2 = a_3$ és $a_1 + a_4 = ba_2$, továbbá*

$$F(z * t) = a_1 C(z * t) + a_2 S(z * t)$$

teljesül.

BIZONYÍTÁS. (5. 1) bal oldalának szimmetriája alapján

$$\Delta(a_2C, S) + \Delta(a_3S, C) = (a_2 - a_3)\Delta(C, S) = 0,$$

tehát $\Delta(C, S) \neq 0$ miatt valóban $a_2 = a_3$.

Használjuk ki most a szokásos módon a $z * t$ művelet asszociativitását is, figyelembe véve ismételtén az (5. 2) és (5. 3) egyenleteket is:

$$\begin{aligned} & \Delta(C'', a_1C) + \Delta(C'', a_2S) + \Delta(S'', a_2C) + \Delta(S'', a_4S) = \\ & = \Delta(C'C - S'S, a_1C) + \Delta(C'C - S'S, a_2S) + \\ & + \Delta(bS'S + C'S + S'C, a_2C) + \Delta(bS'S + C'S + S'C, a_4S) = \\ = & -a_1S'\Delta(S, C) + a_2C'\Delta(C, S) + a_2bS'\Delta(S, C) + a_2C'\Delta(S, C) + a_4S'\Delta(C, S) = \\ & = (a_1 - a_2b + a_4)S'\Delta(C, S) = 0, \end{aligned}$$

azaz $\Delta(C, S) \neq 0$ miatt $a_1 + a_4 = a_2b$ következik.

Végül a konstansokra kapott összefüggésekkel (5. 1) így alakítható át:

$$\begin{aligned} F'' & = a_1CC' + a_2CS' + a_2SC' + (a_2b - a_1)SS' = \\ & = a_1(CC' - SS') + a_2(bSS' + CS' + SC') = a_1C'' + a_2S''. \end{aligned}$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

5. 2. Hasonló tétel mondható ki az

$$(5. 4) \quad F(z * t) = a_1S(z)S(t) + a_2S(z)C(t) + a_3C(z)S(t) + a_4C(z)C(t)$$

$$[F(z), S(z), C(z): Q_0(*) \rightarrow Q]$$

egyenletre is, ahol az $S(z), C(z)$ függvénytár a (4. 1) sinus egyenletet elégíti ki:

$$(5. 5) \quad S(z * t) = S(z)C(t) + C(z)S(t) \quad [S(z), C(z): Q_0(*) \rightarrow Q],$$

a_1, a_2, a_3, a_4 pedig konstansok. Mivel a $\Delta(S, C) \equiv 0$ esetben (5. 4) itt is egy (2. 22) alakú PEXIDER-egyenletre egyszerűsödne, elegendő csak egymástól lineárisan független $S(z), C(z)$ függvénytárra szorítkozni. Viszont $\Delta(S, C) \neq 0$ esetben, amint azt (4. 1. C)-ben láttuk, fennáll a

$$(5. 6) \quad C(z * t) = C(z)C(t) + bS(z)S(t) \quad (b = \text{konst.})$$

egyenlet is. A következőt bizonyítjuk:

5. 2. TÉTEL. *Ha a $Q_0(*)$ Abel-félcsoporton érvényes (5. 5) és (5. 6) egyenleteket kielégítő $S(z), C(z)$ függvények lineárisan függetlenek, azaz ha $\Delta(S, C) \neq 0$, s egyidejűleg (5. 4)-et is kielégítik, akkor az (5. 4) egyenletben szükségképpen $a_2 = a_3$ és $a_1 = a_4b$, továbbá*

$$F(z * t) = a_2S(z * t) + a_4C(z * t)$$

teljesül.

BIZONYÍTÁS. (5. 4) bal oldalának szimmetriájából

$$\Delta(a_2S, C) + \Delta(a_3C, S) = (a_2 - a_3)\Delta(S, C) = 0$$

következik, tehát $\Delta(S, C) \neq 0$ miatt $a_2 = a_3$.

Most az asszociativitás alapján (5. 4)-ből, figyelemre véve az (5. 5) és (5. 6) egyenleteket is

$$\begin{aligned} & \Delta(S'', a_1S) + \Delta(S'', a_2C) + \Delta(C'', a_2S) + \Delta(C'', a_4C) = \\ & = \Delta(C'S + S'C, a_1S) + \Delta(C'S + S'C, a_2C) + \\ & + \Delta(C'C + bS'S, a_2S) + \Delta(C'C + bS'S, a_4C) = \\ & = a_1S'\Delta(C, S) + a_2C'\Delta(S, C) + a_2C'\Delta(C, S) + a_4bS'\Delta(S, C) = \\ & = (-a_1 + a_4b)S'\Delta(S, C) = 0 \end{aligned}$$

következik, tehát $\Delta(S, C) \neq 0$ miatt valóban $a_1 = a_4b$.

Végül a konstansokra nyert megszorításokkal (5. 4)-et átalakítva

$$\begin{aligned} F'' & = a_4bSS' + a_2SC' + a_2CS' + a_4CC' = \\ & = a_2(SC' + CS') + a_4(CC' + bSS') = a_2S'' + a_4C'' \end{aligned}$$

adódik. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

MEGJEGYZÉS. Külön felhívjuk a figyelmet arra, hogy bár korábban az (5. 2) és (5. 5) egyenleteket (egyszerűség kedvéért) csak kvadratikus testben oldottuk meg, az 5. 1 és 5. 2. tételek tetszőleges Q testben is érvényesek.

5. 3. Az 5. 1. és 5. 2. tételek ismeretében már könnyen válaszolhatunk arra a függőben maradt problémára, hogy a 4. 3. tételben az (M6. 1) és (M6. 2) alatti függvényrendszerek milyen megszorításokkal válnak megoldásokká. Érvényes az

5. 1. KOROLLÁRIUM. A
(M6. 1)

$$\begin{aligned} G(z) & = c_1C_1(z), \\ H(z) & = c_2C_1(z) + c_3S_1(z), \\ K(z) & = c_4C_1(z) + c_5S_1(z), \\ L(z) & = c_6C_1(z) + c_7S_1(z), \\ \Delta[C_1(z_1), S_1(z_2)] & \neq 0; \end{aligned}$$

függvényrendszer, ahol a szereplő $C(z)$ és $S(z)$ függvények az (5. 2) és (5. 3) egyenleteket is kielégítik, a $Q_0(*)$ Abel-félcsoporton érvényes (4. 23) egyenletnek csak akkor megoldása, ha e függvényrendszerben és az (5. 3)-ban szereplő b_0 konstansokra

$$c_1c_3 + c_4c_7 = c_5c_6, \quad c_1c_2 + c_4c_6 + c_5c_7 = b_0c_5c_6$$

feltételek teljesülnek; ekkor

$$F(z_1 * z_2) = (c_1c_2 + c_4c_6)C(z_1 * z_2) + c_5c_6S(z_1 * z_2).$$

BIZONYÍTÁS. Írjuk az (M6. 1) alatti függvényeket (4. 23)-ba:

$$F'' = c_1C_1(c_2C_1' + c_3S_1') + (c_4C_1 + c_5S_1)(c_6C_1' + c_7S_1'),$$

tehát az 5. 1. tétel szerint valóban

$$c_1c_2 + c_4c_6 + c_5c_7 = b_0c_5c_6, \quad c_1c_3 + c_4c_7 = c_5c_6,$$

továbbá $F'' = (c_1c_2 + c_4c_6)C'' + c_5c_6S''$. Végül megemlítjük, hogy a 4. 2. C-ben látottak alapján világos, hogy $b_0 = 2a$ [(4. 21)-ben két *különböző* gyök van!], ha az (M5. 2) alatti megoldásról van szó; ill. $b_0 = \pm 2$ [(4. 21)-ben két *összeeső* gyök van!], ha az (M5. 3) alatti megoldást választjuk.

5. 2. KOROLLÁRIUM. A

$$\begin{aligned} \text{(M6. 2)} \quad G(z) &= S_2(z), \\ H(z) &= c_1S_2(z) + c_2C_2(z), \\ K(z) &= c_3S_2(z) + c_4C_2(z), \\ L(z) &= c_5S_2(z) + c_6C_2(z), \\ \Delta[S_2(z_1), C_2(z_2)] &\neq 0; \end{aligned}$$

függvényrendszer, ahol a szereplő $S(z)$ és $C(z)$ függvények az (5. 5) és (5. 6) egyenleteket is kielégítik, a $Q_0()$ Abel-félcsoporton érvényes (4. 23) egyenletnek csak akkor megoldása, ha e függvényrendszerben és az (5. 6)-ban szereplő $b = b_0^2$ konstansokra*

$$c_2 + c_3c_6 = c_4c_5, \quad c_1 + c_3c_5 = b_0^2c_4c_6$$

feltételek teljesülnek; ekkor

$$F(z_1 * z_2) = c_4c_5S(z_1 * z_2) + c_4c_6C(z_1 * z_2).$$

BIZONYÍTÁS. Írjuk az (M6. 1) alatti függvényeket (4. 23)-ba;

$$F'' = S_2(c_1S_2' + c_2C_2') + (c_3S_2 + c_4C_2)(c_5S_2' + c_6C_2'),$$

tehát az 5. 2 tétel szerint valóban

$$c_2 + c_3c_6 = c_4c_5, \quad c_1 + c_3c_5 = b_0^2c_4c_6$$

továbbá $F'' = c_4c_5S'' + c_4c_6C''$. Végül a 4. 1. C-ben látottak alapján világos, hogy $b_0 = 0$ [(4. 1. C1)-nek megfelelő eset!], ha az (M4. 3) alatti megoldásról van szó; ill. $b_0 \neq 0$ esetén $a = 1/2b_0$ [(4. 1. C2)-nek megfelelő eset!], ha az (M4. 4) alatti megoldást választjuk.

5. 4. Érdekes lesz megvizsgálni az

$$(5. 7) \quad F(z * t) = a_1g(z)g(t) + a_2g(z) + a_3g(t) \quad [F(z), g(z): Q_0(*) \rightarrow Q]$$

egyenletet is, ahol $g(z)$ a (2. 26) CAUCHY-egyenletet kielégítő függvény, a_1, a_2, a_3 pedig konstansok. Nyilván elegendő csak a $\Delta(g, 1) \neq 0$ esetet tekinteni; ellenkező esetben csak trivialitásokat kapnánk. Érvényes az

5. 3. TÉTEL. *Ha a $Q_0(*)$ Abel-félcsoporton érvényes (5. 7) függvényegyenletben szereplő $g(z)$ függvény kielégíti a (2. 26) Cauchy-egyenletet, továbbá ha a $\Delta(g, 1) \neq 0$ feltétel is teljesül, akkor (5. 7)-ben szükségképpen $a_2 = a_3 = 0$ és a megoldás pedig*

$$F(z * t) = a_1g(z * t).$$

BIZONYÍTÁS. Az F'' szimmetriája alapján

$$\Delta(a_2g, 1) + \Delta(1, a_3g) = (a_2 - a_3)\Delta(g, 1) = 0,$$

tehát valóban $\Delta(g, 1) \neq 0$ miatt $a_2 = a_3$.

Kihasználva F'' argumentumának asszociatív voltát a

$$\begin{aligned} \Delta(g'', a_1 g) + \Delta(g'', a_2) + \Delta(a_2, g) &= \\ = \Delta(g'g, a_1 g) + \Delta(g'g, a_2) + \Delta(a_2, g) &= \\ = a_2(g' - 1)\Delta(g, 1) &= 0 \end{aligned}$$

egyenletet kapjuk, azaz $\Delta(g, 1) \neq 0$ miatt $a_2 = 0$.

Ekkor viszont valóban (5. 7)-ből $F'' = a_1 g''$ következik.

MEGJEGYZÉS. Kézenfekvőnek látszott volna $a_2 = a_3$ megkapása után (5. 7)-et az

$$F'' - a_1 g'' = a_2 g + a_2 g'$$

alakba rendezni. Ez alakját tekintve már (2. 21) alakú PEXIDER-egyenlet, tehát a megoldását ismerjük, ami visszahelyettesítés után specializálódik. A tétel azonban *közvetlenül* azt mondja, hogy ez utóbbi PEXIDER-egyenlet csak triviális (azonosan zérus) megoldást tartalmaz.

5. 5. Hasonló tétel mondható ki az

$$(5. 8) \quad F(z * t) = a_1 f(z)f(t) + a_2 f(z) + a_3 f(t) \quad [F(z), f(z): Q_0(*) \rightarrow Q]$$

függvényegyenletre is, ahol $f(z)$ a (2. 23) CAUCHY-egyenletet kielégítő függvény, a_1, a_2, a_3 pedig konstansok. Itt is csak a $\Delta(f, 1) \neq 0$ esetre szorítkozunk, ellenkező esetben $f(z) \equiv 0$ (vö. 2. 2. lemma). Érvényes az

5. 4. TÉTEL. *Ha a $Q_0(*)$ Abel-félcsoporton érvényes (5. 8) függvényegyenletben szereplő $f(z)$ függvény kielégíti a (2. 23) Cauchy-egyenletet, továbbá ha a $\Delta(f, 1) \neq 0$ feltétel is teljesül, akkor (5. 8)-ban szükségképpen $a_1 = 0$ és $a_2 = a_3$, a megoldás pedig*

$$F(z * t) = a_2 f(z * t).$$

BIZONYÍTÁS. A szimmetria és $\Delta(f, 1) \neq 0$ miatt

$$\Delta(f, a_2) + \Delta(a_3, f) = (a_2 - a_3)\Delta(f, 1) = 0,$$

tehát $a_2 = a_3$. Az asszociativitás alapján pedig

$$\begin{aligned} \Delta(f'', a_1 f) + \Delta(f'', a_2) + \Delta(a_2, f) &= \\ = \Delta(f + f', a_1 f) + \Delta(f + f', a_2) + \Delta(a_2, f) &= \\ = a_1 f' \Delta(1, f) + a_2 \Delta(f, 1) + a_2 \Delta(1, f) = a_1 f' \Delta(1, f) &= 0, \end{aligned}$$

tehát $\Delta(f, 1) \neq 0$ miatt $a_1 = 0$. A nyert konstansok alapján

$$F'' = a_2(f + f') = a_2 f'',$$

amit bizonyítani kívántunk.

5. 6. Az (5. 7) és (5. 8) egyenletek közös általánosításának tekinthető az

$$(5. 9) \quad \begin{aligned} F(z * t) = a_1 g(z)g(t) + a_2 g(z)f(t) + a_3 f(z)g(t) + a_4 f(z)f(t) + \\ + a_5 g(z) + a_6 g(t) + a_7 f(z) + a_8 f(t) \quad [F(z), g(z), f(z): Q_0(*) \rightarrow Q] \end{aligned}$$

függvényegyenlet, ahol $g(z)$ ill. $f(z)$ a (2. 26) ill. (2. 23) CAUCHY-egyenletet kielégítő függvények, a_i ($i=1, 2, \dots, 8$) pedig konstansok. Nyilván elegendő a $\Delta(g, f, 1) \neq 0$ esetet vizsgálni; ellenkező esetben (5. 9) az (5. 7) ill. (5. 8) egyikére egyszerűsödik.

5. 5. TÉTEL. *Ha a $Q_0(\ast)$ Abel-félcsoporton érvényes (5. 9) függvényegyenletben szereplő $g(z)$ ill. $f(z)$ függvények kielégítik a (2. 26) ill. (2. 23) Cauchy-egyenletet, továbbá ha a $\Delta(g, f, 1) \neq 0$ feltétel is teljesül, akkor (5. 9)-ben szükségképpen*

$$a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0, \quad a_7 = a_8,$$

a megoldás pedig

$$F(z \ast t) = a_1 g(z \ast t) + a_7 f(z \ast t).$$

BIZONYÍTÁS. Először a szokásos módon a szimetriát használjuk ki, s a kapott

$$\begin{aligned} \Delta(g, a_2 f) + \Delta(f, a_3 g) + \Delta(g, a_5) + \Delta(a_6, g) + \Delta(f, a_7) + \Delta(a_8, f) = \\ = (a_2 - a_3)\Delta(g, f) + (a_5 - a_6)\Delta(g, 1) + (a_7 - a_8)\Delta(f, 1) = 0 \end{aligned}$$

egyenletet rendre $1, f, g$ függvényekkel bővítjük; ekkor a következő három egyenletet nyerjük:

$$(a_2 - a_3)\Delta(g, f, 1) = 0,$$

$$(a_5 - a_6)\Delta(g, f, 1) = 0,$$

$$(a_7 - a_8)\Delta(g, f, 1) = 0.$$

Mivel $\Delta(g, f, 1) \neq 0$, ezért $a_2 = a_3, a_5 = a_6$ és $a_7 = a_8$ adódik.

Vegyük figyelembe a jobb oldal asszociativitását is. Ekkor

$$\begin{aligned} \Delta(g'', a_1 g) + \Delta(g'', a_2 f) + \Delta(f'', a_2 g) + \Delta(f'', a_4 f) + \\ + \Delta(g'', a_5) + \Delta(a_5, g) + \Delta(f'', a_7) + \Delta(a_7, f) = \\ = \Delta(g' g, a_1 g) + \Delta(g' g, a_2 f) + \Delta(f + f', a_2 g) + \\ + \Delta(f + f', a_4 f) + \Delta(g' g, a_5) + \Delta(a_5, g) + \Delta(f + f', a_7) + \Delta(a_7, f) = \\ = a_2 g' \Delta(g, f) + a_2 \Delta(f, g) + a_2 f' \Delta(1, g) + a_4 f' \Delta(1, f) + \\ + a_5 g' \Delta(g, 1) + a_5 \Delta(1, g) + a_7 \Delta(f, 1) + a_7 \Delta(1, f) = \\ = a_2(g' - 1)\Delta(g, f) + a_5(g' - 1)\Delta(g, 1) + a_2 f' \Delta(1, g) + a_4 f' \Delta(1, f) = 0. \end{aligned}$$

„Bővítjük” ezt az egyenletet rendre az $1, f, g$ függvényekkel, kapjuk

$$a_2(g' - 1)\Delta(g, f, 1) = 0,$$

$$a_5(g' - 1)\Delta(g, f, 1) + a_2 f' \Delta(1, f, g) = 0,$$

$$a_4 f' \Delta(1, f, g) = 0.$$

Innen $\Delta(g, f, 1) \neq 0$ miatt valóban $a_2 = a_5 = a_4 = 0$ adódik.

Végül a nyert konstansokkal (5. 9) alapján

$$F'' = a_1 g g' + a_7 (f + f') = a_1 g'' + a_7 f'',$$

amit bizonyítanunk kellett.

5. 7. Különösen gyakran fordulnak elő az

$$(5. 10) \quad F(z * t) = a_1 F(z) F(t) + a_2 F(z) g(t) + a_3 g(z) F(t) + a_4 g(z) g(t) + \\ + a_5 F(z) + a_6 F(t) + a_7 g(z) + a_8 g(t) + a_9 \quad [F(z), g(z): Q_0(*) \rightarrow Q]$$

típusú függvényegyenletek, ahol $g(z)$ a (2. 26) CAUCHY-egyenletet kielégítő függvény, a_i ($i=1, 2, \dots, 9$) pedig konstansok. Csak a $\Delta(F, g, 1) \neq 0$ eset vizsgálatára kívánunk szorítkozni, ellenkező esetben (5. 10) lényegesen egyszerűbb egyenletekre redukálódik, melyeket korábban már megoldottunk. Érvényes az

5. 6. TÉTEL. Legyen $\Delta(F, g, 1) \neq 0$ és $g(z)$ elégítse ki a (2. 26) Cauchy-egyenletet is. Ekkor a $Q_0(*)$ Abel-félcsoporton érvényes (5. 10) függvényegyenletnek csak abban az esetben van megoldása, ha a benne szereplő konstansokra az

$$(5. 11) \quad \begin{cases} a_2 = a_3, & a_5 = a_6, & a_7 = a_8, & a_2 a_5 - a_1 a_7 = 0, \\ a_2^2 - a_1 a_4 - a_2 = 0, & a_5^2 - a_1 a_9 - a_5 = 0, \\ a_4 a_5 - a_2 a_7 + a_7 = 0, & a_5 a_7 - a_2 a_9 - a_7 = 0 \end{cases}$$

feltételek teljesülnek.

BIZONYÍTÁS. (5. 10) bal oldalának szimmetriája alapján

$$\Delta(F, a_2 g) + \Delta(g, a_3 F) + \Delta(F, a_5) + \Delta(a_6, F) + \Delta(g, a_7) + \Delta(a_8, g) = \\ = (a_2 - a_3) \Delta(F, g) + (a_5 - a_6) \Delta(F, 1) + (a_7 - a_8) \Delta(g, 1) = 0$$

írható, melyet rendre az 1, g , F függvényekkel „bővítve”

$$(a_2 - a_3) \Delta(F, g, 1) = 0,$$

$$(a_5 - a_6) \Delta(F, g, 1) = 0,$$

$$(a_7 - a_8) \Delta(F, g, 1) = 0$$

adódik. Mivel $\Delta(F, g, 1) \neq 0$, ezért $a_2 = a_3$, $a_5 = a_6$, $a_7 = a_8$. E konstansokkal (5. 10) az

$$F'' = a_1 F F' + a_2 (F g' + g F') + a_4 g g' + a_5 (F + F') + a_7 (g + g') + a_9$$

egyenletre egyszerűsödik.

A $z_1 * z_2$ művelet asszociativitása és kommutativitása alapján

$$\Delta(F'', a_1 F) + \Delta(F'', a_2 g) + \Delta(g'', a_2 F) + \Delta(g'', a_4 g) + \\ + \Delta(F'', a_5) + \Delta(a_5, F) + \Delta(g'', a_7) + \Delta(a_7, g) = \\ = \Delta(a_1 F' F + a_2 g' F + a_2 F' g + a_4 g' g + a_5 F + a_5 F' + a_7 g + a_7 g' + a_9, a_1 F) + \\ + \Delta(a_1 F' F + a_2 g' F + a_2 F' g + a_4 g' g + a_5 F + a_5 F' + a_7 g + a_7 g' + a_9, a_2 g) + \\ + \Delta(a_1 F' F + a_2 g' F + a_2 F' g + a_4 g' g + a_5 F + a_5 F' + a_7 g + a_7 g' + a_9, a_5) + \\ + \Delta(g', g, a_2 F) + \Delta(a_5, F) + \Delta(g' g, a_7) + \Delta(a_7, g) = \\ = (-a_1 a_2 F' - a_1 a_4 g' - a_1 a_7 + a_1 a_2 F' + a_2^2 g' + a_2 a_5 - a_2 g') \Delta(F, g) + \\ + (-a_1 a_5 F' - a_1 a_7 g' - a_1 a_9 + a_1 a_5 F' + a_2 a_5 g' + a_5^2 - a_5) \Delta(F, 1) + \\ + (-a_2 a_5 F' - a_2 a_7 g' - a_2 a_9 + a_2 a_5 F' + a_4 a_5 g' + a_5 a_7 + a_7 g' - a_7) \Delta(g, 1) = \\ = [(a_2^2 - a_1 a_4 - a_2) g' + (a_2 a_5 - a_1 a_7)] \Delta(F, g) + \\ + [(a_2 a_5 - a_1 a_7) g' + (a_5^2 - a_1 a_9 - a_5)] \Delta(F, 1) + \\ + [(a_4 a_5 - a_2 a_7 + a_7) g' + (a_5 a_7 - a_2 a_9 - a_7)] \Delta(g, 1) = 0.$$

„Bővítjük” ezt rendre az l, g, F függvényekkel, akkor

$$[(a_2^2 - a_1 a_4 - a_2)g' + (a_2 a_5 - a_1 a_7)]\Delta(F, g, l) = 0,$$

$$[(a_2 a_5 - a_1 a_7)g' + (a_5^2 - a_1 a_9 - a_5)]\Delta(F, g, l) = 0,$$

$$[(a_4 a_5 - a_2 a_7 + a_7)g' + (a_5 a_7 - a_2 a_9 - a_7)]\Delta(F, g, l) = 0,$$

tehát $\Delta(F, g, l) \neq 0$ miatt valóban a tételben kimondott megszorításokat nyerjük a szereplő konstansokra, s így a bizonyítást befejeztük.

Az 5. 6. tételből közvetlenül adódik az

5. 3. KOROLLÁRIUM. *Ha az (5. 10) egyenletben szereplő konstansokra az (5. 11) feltételek teljesülnek, továbbá ha*

$$(5. 12) \quad |a_1| + |a_2| + |a_5| > 0,$$

akkor ez a függvényegyenlet az $a_1 = 0$ esetben az

$$(5. 13) \quad F(z * t) - a_4 g(z * t) + a_9 = [F(z) - a_4 g(z) + a_9] + [F(t) - a_4 g(t) + a_9],$$

$$(5. 14) \quad F(z * t) + a_4 g(z * t) + a_7 = [F(z) + a_4 g(z) + a_7]g(t) + [F(t) + a_4 g(t) + a_7]g(z)$$

egyenletek egyikébe, $a_1 \neq 0$ esetén pedig az

$$(5. 15) \quad a_1 F(z * t) + a_2 g(z * t) + a_5 = [a_1 F(z) + a_2 g(z) + a_5][a_1 F(t) + a_2 g(t) + a_5]$$

Cauchy-egyenletbe írható át. Ezek a visszavezetések a $\Delta(F, g, l) \equiv 0$ esetben is érvényesek.

BIZONYÍTÁS. Ha $a_1 = 0$, akkor (5. 11) miatt $a_2 a_5 = 0$ is áll, tehát (5. 12) miatt vagy $a_2 = 0$ és $a_5 \neq 0$, vagy $a_5 = 0$ és $a_2 \neq 0$. Az első esetben (5. 11)-ből $a_5 = 1$ és $a_7 = -a_4$, a másodikban $a_2 = 1$ és $a_9 = -a_7$ következik.

Ha (5. 10)-ben $a_1 = a_2 = 0$, $a_5 = 1$ és $a_7 = -a_4$, akkor

$$F'' = a_4 g g' + F + F' - a_4 g - a_4 g' + a_9,$$

tehát valóban (5. 13) adódik.

Legyen (5. 10)-ben $a_1 = a_5 = 0$, $a_2 = 1$ és $a_9 = -a_7$, akkor

$$F'' = F g' + g F' + a_4 g g' + a_7 g + a_7 g' - a_7,$$

s ez valóban (5. 14)-et adja.

Végül $a_1 \neq 0$ esetben (5. 10) és (5. 11) alapján

$$a_1 F'' = a_1^2 F F' + a_1 a_2 (F g' + g F') + (a_2^2 - a_2) g g' + a_1 a_5 (F + F') + \\ + a_2 a_5 (g + g') + a_5^2 - a_5$$

adódik, s ez valóban (5. 15)-tel ekvivalens,

(5. 10) összes olyan megoldását, melyre $\Delta(F, g, l) \neq 0$ áll, (5. 13)—(5. 15) alapján már könnyen felírhatjuk.

5. 8. Az 5. 6. tételhez hasonló érvényes az

$$(5. 16) \quad F(z * t) = a_1 F(z) F(t) + a_2 F(z) f(t) + a_3 f(z) F(t) + a_4 f(z) f(t) + \\ + a_5 F(z) + a_6 F(t) + a_7 f(z) + a_8 f(t) + a_9 \quad [F(z), f(z): \mathcal{Q}_0(*) \rightarrow \mathcal{Q}]$$

egyenletre is, ahol $f(z)$ a (2. 23) CAUCHY-egyenletet kielégítő függvény, a_i ($i=1, 2, \dots, 9$) pedig konstansok. Itt is csak a $\Delta(F, f, 1) \neq 0$ esetre szorítkozunk, mert különben (5. 16) már ismert egyenletekre specializálódik. Érvényes az

5. 7. TÉTEL. Legyen $\Delta(F, f, 1) \neq 0$ és $f(z)$ elégítse ki a (2. 23) Cauchy-egyenletet is. Ekkor a $Q_0(*)$ Abel-félcsoporton érvényes (5. 16) függvényegyenletnek csak abban az esetben van megoldása, ha a benne szereplő konstansokra az

$$(5. 17) \quad \begin{cases} a_2 = a_3, & a_5 = a_6, & a_7 = a_8, & a_2^2 - a_1 a_4 = 0, \\ a_2 a_5 - a_1 a_7 - a_2 = 0, & a_5^2 - a_1 a_9 - a_5 = 0, \\ a_4 a_5 - a_2 a_7 - a_4 = 0, & a_5 a_7 - a_2 a_9 = 0 \end{cases}$$

feltételek teljesülnek.

BIZONYÍTÁS. (5. 16) bal oldalának szimmetriája alapján, mint ahogy azt az (5. 10) egyenlet esetében is láttuk, nyerjük az $a_2 = a_3$, $a_5 = a_6$, $a_7 = a_8$ összefüggéseket. E konstansokkal (5. 16) az

$$F'' = a_1 F F' + a_2 (F f' + f F') + a_4 f f' + a_5 (F + F') + a_7 (f + f') + a_9$$

egyenletre egyszerűsödik. Innen a $z_1 * z_2$ művelet asszociativitása és kommutativitása alapján

$$\begin{aligned} & \Delta(F'', a_1 F) + \Delta(F'', a_2 f) + \Delta(f'', a_2 F) + \Delta(f'', a_4 f) + \\ & \quad + \Delta(F'', a_5) + \Delta(a_5, F) + \Delta(f'', a_7) + \Delta(a_7, f) = \\ & = \Delta(a_1 F' F + a_2 f' F + a_2 F' f + a_4 f' f + a_5 F + a_5 F' + a_7 f + a_7 f' + a_9, a_1 F) + \\ & + \Delta(a_1 F' F + a_2 f' F + a_2 F' f + a_4 f' f + a_5 F + a_5 F' + a_7 f + a_7 f' + a_9, a_2 f) + \\ & + \Delta(a_1 F' F + a_2 f' F + a_2 F' f + a_4 f' f + a_5 F + a_5 F' + a_7 f + a_7 f' + a_9, a_5) + \\ & + \Delta(f + f', a_2 F) + \Delta(f + f', a_4 f) + \Delta(a_5, F) + \Delta(f + f', a_7) + \Delta(a_7, f) = \\ & = (-a_1 a_2 F' - a_1 a_4 f' - a_1 a_7 + a_1 a_2 F' + a_2^2 f' + a_2 a_5 - a_2) \Delta(F, f) + \\ & + (-a_1 a_5 F' - a_1 a_7 f' - a_1 a_9 + a_1 a_5 F' + a_2 a_5 f' + a_5^2 - a_2 f' - a_5) \Delta(F, 1) + \\ & + (-a_2 a_5 F' - a_2 a_7 f' - a_2 a_9 + a_2 a_5 F' + a_4 a_5 f' + a_5 a_7 - a_4 f' + a_7 - a_7) \Delta(f, 1) = \\ & = [(a_2^2 - a_1 a_4) f' + (a_2 a_5 - a_1 a_7 - a_2)] \Delta(F, f) + \\ & + [(a_2 a_5 - a_1 a_7 - a_2) f' + (a_5^2 - a_1 a_9 - a_5)] \Delta(F, 1) + \\ & + [(a_4 a_5 - a_2 a_7 - a_4) f' + (a_5 a_7 - a_2 a_9)] \Delta(f, 1). \end{aligned}$$

„Bővítjük” ezt az egyenletet rendre az $1, f, F$ függvényekkel, akkor $\Delta(F, f, 1) \neq 0$ miatt valóban az (5. 17) megszorításokat nyerjük a szereplő konstansokra, s így a tétel bizonyítását is befejeztük.

Az 5. 7. tételből közvetlenül adódik az

5. 4. KOROLLÁRIUM. Ha az (5. 16) egyenletben szereplő konstansokra az (5. 17) feltételek teljesülnek, továbbá ha

$$(5. 18) \quad |a_1| + |a_2| + |a_5| > 0,$$

akkor ez a függvényegyenlet az $a_1 = 0$ esetben az

$$(5. 19) \quad F(z * t) - \frac{1}{2}a_4 f(z * t)^2 + a_9 = [F(z) - \frac{1}{2}a_4 f(z)^2 + a_9] + [F(t) - \frac{1}{2}a_4 f(t)^2 + a_9]$$

Cauchy-egyenletbe, $a_1 \neq 0$ esetén pedig az

$$(5. 20) \quad a_1 F(z * t) + a_2 f(z * t) + a_5 = [a_1 F(z) + a_2 f(z) + a_5][a_1 F(t) + a_2 f(t) + a_5]$$

Cauchy-egyenletbe írható át. Ezek a visszavezetések a $\Delta(F, g, 1) \equiv 0$ esetben is érvényesek.

BIZONYÍTÁS. Legyen $a_1 = 0$, akkor (5. 17) és (5. 18) alapján $a_2 = 0$, $a_5 = 1$, $a_7 = 0$ adódik. E konstansokkal (5. 16) az

$$F'' = a_4 ff' + F + F' + a_9$$

egyenletre egyszerűsödik, mely valóban (5. 19)-cel ekvivalens.

Ha viszont (5. 16)-ban $a_1 \neq 0$, akkor az (5. 17) összefüggésekkel az

$$a_1 F'' = a_1^2 FF' + a_1 a_2 (Ff' + fF') + a_2^2 ff' + \\ + a_1 a_5 (F + F') + (a_2 a_5 - a_2)(f + f') + a_5^2 - a_5$$

egyenletet nyerjük, mely valóban megegyezik (5. 20)-szal.

6. §. A CAUCHY-függvényegyenlet egy általánosítása

Ún. alternatív függvényegyenletek először J. ACZÉL, K. FLADT és M. HOSSZÚ [7] közös dolgozatában fordulnak elő. Ezt követően M. HOSSZÚ [28] oldja meg az

$$f(x + y)^2 = [f(x) + f(y)]^2$$

egyenletet folytonossági feltevés mellett. További általánosabb eredmények a szerzőtől származnak [72], [75], [76].

6. 1. Tekintsük az alternatív egyenletek családjába tartozó

$$(6. 1) \quad f(z_1 * z_2)^n = [f(z_1) + f(z_2)]^n$$

$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0(*); f(z): Q_0(*) \rightarrow Q]$$

függvényegyenletet, mely nyilván a (2. 23) CAUCHY-egyenlet egy általánosításának tekinthető; n természetes szám. Látható, hogy (2. 23)-nak közvetlen következménye (6. 1), de fordítva legfeljebb csak annyi igaz (ha a „gyökvonás” a Q testben egyáltalán megengedett!), hogy

$$f(z_1 * z_2) = e(z_1, z_2)[f(z_1) + f(z_2)]$$

fennáll, ahol

$$e(z_1, z_2)^n \equiv 1.$$

Így (6. 1) megoldásai általánosabbak is lehetnének, s éppen ezért meglepő a következő

6. 1. TÉTEL. A $Q_0(*)$ Abel-félcsoporton érvényes (6. 1) és (2. 23) függvény-egyenletek, ha n természetes szám, egymással ekvivalensek, azaz (6. 1) minden megoldása (2. 23)-at is kielégíti és megfordítva.

6. 2. A 6. 1. tétel bizonyítását előkészítendő, először két lemmát bizonyítunk.

6. 1. LEMMA. Ha a $Q_0(*)$ félcsoportnak csak véges számú (egymástól különböző) eleme van, akkor sem a (6. 1), sem pedig a (2. 23) egyenletnek az $f(z) \equiv 0$ (triviális) megoldáson kívül nincs más megoldása.

BIZONYÍTÁS. Mivel (6. 1) következménye (2. 23)-nak, elegendő csupán az általánosabb (6. 1) egyenletre bizonyítani állításunkat. Nyilván az $f(z) \equiv 0$ egyidejűleg mindkét egyenletnek megoldása, a továbbiakban ezt az esetet kizárjuk. Ha $f(z) \not\equiv 0$, akkor van olyan $z_0 \in Q_0(*)$, melyre $f(z_0) \neq 0$. Megmutatjuk, hogy ez ellentmondásra vezet.

Alkossuk meg a

$$(6. 2) \quad z_0^2 = z_0 * z_0, \quad z_0^4 = z_0^2 * z_0^2, \dots, z_0^{2^k} = z_0^{2^{k-1}} * z_0^{2^{k-1}}, \dots \quad (k=1, 2, \dots)$$

sorozatot. A (6. 1) egyenlet ismételt alkalmazásával bármely k ($=1, 2, \dots$)-ra

$$\begin{aligned} f(z_0^{2^k})^n &= [f(z_0^{2^{k-1}}) + f(z_0^{2^{k-1}})]^n = 2^n f(z_0^{2^{k-1}})^n = \\ &= 2^n [f(z_0^{2^{k-2}}) + f(z_0^{2^{k-2}})]^n = 2^{2^n} f(z_0^{2^{k-2}})^n = \dots \end{aligned}$$

$$(6. 3) \quad f(z_0^{2^k})^n = 2^{k^n} f(z_0)^n \quad (k=1, 2, \dots)$$

fennáll.

Legyen $Q_0(*)$ különböző elemeinek száma m . Ekkor a (6. 2) sorozat első $m+1$ számú elemei között is van már két $z_1 = z_0^{2^p}$, $z_2 = z_0^{2^q}$ ($p \neq q$) egyező elem. Az ezekhez tartozó $f(z_1)^n$, $f(z_2)^n$ függvényértékek is szükségképpen megegyeznek, tehát (6. 3) miatt

$$\begin{aligned} 2^{p^n} f(z_0)^n &= f(z_1)^n = f(z_2)^n = 2^{q^n} f(z_0)^n, \\ f(z_0)^n (2^{p^n} - 2^{q^n}) &= 0, \end{aligned}$$

s ha itt $f(z_0) \neq 0$, akkor $p \neq q$ miatt ellentmondást kaptunk. Ezzel a bizonyítás véget ért.

6. 1. KOROLLÁRIUM. Ha az $f(z) \not\equiv 0$ függvény megoldása a (6. 1) vagy (2. 23) függvényegyenleteknek, akkor szükségképpen végtelen sok különböző értéket vesz fel.

BIZONYÍTÁS. Itt is elegendő csupán az általánosabb (6. 1) egyenletet tekinteni. A 6. 1. lemma alapján világos, hogy $f(z) \not\equiv 0$ esetben $Q_0(*)$ -ban végtelen sok különböző elem van. Legyen ismét valamely $z_0 \in Q_0(*)$ -ra $f(z_0) \neq 0$. Ekkor a (6. 2) sorozat tagjai, következésképpen a hozzájuk tartozó

$$f(z_0^2), \quad f(z_0^4), \quad \dots, f(z_0^{2^k}), \quad \dots$$

függvényértékek is mind különbözőek, hisz ellenkező esetben ugyanúgy jutnánk ellentmondásra, mint a 6. 1. lemma bizonyításánál. Tehát a 6. 1. korollárium igaz.

MEGJEGYZÉS. A 6. 1. lemmánál, ill. korolláriumnál a $z_1 * z_2$ műveletnek sem az asszociatív, sem pedig a kommutatív voltát nem használtuk ki, ami lehetőséget nyújtott volna állításaink lényegesen általánosabb formában való kimondására is.

A 6. 1. lemmából közvetlenül adódik a

6. 2. KOROLLÁRIUM. Ha az $f(z) \neq 0$ függvény megoldása a (6. 1) vagy (2. 23) függvényegyenletnek, akkor tetszőleges r_1, r_2, \dots, r_k természetes számok esetén is

$$(6. 4) \quad \Delta[f(z_1)^{r_1}, f(z_2)^{r_2}, \dots, f(z_k)^{r_k}] \neq 0.$$

Más szóval nincsen olyan $m = \max(r_1, r_2, \dots, r_k)$ -adfokú konstans együtthatójú algebrai egyenlet, melynek az $f(z) \neq 0$ függvény összes felvett értéke gyöke lenne.

BIZONYÍTÁS. Ugyanis (6. 4) ellenkezője ellentmondásra vezet, mert a 2. 1. korollárium szerint azt jelentené, hogy léteznek olyan a_1, a_2, \dots, a_k egyidejűleg nem zérus Q -beli konstansok, melyekkel

$$(6. 5) \quad \sum_{i=1}^k a_i f(z)^{r_i} \equiv 0, \quad \sum_{i=1}^k |a_i| > 0$$

fennáll. Viszont a (6. 5) $m = \max(r_1, r_2, \dots, r_k)$ -adfokú algebrai egyenletnek $f(z)$ -re nézve Q -ban legfeljebb m számú különböző megoldása lehet, tehát a 6. 1. korollárium szerint feltevésünkkel ellentétben $f(z) \equiv 0$ következik.

6. 3. Most már következhet a 6. 1. tétel bizonyítása:

BIZONYÍTÁS. Mivel $f(z) \equiv 0$ mind a (6. 1), mind pedig a (2. 23) egyenletnek megoldása, a továbbiakban feltehetjük, hogy $f(z) \neq 0$. Feltesszük továbbá, hogy $n \geq 2$. Azt kívánjuk bizonyítani, hogy (6. 1)-ből mindig következik (2. 23); ennek fordítottja triviálisan igaz.

A (6. 1) egyenletet

$$f(z_1 * z_2)^n = f(z_1)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} f(z_1)^{n-k} f(z_2)^k + f(z_2)^n$$

alakba írjuk és a szokásos módon kihasználjuk a $z_1 * t * z_2$ művelet asszociatív és kommutatív voltát:

$$\begin{aligned} & \left[f(z_1)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} f(t)^{n-k} f(z_1)^k + f(t)^n \right] + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} f(z_1 * t)^{n-k} f(z_2)^k + f(z_2)^n = \\ & = f(z_1)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} f(z_2 * t)^{n-k} f(z_1)^k + \left[f(z_2)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} f(t)^{n-k} f(z_2)^k + f(t)^n \right]. \end{aligned}$$

Írjuk ezt az egyenletet a

$$(6. 6) \quad \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \Delta[f(z_1 * t)^{n-k} - f(t)^{n-k}, f(z_2)^k] = 0$$

determinánsos alakba és „bővítsük” rendre az $f(z), f(z)^2, \dots, f(z)^{n-2}$ függvényekkel; így módon nyerjük a

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} \Delta[f(z_1 * t)^{n-k} - f(t)^{n-k}, f(z_2)^k, f(z_3)] = 0, \\ & \sum_{k=3}^{n-1} \binom{n}{k} \Delta[f(z_1 * t)^{n-k} - f(t)^{n-k}, f(z_2)^k, f(z_3)^2, f(z_4)] = 0, \\ & \dots\dots\dots \\ (6. 7) \quad & \binom{n}{n-1} \Delta[f(z_1 * t) - f(t), f(z_2)^{n-1}, f(z_3)^{n-2}, \dots, f(z_n)] = 0 \end{aligned}$$

egyenleteket.

helyettesítve azt kapnánk, hogy $f(z)$ gyöke egy konstans együtthatójú valódi $(n-1)^2$ -fokú algebrai egyenletnek, amit viszont $f(z) \neq 0$ miatt a 6. 2. korollárium kizár. Az $a_{n-1}(t) \equiv 0$ ismeretében hasonlóan okoskodhatunk $a_{n-2}(t)$ -re, majd az $a_{n-3}(t)$, $a_{n-4}(t)$, ... együttható-függvényekre is mindaddig, míg $f(z)$ mindenkori legnagyobb kitevőjű hatványa csak egy van, s ez éppen

$$a_k(t)^{n-1} f(z)^{k(n-1)},$$

tehát míg $k(n-1) > n-1$, azaz $k \geq 2$. Így $a_k(t) \equiv 0$, ha $k \geq 2$ és (6. 3. B) az

$$(6. 12) \quad f(z * t) = a_1(t)f(z) + f(t)$$

egyenletre egyszerűsödik.

Ugyanezt kapjuk az $n=2$ esetben is (6. 8) alapján, tehát (6. 1)-ből bármely $n \geq 2$ természetes szám esetén az $f(z) \neq 0$ feltevéssel a (6. 12) egyenlethez jutunk. Innen a bal oldal szimmetriája alapján a szokásos módon

$$\Delta[a_1(z_1), f(z_2)] + \Delta[f(z_1), 1] = \Delta[a_1(z_1) - 1, f(z_2)] = 0$$

írható, tehát $f(z) \neq 0$ miatt

$$a_1(z) - 1 = af(z) \quad (a = \text{konst.}),$$

s (6. 12)-ből az

$$(6. 13) \quad f(z_1 * z_2) = af(z_1)f(z_2) + f(z_1) + f(z_2)$$

egyenletet nyerjük.

Legyen végül (6. 13)-ban $z_1 = z_2 = z$ és (6. 1)-et is figyelembe véve

$$[af(z)^2 + 2f(z)]^n = 2^n f(z)^n,$$

$$(6. 14) \quad a^n f(z)^{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \binom{n}{k} a^{n-k} f(z)^{2n-k} = 0$$

írható, de a 6. 2. korollárium szerint $f(z) \neq 0$ esetén

$$\Delta[f(z_1)^{2n}, f(z_2)^{2n-1}, \dots, f(z_n)^{n+1}] \neq 0$$

is fennáll, tehát (6. 14)-ben szükségképpen $a=0$. Így (6. 13) valóban a (2. 23) CAUCHY-egyenletre egyszerűsödött, amivel a tétel bizonyítását befejeztük.

(Béérkezett: 1965. XII. 23.)