

VIZSGÁLATOK A LINEÁRISAN KOMPAKT GYŰRŰK ELMÉLETÉBEN, II.*

Írta: WIEGANDT RICHÁRD

II. Lineárisan kompakt radikálmentes gyűrűkről

5. §. Féllegyszerű lineárisan kompakt gyűrűk jellemzései I.

Ebben a §-ban tulajdonképpen célunk egy féllegyszerű lineárisan kompakt gyűrű R -modulusokkal való jellemzése. Ehhez előkészületként kimutatjuk, hogy lineárisan kompakt gyűrűk radikálja zárt, továbbá ismertetjük a második *Wedderburn—Artin*-féle struktúrátétel LEPTINTől származó általánosítását, amely a topológikusan egyszerű lineárisan kompakt gyűrűket jellemzi.

Emlékeztetünk arra, hogy egy R gyűrű *lineárisan kompakt*, ha mint R -modulus lineárisan kompakt. Minthogy az R -modulusok lineáris kompaktsága az előző §-ban tárgyaltnak speciális esete, azért alkalmazhatjuk az ott bebizonyított állításokat.

5, 1. állítás. ([18] Satz 8) *Lineárisan kompakt gyűrű Jacobson-radikálja zárt.*

Jelölje J az R lineárisan kompakt gyűrű Jacobson-radikálját. Minthogy J tartalmazza R -nek összes kvázireguláris balideálját, azért elegendő kimutatni, hogy J -nek $\bar{J}$ lezártja kvázireguláris. Az állítás bizonyított lesz, ha kimutatjuk, hogy $\bar{J}$ tetszőleges a elemének van bal-kváziinverze.

Legyen $U = \{U_\gamma\}$ az R összes nyílt balideáljából álló filter, és tekintsük az összes

$$H_\gamma = \{x \in R \mid x + xa \in U_\gamma\}$$

halmazt. Világos, hogy H_γ balideál. Minthogy U_γ nyílt, azért zárt is, így ha valamilyen $y \in R$ elemre $y \notin H_\gamma$, azaz $y + ya \notin U_\gamma$, akkor létezik $y + ya$ -nak olyan V környezete, amely U_γ -hoz diszjunkt, az összeadás és a szorzás folytonossága miatt tehát van y -nak olyan W környezete, amely H_γ -hoz diszjunkt. Ezért H_γ zárt balideál.

Tekintsük ezután minden $U_\gamma (\in U)$ -hoz az

$$F_\gamma = \{f_\gamma \in R \mid f_\gamma \circ a \in U_\gamma\}$$

halmazokat. Egyik F_γ sem üres, ugyanis $a \in \bar{J}$ miatt minden $a + U_\gamma$ mellékosztály tartalmaz $b \in J$ elemet. b bal-kváziinverzét f_γ -val jelölve fennáll

$$\begin{aligned} f_\gamma \circ a &= f_\gamma + a + f_\gamma a \in f_\gamma + a + U_\gamma + f_\gamma(a + U_\gamma) = \\ &= f_\gamma + b + f_\gamma b + U_\gamma = f_\gamma \circ b + U_\gamma = U_\gamma, \end{aligned}$$

* A dolgozat I. része az *MTA Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **16** (1966) 239—267. oldalain jelent meg. A teljes irodalomjegyzéket is az első részhez csatoltuk.

tehát valóban $f_\gamma \in F_\gamma$. Másrészt minden F_γ H_γ -nak egy mellékosztálya, mert ha f_γ és $f'_\gamma \in F_\gamma$, akkor érvényes

$$f_\gamma - f'_\gamma + (f_\gamma - f'_\gamma)a = f_\gamma \circ a - f'_\gamma \circ a \in U_\gamma,$$

és ezért H_γ definíciója szerint $f_\gamma - f'_\gamma \in H_\gamma$.

Nyilvánvaló, hogy $F = \{F_\gamma\}$ filtert alkot, mégpedig zárt balideálok szerinti mellékosztályokból álló filtert. Ezért a feltevés szerint van olyan $f \in R$ elem, amelyre $f \in \downarrow F$ érvényes. Minthogy bármely γ indexre $f \in F_\gamma$, ezért f felírható $f = f_\gamma + h_\gamma$ ($h_\gamma \in H_\gamma$) alakban, és fennáll

$$\begin{aligned} f \circ a &= (f_\gamma + h_\gamma) \circ a = f_\gamma + h_\gamma + a + f_\gamma a + h_\gamma a = \\ &= f_\gamma \circ a + (h_\gamma + h_\gamma a) \in U_\gamma. \end{aligned}$$

Mivel ez minden γ -ra igaz, azért

$$f \circ a \in \bigcap_{U \in U} U = 0$$

érvényes. $\square$

Az 5, 1. állításból közvetlenül folyik, hogy bármely topológikusan egyszerű lineárisan kompakt gyűrű egyúttal féligegyszerű is.

5, 2. tétel. ([18] Satz 12). *Egy R lineárisan kompakt gyűrű akkor és csak akkor topológikusan egyszerű, ha egy ferdetest feletti vektortér teljes endomorfizmusgyűrűjével izomorf. Lineárisan kompakt topológikusan egyszerű gyűrű L -kompakt.*

Legyen R topológikusan egyszerű. Ekkor R -nek létezik nem bal-kvázireguláris a eleme. Az

$$A = \{y = x + xa \mid x \in R\}$$

halmaz R -nek nyilván balideálja. A

$$\varphi_a(x) = x + xa \quad (x \in R)$$

leképezés R -nek A -ra való folytonos endomorfizmusa, ezért a 4, 7. és 4, 6. állítás miatt A R -ben zárt. Mivel a nem bal-kvázireguláris elem, azért biztosan $a \notin A$, és így létezik olyan L nyílt balideál, amely maximális arra a tulajdonságra nézve, hogy A -t tartalmazza, de a -t nem.

Tegyük fel, hogy egy L' balideál tartalmazza L -et valódi módon, akkor tehát $a \in L'$. Másrészt $A \subseteq L'$ miatt bármely $x \in R$ elemre

$$x = (x + xa) - xa \in L + L' = L'.$$

Ezért $L' = R$ és L R -nek maximális balideálja. Jelöljük M -mel az R/L faktormodulust. Ez, L maximalitása miatt irreducibilis R -modulus. Tekintsük minden $m \in M$ elemhez az

$$N_m = \{r \in R \mid rm = 0\}$$

halmazt. Könnyű látni, hogy ez balideál, mégpedig L nyílt volta miatt nyílt balideál. Ezért $N = \bigcap_{m \in M} N_m$ zárt és egyúttal kétoldali ideál is. A feltétel szerint csak

$N = 0$ vagy $N = R$ lehetséges. Az utóbbi esetben $R^2 \subseteq L$, tehát $\overline{R^2} \neq R$ következne és R topológikus egyszerűsége miatt $R^2 = 0$ állna fenn, ami azt jelentené, hogy R radikálgyűrű. Ezért csak $N = 0$ lehetséges, és így R elemei M -nek endomorfizmusai.

Jelölje K M -nek R -rel felcserélhető endomorfizmusainak a halmazát. Minthogy K elemei R -rel felcserélhetők, azért feltehető, hogy K M -nek jobboperátortartománya. Mivel M irreducibilis, azért a felcserélhetőség miatt csak $M\gamma=0$ vagy $M(\gamma \in K)$ lehetséges. Így a $\gamma \neq 0$ esetben M -nek önmagára való leképezését kapjuk. Ker $\gamma=0$ vagy M miatt pedig világos, hogy bármely $\gamma \neq 0$ M -nek automorfizmusa. K tehát ferdetest, M pedig egy K feletti vektortér.

Alkalmazzuk JACOBSON sűrűségi tételét (3. 7. tétel), azt kapjuk, hogy R , mint az M irreducibilis R -modulus endomorfizmusainak a gyűrűje, sűrű M összes K -val felcserélhető endomorfizmusainak az R^* gyűrűjében. M mint irreducibilis R -modulus diszkrét és L -kompakt, így R^* éppen M hiperfolytonos endomorfizmusainak a gyűrűje, amely a 4, 26. állítás szerint szintén L -kompakt.

Ha az N_m ($m \in M$) balideálok által generált N filtert tekintjük R -ben bázis-filternek, akkor ezáltal ugyanazt a topológiát vezetjük be R -ben, mint amit az R^* hiperfolytonos endomorfizmusok gyűrűjének a topológiája R -ben, mint altérben indukál. Mivel R eredeti topológiájában minden N_m nyílt volt, azért az N által bevezetett topológia az eredetinél durvább lineárisan kompakt topológia. Feltehetjük, hogy R -ben rögtön a legdurvább lineárisan kompakt topológiát választottuk, mivel ezáltal a zárt balideálok változatlanok maradnak (4, 15. állítás). Most tehát a két topológia R -ben megegyezik, ezért a 4, 6. állítás szerint R R^* -ban zárt. Mint-hogy pedig R R^* -ban sűrű, azért $R=R^*$. Azt is láttuk, hogy R L -kompakt.

Legyen most R egy K ferdetest feletti M vektortér teljes endomorfizmusgyűrűje. M nyilván irreducibilis R -modulus és a diszkrét topológiában lineárisan kompakt. A 4, 25. állítás alapján R is lineárisan kompakt.

Tekintsük R -nek egy tetszőleges $r \neq 0$ elemét. Ekkor létezik olyan $m \in M$ elem, hogy $rm \neq 0$. Ha $x \neq 0$ és y tetszőleges M -beli elemek, akkor léteznek olyan $s, t \in R$ endomorfizmusok, hogy $sx=m$ és $t(rm)=y$ legyen, tehát $(trs)x=y$. Ezért az r elem által generált RrR ideálra nézve M irreducibilis. Ismét JACOBSON sűrűségi tételei alapján RrR R -nek sűrű részhalmaza, ezért $RrR=R$ és így R topológikusan egyszerű. $\square$

5, 3. tétel. Legyen R lineárisan kompakt gyűrű. A következő feltételek ekvivalensek:

- R radikálmentes;
- R izomorf ferdetestek feletti vektorterek teljes endomorfizmusgyűrűinek komplett direkt összegével;
- bármely unitér* lineárisan kompakt R -modulusban a maximális nyílt részmodulusok metszete 0 ;
- bármely unitér lineárisan kompakt R -modulus minimális részmodulusok komplett direkt összege;
- bármely

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

exakt sorozat széteső, ahol A, B, C unitér lineárisan kompakt R -modulusok, a leképezések pedig folytonos homomorfizmusok;

- bármely unitér lineárisan kompakt R -modulus projektív;
- bármely unitér lineárisan kompakt R -modulus injektív.

* Egy M R -modulus unitér, ha R egységelemes, és R -nek e egységelemére teljesül $em=m$ ($m \in M$).

Kiegészítés: *Féligegyszerű lineárisan kompakt gyűrű L -kompakt.* Ez az 5, 2. tétel, az 5, 3. tétel b) feltétele és a 4, 22. állítás miatt triviális.

Azáltal, hogy a c)–g) feltételekben szereplő modulusok unitér modulusok, feltesszük, hogy az R operátortartomány egységelemes.

Az a), b) és d) feltételek ekvivalenciáját LEPTIN bizonyította be ([18] Satz 13 és [19] Satz 1). Ezek az állítások a féligegyszerű Artin-gyűrűkre vonatkozó Wedderburn–Artin, illetve Noether-féle jellemzések általánosításai. A féligegyszerű lineárisan kompakt gyűrűknek c), e), f) és g) tulajdonságokkal való jellemzése a diszkrét esetből ismert tételek általánosítása. (Vö.: JANS [9] 12. oldal és KERTÉSZ [14] Satz 5 és 6 ill. [15] 27. és 28. tétel). A bizonyításnak $a) \Rightarrow b)$ és $c) \Rightarrow d)$ részében lényegében LEPTINT követjük.

Bizonyítás. $a) \Rightarrow b)$ Az 5, 2. tétel szerint elegendő kimutatni, hogy ha az R lineárisan kompakt gyűrű radikálmentes, akkor topológikusan egyszerű gyűrűk komplett direkt összege. Ennek a bizonyításához szükségünk lesz a következő segédtételekre.

5, 4. segédétel. Ha $J_1, \dots, J_r$ az R lineárisan kompakt gyűrűnek különböző maximális zárt ideálja, akkor

$$\{J_1 \cap \dots \cap J_{i-1}, J_i\} = R \quad (i=2, \dots, r).$$

Teljes indukcióval kimutatjuk, hogy érvényes

$$\{I_1 \cap \dots \cap J_{i-1}, J_i\} = R \quad (i=2, \dots, r).$$

Ez az $i=2$ esetben triviális. Legyen ezután $i>2$, és tegyük fel az állítás helyességét $j<i$ -re. Tekintsük az $\{J_1 \cap \dots \cap J_{i-1}, J_i\}$ ideált. A 4, 8. állítás miatt ez zárt, és így vagy J_i -vel vagy R -rel egyezik meg. Tegyük fel, hogy J_i -vel egyezik meg. Ekkor az $R/J_1 \cap \dots \cap J_{i-1}$ faktorgyűrűben $J_j/J_1 \cap \dots \cap J_{i-1}$ ($j=1, \dots, i-1$) maximális zárt ideálok, amelyekre az indukciós feltevés szerint fennáll

$$\{(J_1/J_1 \cap \dots \cap J_{i-1}) \cap \dots \cap (J_{j-1}/J_1 \cap \dots \cap J_{i-1}), J_j/J_1 \cap \dots \cap J_{i-1}\} = R/J_1 \cap \dots \cap J_{i-1}$$

($j=2, \dots, i-1$), továbbá érvényes

$$(J_1/J_1 \cap \dots \cap J_{i-1}) \cap \dots \cap (J_{i-1}/J_1 \cap \dots \cap J_{i-1}) = 0.$$

Ezért alkalmazva a 3, 4. állítást, azt kapjuk, hogy $R/J_1 \cap \dots \cap J_{i-1}$ algebrailag és topológiaiailag izomorf az

$$R/J_1 \cap \dots \cap J_{i-1} / J_1/J_1 \cap \dots \cap J_{i-1} \oplus \dots \oplus R/J_1 \cap \dots \cap J_{i-1} / J_{i-1}/J_1 \cap \dots \cap J_{i-1}$$

direkt összeggel, azaz az

$$R/J_1 \oplus \dots \oplus R/J_{i-1}$$

gyűrűvel. Jelöljük φ -vel $R/J_1 \cap \dots \cap J_{i-1}$ -nek $R/J_1 \oplus \dots \oplus R/J_{i-1}$ -re való izomorf leképezését és φ_j -vel $R/J_1 \cap \dots \cap J_{i-1}$ -nek R/J_j -re való felbontási homomorfizmusát. $J_j/J_1 \cap \dots \cap J_{i-1}$ lineárisan kompakt és zárt ideál, ezért $\varphi(J_j/J_1 \cap \dots \cap J_{i-1})$ is zárt ideál R/J_j -ben. De R/J_j topológikusan egyszerű, ezért $\varphi(J_j/J_1 \cap \dots \cap J_{i-1})$ csak 0 vagy R/J_j lehet. A 0 esetet azonban ki kell zárnunk, mert abból $J_i \subseteq J_j$ ($j<i$) következne, ami lehetetlen. Ezért minden j -re $\varphi_j(J_j/J_1 \cap \dots \cap J_{i-1}) = R/J_j$. Más-

részt R/J_j , mint topológikusan egyszerű lineárisan kompakt gyűrű, az 5, 2. tétel szerint egységelemes. Jelöljük ezt e_j -vel. Ekkor tehát érvényes

$$\varphi(J_i/J_1 \cap \dots \cap J_{i-1})e_j = R/J_j \quad (j = 1, 2, \dots, i-1),$$

vagyis

$$\varphi(J_i/J_1 \cap \dots \cap J_{i-1}) = R/J_1 \oplus \dots \oplus R/J_{i-1}.$$

Ebből viszont $J_i = R$ következik, ami szintén lehetetlen.

Most rátérünk annak a bizonyítására, hogy egy R radikálmentes lineárisan kompakt gyűrű topológikusan egyszerű lineárisan kompakt gyűrűk komplett direkt összege.

Tekintsünk egy M irreducibilis topológikus R -modulust, és jelöljük T -vel M balannihilátorainak az ideálját, azaz a

$$T = \{t \in R \mid tM = 0\}$$

halmazt. Ha $z \notin T$, akkor van olyan $m \in M$ elem, amelyre $zm \neq 0$, és az operátor-szorzat folytonossága miatt létezik z -nek olyan U környezete, amelyre $0 \notin Um$, tehát $U \cap T \neq \emptyset$, és így T zárt. Az R/T faktorgyűrű az M irreducibilis R/T -modulushoz endomorfizmusaihoz áll, mi több, figyelembe véve, hogy M és R/T lineárisan kompakt, a sűrűségi tételből következik, hogy R/T M -nek teljes endomorfizmusgyűrűje. Ezért R/T topológikusan egyszerű, T tehát R -ben maximális zárt ideál.

Minthogy R radikálja az összes irreducibilis R -modulus annihilátorideáljának a metszete, azért az előbbiek szerint R összes maximális zárt ideáljának a metszete benne van R radikáljában. De R radikálmentes, ezért a maximális zárt ideálok metszete 0 .

Tekintsük R összes maximális zárt ideáljának a Γ halmazát és jelöljük $\tilde{R}$ -sal a $\sum_{J \in \Gamma} R/J$ komplett direkt összeget. Minthogy $\bigcap_{J \in \Gamma} J = 0$, azért a 2, 1. tétel miatt R izomorf az R/J faktorgyűrűknek egy szubdirekt összegével. Ha φ_α jelöli R -nek R/J_α -ra való természetes homomorfizmusát, akkor tehát világos, hogy

$$\varphi(x) = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x)$$

R -nek $\tilde{R}$ -ba való folytonos homomorfizmusa. Minthogy $\varphi(x) = 0$ azt jelenti, hogy $\varphi_{\alpha}(x) = 0$ minden $J_{\alpha} \in \Gamma$ -ra, azért ebben az esetben $x \in \bigcap_{J \in \Gamma} J = 0$ érvényes, és így φ egy-egyértelmű leképezés. Most megmutatjuk, hogy $\text{Im } \varphi$ $\tilde{R}$ -nek sűrű részhalmaza. Tekintsük ugyanis Γ -nak egy véges $J_1, \dots, J_r$ részhalmazát és legyenek $y_i \in R/J_i$ ($i = 1, \dots, r$) előre adott tetszőleges elemek. Minthogy az 5, 4. segéd-tétel szerint

$$\left\{ \bigcap_{j \neq i} J_j, J_i \right\} = R$$

azért léteznek olyan $x_i \in \bigcap_{j \neq i} J_j$ ($i = 1, \dots, r$) elemek, amelyekre $\varphi_i(x_i) = y_i$. Az $x = x_1 + \dots + x_r$ elemre pedig érvényes $\varphi_i(x) = \varphi_i(x_i) = y_i$, tehát R -ben létezik olyan x elem, amelyre véges sok i értékre $\varphi_i(x)$ előre megadott értékeket vesz fel; $\text{Im } \varphi$ tehát sűrű $\tilde{R}$ -ban.

Másrészt φ folytonos homomorfizmus és R lineárisan kompakt, azért a 4, 7. és 4, 6. állításból következik, hogy $\text{Im } \varphi$ $\bar{R}$ -nak zárt részgyűrűje. Így tehát $\text{Im } \varphi = \bar{R}$.

Feltehető, hogy R -nek a topológiája legdurvább lineárisan kompakt topológia. Tekintsük a Γ által generált C filtert és egy $U = \{U\}$ R -beli bázisfiltert. Az $U + C$ ($U \in \mathcal{U}$, $C \in \mathcal{C}$) balideálok nyilván egy V filtert alkotnak, és $\downarrow V = 0$. Ha V -t tekintjük R bázisfilterének, akkor ezáltal az U által meghatározott topológiánál durvább topológiát kaptunk, ezért a feltétel szerint V az U -val ekvivalens topológiát indukál; így minden $U_0 \in \mathcal{U}$ balideáljához van olyan $U + C \in V$ balideál, amelyre $U + C \subseteq U_0$, tehát $C \subseteq U_0$. Azt nyertük, hogy ha U_0 R -nek tetszőleges nyílt balideálja, akkor van véges sok olyan $J_1, \dots, J_r$ maximális zárt ideál, amelyre fennáll $J_1 \cap \dots \cap J_r = C \subseteq U_0$.

Az U_0 balideálnak R/J -ben, az $\{U_0, J\}/J$ balideál felel meg, és amennyiben $J \neq J_1, \dots, J_r$, úgy az 5, 4. segédétel miatt $\{U_0, J\} \supseteq \{J_1 \cap \dots \cap J_r, J\} = R$ érvényes. Ezért $\sum_{J \in \Gamma} \{U_0, J\}/J$ $\bar{R}$ -nek olyan nyílt balideálja, amelyre fennáll $\varphi(U_0) \supseteq \sum_{J \in \Gamma} \{U_0, J\}/J$. Így φ nyílt leképezés. Ezzel kimutattuk, hogy R algebrai és topológiai értelemben topológikusan egyszerű lineárisan kompakt gyűrűk komplett direkt összege.

b) $\Rightarrow$ c). Legyen $R = \sum_{\alpha} R_{\alpha}$, ahol R_{α} egy K_{α} ferdetest feletti V_{α} vektortér teljes endomorfizmusgyűrűje, és legyen M egy lineárisan kompakt R -modulus.

Tekintsük V_{α} -nak egy v elemét és K_{α} -nak vK_{α} -ra történő homomorfizmusát; a $v \neq 0$ esetben, mivel K_{α} ferdetest, ez izomorfizmus. Jelölje $e \in R_{\alpha}$ azt a lineáris transzformációt, amelyre $ev = v$, azaz vK_{α} -t önmagába viszi, és az összes vK_{α} -n kívüli vektort 0-ba képezi le. Kimutatjuk, hogy $R_{\alpha}e$ R -nek minimális balideálja. Ha ugyanis L olyan balideál, amelyre $0 \neq L \subseteq R_{\alpha}e$, akkor L -nek bármely $l \neq 0$ elemére $l = re$ miatt $lv \neq 0$, l tehát vK_{α} -nak V_{α} -ba történő izomorfizmusa, miközben az összes többi vektort 0-ba viszi. Jelölje k V_{α} -nak azt az endomorfizmusát, amely lv -t v -re képezi, és az $\text{Im } l$ -en kívüli vektorokat 0-ba. Ekkor nyilván $e = kl \in L$, amiből $R_{\alpha}e = L$ következik. R_{α} -nek tehát van minimális balideálja. Mivel R_{α} topológikusan egyszerű, és R_{α} -nak B_{α} baltalpa 0-tól különböző ideál, azért B_{α} sűrű R_{α} -ban. R_{α} -t, és így R -et is, tehát minimális balideálok generálják.

Jelölje U M -nek egy tetszőleges nyílt részmodulusát és legyen $0 \neq m' \in M' = M/U$. Ha A jelöli az

$$A = \{r \in R \mid rm' = 0\}$$

halmazt, akkor A R -nek nyílt balideálja és R -rel együtt R/A -t is minimális részmodulusai generálják. Minthogy $R/A \cong Rm'$, ezért Rm' -t és vele együtt M' -t is minimális részmodulusok generálják. Ezért a 4, 10. állítás szerint M' véges sok minimális részmodulus direkt összege. Így M' -ben van (véges sok) olyan maximális részmodulus, amelynek a metszete 0. Áttérve M' -ből M -re azt kapjuk, hogy M -nek bármely U nyílt részmodulusa M maximális nyílt részmodulusainak a metszete. Mivel pedig $\cap U = 0$, azért M összes maximális nyílt részmodulusának a metszete 0.

c) $\Rightarrow$ d). M maximális nyílt részmodulusainak egy Δ rendszerét függetlennek nevezzük, ha bármely véges sok $N_1, \dots, N_r \in \Delta$ részmodulusra $M/(N_1 \cap \dots \cap N_r)$ minimális részmodulusoknak r -tagú direkt összege. Független rendszer mindig

létezik, mert egyetlen maximális nyílt részmodulus nyilván ilyen alkot. Ha Δ független rendszer és $\bigcap_{N \in \Delta} N \neq 0$, akkor Δ -t kibővítjük a következőképpen egy további maximális nyílt balideál hozzávételével. Legyen N olyan maximális nyílt balideál, amelyre $\bigcap_{N \in \Delta} N \not\subseteq N$. A feltétel szerint ilyen N létezik, jelöljük Δ' -vel az N -nel kiegészített Δ rendszert. Δ bármely véges $N_1, \dots, N_r$ elemeire fennáll $\bigcap_i N_i \not\subseteq N$, tehát $\{\bigcap_i N_i, N\} = M$, és érvényes

$$0 \neq M/N = \{\bigcap_i N_i, N\}/N \cong \bigcap_i N_i / (\bigcap_i N_i \cap N),$$

ezért $\bigcap_i N_i / (\bigcap_i N_i \cap N)$ minimális részmodulus. Másrészt érvényes

$$M / \bigcap_i N_i = \{\bigcap_i N_i, N\} / \bigcap_i N_i \cong N / (\bigcap_i N_i \cap N),$$

és így Δ függetlensége miatt $N / (\bigcap_i N_i \cap N)$ minimális részmodulusoknak r -tagú direkt összege. Minthogy pedig

$$M / (\bigcap_i N_i \cap N) \cong N / (\bigcap_i N_i \cap N) + \bigcap_i N_i / (\bigcap_i N_i \cap N),$$

azért $M / (\bigcap_i N_i \cap N)$ minimális részmodulusoknak $r+1$ tagú direkt összege.

Ezért Δ' független rendszer. Az eljárást folytatva eljutunk egy Δ_0 maximális független rendszerhez, amelyre már $\bigcap_{N \in \Delta_0} N = 0$ érvényes.

Feltehető, hogy M -ben a τ topológia a legdurvább lineárisan kompakt topológia. Jelöljük $\mathbf{D}$ -vel a Δ_0 által generált filtert. $\downarrow \mathbf{D} \subseteq \bigcap_{N \in \Delta_0} N = 0$ miatt $\mathbf{D}$ -t tekinthetjük egy τ_1 topológia bázisfilterének, és mivel $\mathbf{D}$ elemei τ -nyílt részmodulusok, azért $\tau \leq \tau_1$ érvényes, tehát $\tau = \tau_1$. Ekkor a 4, 13. állítás szerint az $M_\alpha = M / U_\alpha$ ($U_\alpha \in \mathbf{D}$) modulusok olyan Ω inverz-rendszert alkotnak, amelynek limesze algebrailag és topológiailag izomorf M -mel. Másrészt M_α Δ_0 függetlensége miatt véges sok minimális részmodulus direkt összege. Ha $\alpha > \beta$, azaz $U_\alpha \subset U_\beta$, akkor feltehető, hogy $U_\beta = \bigcap_{i=1}^l N_i$ és $U_\alpha = \bigcap_{i=1}^k N_i$ ($k > l$; $N_i \in \Delta_0$). Könnyű látni, hogy $M_\alpha = M / \bigcap_{i=1}^k N_i$ -nek $M_\beta = M / \bigcap_{i=1}^l N_i$ -re történő homomorfizmusánál az $M_{\alpha i} = \bigcap_{j \neq i} N_j / \bigcap_{i=1}^k N_i$ minimális részmodulusnak a képe 0, ha $i > l$, illetve az $M_{\beta i} = \bigcap_{j \neq i} N_j / \bigcap_{i=1}^l N_i$ minimális részmodulus, ha $i \leq l$. Az M_α és M_β modulus viszont éppen ezeknek az $M_{\alpha i}$ -knek illetve $M_{\beta i}$ -knek a direkt összege. Így az Ω rendszer az $M_{\alpha i}$ -k által alkotott Ω_i rendszerek direkt összege. A 3, 5. állítás következtében érvényes

$$M \cong \varprojlim \Omega \cong \sum_i \varprojlim \Omega_i.$$

Minthogy az Ω_i rendszer modulusai, amennyiben 0-tól különböznek, izomorf

egyszerű modulusok, azért $\lim \Omega_i = M_i$ is egyszerű modulus. Következően algebrai és topológiai értelemben érvényes az $M \cong \sum_i M_i$ izomorfia, amivel kimutattuk a d) feltétel teljesülését.

Megjegyezzük, hogy a c) $\Rightarrow$ d) bizonyításának befejező részét ugyanígy elvégezhetjük volna, mint ahogyan azt az a) $\Rightarrow$ b) bizonyításánál tettük.

d) $\Rightarrow$ e) Tekintsünk egy tetszőleges olyan

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$$

exakt sorozatot, amelyben A, B, C unitér lineárisan kompakt R -modulusok, a leképezések pedig folytonosak. Azt kell kimutatnunk, hogy ekkor $\text{Ker } \beta = \text{Im } \alpha$ B -nek direkt összeadandója. Mindenekelőtt megjegyezzük a d) feltétel és a 4, 22. állítás következtében a tekintett modulusok L -kompaktok.

Míthogy fennáll $B/\text{Ker } \beta \cong C$, azért a feltétel szerint érvényes a

$$(1) \quad B/\text{Ker } \beta = \sum_{\gamma \in \Gamma} (B_\gamma/\text{Ker } \beta)$$

direkt felbontás, ahol $B_\gamma/\text{Ker } \beta$ $B/\text{Ker } \beta$ -nak minimális részmodulusa és β folytonossága miatt B_γ B -nek zárt részmodulusa. A feltétel szerint $\text{Ker } \beta$ -t és valamennyi B_γ -t ($\gamma \in \Gamma$) minimális részmodulusaik generálják, ezért $\text{Ker } \beta \subset B_\gamma$ miatt létezik minden B_γ -hoz egy olyan D_γ minimális részmodulus, amelyre a $\text{Ker } \beta$ és D_γ által algebrailag generált $\{\text{Ker } \beta, D_\gamma\}$ benne van B_γ -ban és $\text{Ker } \beta \cap D_\gamma = 0$. Másrészt $B_\gamma/\text{Ker } \beta$ egyszerű, ezért

$$(2) \quad \{\text{Ker } \beta, D_\gamma\} = B_\gamma \quad (\gamma \in \Gamma).$$

Jelölje D a D_γ -k ($\gamma \in \Gamma$) által generált részmodulus lezártját. A 4, 8. állítás szerint $\{\text{Ker } \beta, D\}$ B -ben zárt, ezért figyelembe véve (1)-et és (2)-t elő áll

$$\{\text{Ker } \beta, D\} = B.$$

Másrészt

$$\{\text{Ker } \beta, D\}/\text{Ker } \beta = B/\text{Ker } \beta = \sum_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma/\text{Ker } \beta = \sum_{\gamma \in \Gamma} \{\text{Ker } \beta, D_\gamma\}/\text{Ker } \beta$$

miatt egy $x \in B$ elemre $x \in \text{Ker } \beta \cap D$ csak akkor állhat fenn, ha $x = 0$. Ezért $\text{Ker } \beta$ és D algebrailag direkt összeget generál, tehát $B = \text{Ker } \beta + D$. Míthogy a

$$\varphi: \text{Ker } \beta + D \rightarrow B$$

izomorfizmus nyilván folytonos, azért az L -kompaktság miatt φ nyílt is. Ezzel bebizonyítottuk, hogy B -nek $\text{Ker } \beta$ algebrai és topológiai értelemben direkt összeadandója, azaz a $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ exakt sorozat széteső.

e) $\Rightarrow$ f) Tekintsünk egy olyan

$$\begin{array}{c} M \\ \downarrow \varphi \\ A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0 \end{array}$$

diagramot, amelyben az $A \rightarrow B \rightarrow 0$ sorozat exakt. Ekkor

$$0 \rightarrow \text{Ker } \alpha \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$$

szintén exakt sorozat, így a feltevés folytán széteső. Következésképp létezik A -nak $\text{Ker } \alpha \oplus B$ -re történő β nyílt-folytonos izomorfizmusa. Így a β^{-1} inverz leképezés is folytonos és az

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow \varphi & M \\ B & & \downarrow \varphi \\ \beta^{-1} \downarrow & & A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0 \end{array}$$

diagram kommutatív, tehát M projektív.

f) $\Rightarrow$ a) Jelölje J az R gyűrű radikálját. A feltétel szerint R , mint R -balmodulus lineárisan kompakt, ezért az 5, 1. állítás miatt J zárt és az R/J fektorgyűrű szintén lineárisan kompakt. Jelölje ι az identikus leképezést, és tekintsük az

$$\begin{array}{ccc} & R/J & \\ & \downarrow \iota & \\ R & \xrightarrow{\alpha} R/J \rightarrow 0 \end{array}$$

diagramot. A feltétel szerint R/J projektív, azért létezik R/J -nek, mint R -modulusnak egy R -be való φ folytonos izomorfizmusa, úgy, hogy fennálljon $\alpha\varphi = \iota$. Bebizonyítjuk, hogy most érvényes az

$$(3) \quad R = \text{Im } \varphi + J \quad (J = \text{Ker } \alpha)$$

algebrai direkt felbontás. Legyen ugyanis $r \in R$, ekkor érvényes

$$\varphi\alpha(r) = a \in \text{Im } \varphi$$

$$\alpha(r - a) = \alpha(r) - \alpha\varphi\alpha(r) = \alpha(r) - \alpha(r) = 0.$$

Következésképp $r - a \in \text{Ker } \alpha$, és így minden $r \in R$ elem

$$r = a + b \quad (a \in \text{Im } \varphi, b \in \text{Ker } \alpha)$$

alakba írható. Tegyük fel, hogy az $a' \in \text{Im } \varphi$ és $b' \in \text{Ker } \alpha$ elemekre $a' + b' = 0$. Ekkor

$$0 = \alpha(a' + b') = \alpha(a').$$

Mivel $a' \in \text{Im } \varphi$, azért létezik olyan R/J -beli c elem, amelyre $\varphi(c) = a'$, és fennáll

$$0 = \alpha(a') = \alpha\varphi(c) = c$$

amiből $a' = \varphi(c) = 0$ következik; ekkor azonban $b' = 0$ is teljesül. Ezzel kimutattuk, hogy (3) valóban teljesül.

Mínthogy R egységelemes, azért a (3) moduluselméleti direkt felbontás következtében a J radikálnak van e jobbegységeleme.

Most már elegendő kimutatni a

5, 5. segéd-tételt. Ha egy R gyűrű J radikálja jobbegységelemes, akkor $J = 0$.

Jelöljük ugyanis e -vel J jobbegységelemet. Ismeretes, hogy J maga radikálgűrű, ezért minden eleméhez, így $-e$ -hez is, létezik olyan $y \in J$ eleme, amelyre $y \circ (-e) = 0$, azaz $y - e - ye = -e = 0$.

Azt a tényt, hogy R egységelemes és a modulusok unitér modulusok, eddig csupán itt használtuk fel.

A hátralevő részben az $e) \Rightarrow f)$ és $f) \Rightarrow a)$ részekhez analóg megfontolásokat végzünk.

$e) \Rightarrow g)$ Tekintsünk egy olyan

$$\begin{array}{ccc} 0 & \rightarrow & A \xrightarrow{\alpha} B \\ & & \varphi \downarrow \\ & & M \end{array}$$

diagramot, amelyben a $0 \rightarrow A \rightarrow B$ sorozat exakt. Ekkor

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow B/\text{Im } \alpha \rightarrow 0$$

is exakt sorozat, ezért a feltétel szerint széteső, azaz érvényes $B \cong A \oplus (B/\text{Im } \alpha)$. Jelölje β B -nek A -ra történő felbontási homomorfizmusát. Ez nyilván folytonos és a

$$\begin{array}{ccc} 0 & \rightarrow & A \xrightarrow{\alpha} B \\ & & \varphi \downarrow \quad \downarrow \beta \\ & & M \quad A \\ & & \swarrow \varphi \end{array}$$

diagram kommutatív, tehát M injektív.

$g) \Rightarrow a)$ Legyen J ismét R radikálja. A feltétel szerint J injektív, ezért létezik egy olyan φ folytonos izomorfizmus, hogy a

$$\begin{array}{ccc} 0 & \rightarrow & J \xrightarrow{\alpha} R \\ & & \iota \downarrow \nearrow \varphi \\ & & J \end{array}$$

diagram kommutatív. Kimutathatjuk, hogy most érvényes az

$$R = \text{Ker } \varphi + J \quad (J = \text{Im } \alpha)$$

direkt felbontás. A φ leképezés definíciójából világos, hogy $\text{Ker } \varphi$ és J R -et generálja. Legyen $x \in \text{Im } \alpha \cap \text{Ker } \varphi$. Ekkor $J = \text{Im } \alpha$ miatt $x = \alpha(x)$, továbbá

$$x = \iota x = \varphi \alpha(x) = \varphi(x) = 0.$$

Így $\text{Im } \alpha \cap \text{Ker } \varphi = 0$, és R valóban előáll a $\text{Ker } \varphi$ -nek és J -nek, mint balmodulusoknak a direkt összegeként. E direkt felbontásból következik, hogy R egységelemes volta miatt J -nek van jobbegységeleme. Ezért az 5. 5. segédétel szerint $J=0$ és így R radikálmentes. $\square$

6. §. Féligegyszerű lineárisan kompakt gyűrűk jellemzése II.

Az 5. 3. tétel alkalmazásával könnyen fogjuk nyerni a féligegyszerű lineárisan kompakt gyűrűk gyűrűelméleti jellemzéseit. Ehhez azonban szükségünk lesz a következő általánosabb érvényű segédételre.

6.1. segéd-tétel. Egy R egységelemes topológikus gyűrűnek bármely L zárt balideáljára a következő két feltétel ekvivalens:

- (i) L jobbegységelemes;
- (ii) L R -nek direkt összeadandója.

A bizonyítás a Peirce-féle felbontáson alapul és ezenkívül még elemi topológiai megfontolásokat kell tennünk.

(i) $\Rightarrow$ (ii) jelölje e az L jobbegységelemét és tekintsük az

$$L' = \{x \mid x = r - re, r \in R\}$$

balideált. e az L' balideált jobbról annihilálja, és fordítva, ha e az $s \in R$ elemet jobbról annihilálja, akkor fennáll $s = s - se$, következésképp $s \in L'$. Ha tehát $s \notin L'$, akkor $se \neq 0$. A szorzás folytonossága miatt s -nek van olyan U környezete, hogy Ue a 0 -t nem tartalmazza. Ebből $U \cap L' = \emptyset$ következik, és így $R \setminus L'$ nyílt, vagyis L' zárt.

$L = Le$ -ből és $L'e = 0$ -ból következik, hogy $L \cap L' = 0$. Másrészt érvényes $r = re + (r - re)$ minden $r \in R$ elemre, ezért érvényes az

$$R = L + L'$$

direkt felbontás, ahol L és L' zárt balideálok.

Kimutatjuk, hogy ez a felbontás topológiai értelemben is fennáll. Ehhez elegendő bebizonyítani, hogy 0 -nak bármely $U_1 \subseteq L$ és $U_2 \subseteq L'$ környezetéhez létezik R -ben a 0 -nak olyan W környezete, amelyre $W \subseteq U_1 + U_2$. Világos, hogy $U_1 = U \cap L$ és $U_2 = U' \cap L'$ érvényes alkalmas $U, U' \subseteq R$ környezetekkel; ezért feltehető, hogy $U_1 = U_0 \cap L$ és $U_2 = U_0 \cap L'$ ($U_0 \subseteq U \cap U'$) alakú. Válasszuk meg ezután W -t, V_1 -et és V_2 -t úgy, hogy teljesüljenek a

$$V_1 e \subseteq U_0, \quad V_2 - V_2 e \subseteq U_0, \quad W \subseteq V_1 \cap V_2$$

feltételek. Ekkor egy $w \in W$ elemre érvényes

$$we \in V_1 e \cap L \subseteq U_0 \cap L = U_1,$$

$$w - we \in (V_2 - V_2 e) \cap L' \subseteq U_0 \cap L' = U_2.$$

Következésképp $w = we + (w - we) \in U_1 + U_2$, amivel az állítást kimutattuk.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Jelölje most e R egységelemét, és legyen $R = L \oplus L'$. Ha $e = e_1 + e_2$ ($e_1 \in L, e_2 \in L'$) az egységelem felbontása, akkor a komponensek egyértelműsége miatt közvetlenül látható, hogy $Le_2 = 0$ és így e_1 L -nek jobbegységelemé. []

Most már be tudjuk bizonyítani a következő

6.2. tételt. Egy R lineárisan kompakt gyűrű akkor és csak akkor jéligegyszerű, ha jobbegységelemes és teljesül rá az alábbi feltételek valamelyike:

- a) R -ben a maximális nyílt balideálok metszete 0 ;
- b) R minimális balideálok komplett direkt összege;
- c) R -nek minden zárt balideálja direkt összeadandója;
- d) R -nek minden zárt balideálja jobbegységelemes.

Az a), b), c) feltételek az 5. 3. tétel c), d), e) feltételnek gyűrűelméleti megfelelői; *Artin*-gyűrűk esetében a d) feltétel a féligegyszerűség GOLDMAN—FUCHS—SZELE kritériumát adja ([5], [6]).

Bizonyítás. Alkalmazzuk az 5. 3. tételt R -re, mint R -modulusra, ekkor a féligegyszerűségből következik, hogy R jobbegységelemes és teljesül a). Továbbá a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) is igaz.

Ha R jobbegységelemes és J a radikálja, akkor a c) feltételből következik, hogy J R -nek direkt összeadandója, vagyis $R = J \oplus K$. Jelölje e R jobbegységelemét és legyen $e = e_1 + e_2$ ($e_1 \in J$, $e_2 \in K$).

$$Je_2 \subseteq J \cap K = 0$$

miatt minden $x \in J$ elemre teljesül $x = xe = x(e_1 + e_2) = xe_1$, ezért J is jobbegységelemes és így az 5. 5. segédétel folytán $J = 0$. Így c)-ből következik R féligegyszerűsége.

d) és e) ekvivalenciája a 6. 1. segédétel alapján triviális. $\square$

7. §. Neumann-reguláris lineárisan kompakt gyűrűk

A *Neumann-reguláris* lineárisan kompakt gyűrűket úgy jellemezhetjük, hogy minden főbalideálja lezártjának (röviden zárt főbalideáljának) van jobbegységeleme. Ez a jellemzés a diszkrét esetben ismert. (vö. SZÁSZ F. [24] Satz 2, 6, ill. [25] 5, 4. Állítás). Bebizonyítjuk továbbá, hogy a lineárisan kompakt gyűrűk közül a *Neumann-regulárisok* éppen a féligegyszerűek.

7. 1. tétel. *Egy R lineárisan kompakt gyűrűre az alábbi állítások ekvivalensek:*

- a) R *Neumann-reguláris*;
- b) R *féligegyszerű*;
- c) R minden zárt főbalideáljának van jobbegységeleme.

Bizonyítás. a) $\Rightarrow$ b) Kimutatjuk, hogy minden *Neumann-reguláris* gyűrű egyúttal féligegyszerű is (JACOBSON [7] Theorem 8). Legyen ugyanis a R radikáljának egy tetszősszerű eleme. Minthogy R *Neumann-reguláris*, azért van olyan $x \in R$ elem, amelyre fennáll $axa = a$. a -val együtt $-ax$ is eleme R radikáljának, így $-ax$ kvázireguláris elem, azaz létezik olyan $y \in R$ elem, hogy érvényes $y - ax - yax = 0$. Szorozzuk mindkét oldalt jobbról a -val, előáll

$$ya - axa - yaxa = 0,$$

azaz

$$ya - a - ya = 0.$$

Következőleg $a = 0$ és így R radikálmentes.

b) $\Rightarrow$ c) a 6. 2. tétel alapján triviális.

c) $\Rightarrow$ a) Legyen a R -nek tetszőleges eleme és jelölje $\overline{(a)}$ az a elem által generált zárt főbalideált, továbbá $e \overline{(a)}$ -nek jobbegységelemét. Tekintsük a -nak egy tetszőleges U_a környezetét; feltehető, hogy $U_a = a + U$, ahol U R -nek egy nyílt balideálja.

A szorzás folytonossága miatt létezik olyan V nyílt balideál R -ben, amelyre fennáll $V \subseteq U$ és $\forall e \in U. e \in (a)_l$ miatt $e + V$ tartalmaz $(a)_l$ -beli elemet, legyen az $e' = na + ra$ (n egész, $r \in R$). Legyen $x_u = ne' + e'r$, ekkor érvényes

$$\begin{aligned} x_u a &= (n(na + ra) + (na + ra)r)a = n^2 a^2 + nra^2 + \\ &+ nara + rara = (na + ra)^2 = e'^2 \in (e + V)^2 = \\ &= e + eV + Ve + V^2 \subseteq e + U. \end{aligned}$$

Jelölje $Z(U)$ a $Z(U) = \{z \in R \mid za \in U\}$ halmazt. Mivel bármely $y, z \in Z(U)$ és $r \in R$ elemre érvényes

$$(y \pm z)a = ya \pm za \in U,$$

$$(rz)a = r(za) \in RU \subseteq U,$$

azért $Z(U)$ balideál. Legyen $x \notin Z(U)$, ekkor van olyan $a \in R$ elem, hogy $xa \notin U$. Mivel U nyílt és így zárt is, azért x -nek van olyan U_x környezete, amelyre $U_x a \cap U = \emptyset$, következésképp $U_x \cap Z(U) = \emptyset$. Így $Z(U)$ zárt balideál.

Tekintsük $Z(U)$ -nak $F(U) = x_u + Z(U)$ mellékosztályát. Ha $x \in F(U)$, akkor $xa \in (x_u + Z(U))a = x_u a + Z(U)a \subseteq e + U$, és így $F(U)$ benne van az $\{x \in R \mid xa \in e + U\}$ halmazban. A tartalmazás fordítva is fennáll, ha ugyanis $x \in \{x \in R \mid xa \in e + U\}$, akkor $(x - x_u)a = xa - x_u a \in e + U - (e + U) \subseteq U$ és így $x - x_u \in Z(U)$, következésképp $x \in F(U)$.

Legyen U R -nek egy bázisfiltere, és tekintsük az $F = \{F(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ rendszert, könnyű látni, hogy F filtert alkot, mégpedig zárt balideálok szerinti mellékosztályból álló filtert. R lineáris kompaktsága miatt létezik egy $x_0 \in \downarrow F$ elem, és érvényes $x_0 a \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} (e + U) = e$. Ebből következik, hogy $ax_0 a = a$. Minthogy pedig a tetszőleges elem volt, azért R valóban *Neumann-reguláris*. $\square$

Itt jegyezzük meg, hogy a) $\Rightarrow$ c) következtetés helyessége minden topológikus gyűrűben érvényes és közvetlenül bizonyítható.

8. §. Lokálisan lineárisan kompakt gyűrűkről

8.1. definíció. Egy R topológikus gyűrűt *lokálisan lineárisan kompaktnak* nevezünk, ha R -nek van olyan $L \neq 0$ nyílt balideálja, amely, mint R -modulus, lineárisan kompakt.

Az alábbi példa azt mutatja, hogy egy lokálisan lineárisan kompakt gyűrű nem szükségképpen lineárisan kompakt, még akkor sem, ha történetesen féligegyszerű is.

Tekintsünk egy $R_1 \neq 0$ lineárisan kompakt féligegyszerű gyűrűt és egy R_2 gyűrűt, amely végtelen sok test diszkrét direkt összege. R_2 a diszkrét topológiában nem lineárisan kompakt, hiszen nem is teljes. Az $R = R_1 \oplus R_2$ direkt összegben R_1 nullától különböző lineárisan kompakt nyílt ideál, R tehát lokálisan lineárisan kompakt. Legyen F R_2 -ben egy olyan ideálok szerinti mellékosztályokból álló filter, amelyre $\downarrow F = \emptyset$. Mivel F R -nek zárt ideálok szerinti mellékosztályokból álló filtere, azért R nem lehet lineárisan kompakt. Világos továbbá, hogy R is féligegyszerű gyűrű.

Ebben a §-ban az 5. 3. tétel alkalmazásával bebizonyítjuk, hogy minden félig-egyszerű lokálisan lineárisan kompakt gyűrűnek van minimális balideálja.

Ezzel a primitív lokálisan lineárisan kompakt gyűrűk leírását visszavezettük a minimális balideált tartalmazó primitív gyűrűk leírására, ez utóbbiakat viszont jellemzi JACOBSON struktúra-tétele (3.8. tétel). Látni fogjuk továbbá, hogy milyen egyszerű szerkezetűek az egyszerű, illetve topológikusan egyszerű lokálisan lineárisan kompakt gyűrűk, ellentétben a lokálisan kompakt esettel.

8. 2. tétel. *Ha R féligegyszerű lokálisan lineárisan kompakt gyűrű, akkor R tartalmaz minimális balideált.*

Bizonyítás. Legyen L R -nek olyan 0-tól különböző nyílt balideálja, amely mint R -modulus lineárisan kompakt, és tekintsük az L balannihilátoraiból álló $A = \{r \in R \mid rL = 0\}$ ideált. Könnyű látni, hogy A zárt ideál. Mivel $A \cap L$ R -nek olyan balideálja, amely zérógyűrű, azért $A \cap L$ benne van R radikáljában, következésképpen $A \cap L = 0$.

Tekintsük az R/A faktorgyűrűt az R topológiája által indukált τ topológiában és jelölje φ R -nek R/A -ra való természetes homomorfizmusát. Mivel $L \cap A = 0$, azért $\varphi(L) = L'$ L -lel izomorf R/A -modulus. R/A elemeit tekinthetjük L hiperfolytonos endomorfizmusainak, amennyiben az $\bar{r} = r + A \in R/A$ ($r \in R$) és $x \in L$ elemhez az $\bar{r}(x) = rx$ ($x \in L$) elemet rendeljük hozzá. L hiperfolytonos endomorfizmusai H gyűrűjének a 4. §-ban leírt topológiája egy τ^* topológiát indukál R/A -ban. Ha $U^*(x_1, \dots, x_n; U)$ ($x_1, \dots, x_n \in L$; $U \subseteq L$) egy τ^* -nyílt balideál R/A -ban, akkor válasszuk meg a V R -beli nyílt balideált úgy, hogy teljesüljön $V \subseteq L$, $Vx_1, \dots, Vx_n \subseteq U$. Most a $V' = \varphi(V)$ τ -nyílt balideálra nyilván teljesül $V' \subseteq U^*$, ezzel azt kaptuk, hogy $\tau \leq \tau^*$.

Jelöljük Q -val R/A -nak H -beli lezártját. Mivel H a 4. 25. állítás szerint lineárisan kompakt, azért a Q zárt részgyűrű teljes. Ugyanígy, mint a 4. 25. állítás bizonyításánál belátható, hogy Q , mint gyűrű lineárisan kompakt.

Kimutatjuk, hogy L' Q -nak zárt balideálja. Legyen $q \in L'$, és tekintsük q -nak $q + U_\alpha^*$ környezeteit. Mivel $q \in L'$, azért $q \in l_\alpha + U_\alpha^*$ ($l_\alpha \in L'$) és fennáll $q = \downarrow \{l_\alpha + U_\alpha^*\}$. Másrészt könnyű látni, hogy $\{l_\alpha + U_\alpha^* \cap L'\} = \{(l_\alpha + U_\alpha^*) \cap L'\}$ filtert alkot. $\tau \leq \tau^*$ miatt ez a filter τ -zárt R/A -részmodulusok szerinti mellékosztályokból áll, ezért L' lineáris kompaktsága miatt $\downarrow \{l_\alpha + U_\alpha^* \cap L'\} \in L'$. Következésképpen $q \in L'$, azaz L' Q -nak τ^* -zárt részhalma. Legyen ezután $q \in Q$ és $l \in L'$. ql -nek bármely $U_{q,l}^*$ környezetéhez van q -nak olyan V_q^* környezete, amelyre teljesül $V_q^* l \subseteq U_{q,l}^*$. Mivel R/A Q -ban sűrű, azért létezik egy $r \in R/A \cap V_q^*$ elem, és így $rl \in U_{q,l}^* \cap L'$. Következésképpen $ql \in L' = L'$. L' tehát valóban Q -nak zárt balideálja.

Ezután megmutatjuk, hogy L és L' mint Q -modulusok operátorizomorfok. Ehhez csupán azt kell belátnunk, hogy érvényes

$$\varphi(ql) = q\varphi(l) \quad (q \in Q, l \in L).$$

Legyen $U^*(x, U_\alpha)$ egy Q -beli nyílt balideál. Ehhez válasszuk meg a $V(x, \alpha)$ R -beli nyílt balideált úgy, hogy teljesüljön $V(x, \alpha)x \subseteq U_\alpha$. ql -nek $q + V(x, \alpha)$ környezetehez van q -nak olyan $q + W^*(x, \alpha)$ környezete, hogy teljesül $W^*(x, \alpha)l \subseteq V(x, \alpha)$ és $W^*(x, \alpha)\varphi(l) \subseteq U^*(x, \alpha)$. Mivel R/A Q -ban sűrű, azért létezik egy $r_{x,\alpha} \in (q + W^*(x, \alpha)) \cap$

$\cap R/A$ elem és így $q + W^*(x, \alpha) = r_{x,\alpha} + W^*(x, \alpha)$, továbbá $ql + V(x, \alpha) = r_{x,\alpha}l + V(x, \alpha)$. x és α összes lehetséges választása mellett érvényes

$$ql = \cap \{r_{x,\alpha}l + V(x, \alpha)\},$$

ezért fennáll

$$\varphi(ql) = \cap \{\varphi(r_{x,\alpha}l) + \varphi(V(x, \alpha))\} \subseteq \cap \{r_{x,\alpha}\varphi(l) + U^*(x, \alpha)\}.$$

Másrészt $q = \cap \{r_{x,\alpha} + W^*(x, \alpha)\}$ miatt érvényes

$$\begin{aligned} q\varphi(l) &= \cap \{r_{x,\alpha} + W^*(x, \alpha)\}\varphi(l) \subseteq \cap \{r_{x,\alpha}\varphi(l) + W^*(x, \alpha)\varphi(l)\} \subseteq \\ &\subseteq \cap \{r_{x,\alpha}\varphi(l) + U^*(x, \alpha)\} \end{aligned}$$

és így szükségképpen $\varphi(ql) = q\varphi(l)$.

Most kimutatjuk, hogy Q is féligegyszerű. Jelölje evégből J Q radikálját. Mint-hogy L és L' operátorizomorfok, ezért $\varphi^{-1}(JL')$ kvázireguláris balideál L -ben és így R féligegyszerűsége miatt $\varphi^{-1}(JL') = 0$, vagyis $JL' = 0$. Ezért L és L' operátorizomorf volta miatt fennáll

$$JL \cdot L = \varphi(JL)L = JL'L = 0,$$

és így $JL \subseteq A \cap L = 0$. Mivel J elemei L -nek endomorfizmusai, azért szükségképpen $J = 0$.

Mint-hogy Q lineárisan kompakt féligegyszerű gyűrű, azért 5, 3. b) miatt egy-ségelemes. L és L' operátorizomorf volta miatt L unitér Q -modulus. Mivel Q elemei L -nek hiperfolytonos endomorfizmusai, azért L lineárisan kompakt Q -modulus. Így 5, 3. d) miatt L -nek létezik egy K minimális Q -részmodulusa. Ha $0 \neq K_1 (\subseteq K)$ balideálja R -nek, akkor $L'K_1 \neq 0$. Ellenkező esetben ugyanis $K_1^2 \subseteq LK_1 = L'K_1 = 0$ volna, ami azt jelentené, hogy K_1 benne van R radikáljában. Most tehát $L'K_1 \neq 0$, és érvényes

$$K = Q(L'K_1) = (QL')K_1 \subseteq L'K_1 = LK_1 \subseteq K_1.$$

K tehát R -nek minimális balideálja. $\square$

8, 3. korollárium. *Minden primitív lokálisan lineárisan kompakt gyűrűnek van minimális balideálja.*

Mivel a primitív gyűrűk egyszersmind féligegyszerűek is, azért az állítás a 8, 2. tétel alapján triviális.

A 8, 3. korollárium tehát visszavezeti a lokálisan lineárisan kompakt gyűrűk vizsgálatát a minimális balideállal rendelkező primitív gyűrűk vizsgálatára. Ez utóbbi gyűrűk részletes leírása megtalálható JACOBSON [8] könyvének IV. fejezetében (lásd még a 3, 8. tételt).

Az egyszerű lokálisan lineárisan kompakt gyűrűket a Litoff-tétel jellemzi, ugyanis érvényes a

8, 4. korollárium. *Minden egyszerű lokálisan lineárisan kompakt R gyűrű lokálisan egy S ferdetest feletti mátrixgyűrű, azaz R -nek minden véges részhalmaza beágyazható egy olyan M részgyűrűbe, amely egy S feletti teljes mátrixgyűrűvel izomorf.*

A 8, 3. tétel alapján R -nek van minimális balideálja, így az állítás közvetlenül folyik a Litoff-tételből, amely azt mondja ki, hogy egy minimális balideált tartalmazó egyszerű gyűrű lokálisan egy ferdetest feletti mátrixgyűrű. (Erre vonatkozóan lásd JACOBSON [8] 90. oldal Theorem 3-at; a tételnek elemi közvetlen bizonyítását adja FAITH—UTUMI [3] cikke.)

8, 5. korollárium. Ha R jobbégységelemes egyszerű lokálisan lineárisan kompakt gyűrű, akkor R egy ferdetest feletti végesrangú mátrixgyűrűvel izomorf.

A 8, 2. tétel alapján R -nek van minimális balideálja és így a minimális balideálok összege, R baltalpa 0-tól különböző ideál, tehát maga R . Ezért, ha e jelöli R jobbégységelemét, akkor $e = e_1 + \dots + e_n$, ahol az e_i komponensek L_i minimális balideálok elmei ($i = 1, 2, \dots, n$). Következésképpen R -et véges sok minimális balideál generálja, és ezek közül kiválasztható nyilván szintén véges sok olyan, amelyeknek direkt összege R -et állítja elő. Ha viszont egy e jobbégységelemes gyűrű véges sok minimális balideál direkt összege, akkor E. NOETHER jól ismert tétele szerint R izomorf egy ferdetest feletti mátrixgyűrűvel.

Érdemes itt összehasonlítani tennünk a lokálisan lineárisan kompakt és a lokálisan kompakt gyűrűk között. Míg az eddig látottak alapján a lokálisan lineárisan kompakt gyűrűk szerkezete igen áttekinthetőnek mondható, addig a lokálisan kompakt gyűrűk körében mások a viszonyok. Legújabbán SZKORNYAKOV [23] konstruált egy olyan egységelemes, egyszerű, lokálisan kompakt — nem diszkrét — gyűrűt, amely nem ferdetest feletti mátrixgyűrű.

A következő tétel két korolláriuma azt mutatja, hogy a topológikusan egyszerű lokálisan lineárisan kompakt (Hausdorff-terű) gyűrűk közül azok, amelyekben a topológia a legdurvább, vagy azok, amelyek jobbégységelemesek, éppen a topológikusan egyszerű lineárisan kompakt gyűrűk.

8, 6. tétel. Ha R topológikusan egyszerű, lokálisan lineárisan kompakt gyűrű és $L (\neq 0)$ R -nek nyílt lineárisan kompakt balideálja, akkor R direkt összege L -nek, és egy olyan K diszkrét balideálnak, amelyet minimális balideálok generálnak.

Bizonyítás. Mivel a 8, 2. tétel szerint R tartalmaz minimális balideált, ezért R -nek a B baltalpa 0-tól különböző, továbbá B R -ben sűrű ideál: $R = \bar{B}$. Legyen $L \neq 0$ R -nek lineárisan kompakt nyílt balideálja. Ha $L = R$, akkor a tétel állítása triviális. Az $L \neq R$ esetben tekintsük mindazokat a minimális balideálok által generált $K_1, \dots, K_\alpha, \dots$ balideálokat, amelyekre $K_\alpha \cap L = 0$. Mivel $L \neq R$ és $\bar{B} = R$, azért létezik legalább egy ilyen balideál. Legyen $K_{\alpha_1} \subseteq K_{\alpha_2} \subseteq \dots$ ilyen balideálok-nak egy felszálló láncja és legyen $K_0 = \bigcup_{\alpha_i} K_{\alpha_i}$. Világos, hogy K_0 balideál. Ha $a \in K_0$, akkor $a \in K_{\alpha_i}$ valamilyen α_i -re, és így a benne van véges sok balideál összegében, következésképpen K_0 -at is minimális balideálok generálják. Másrészt tekintsünk egy $b \in K_0 \cap L$ elemet. Minthogy $b \in K_{\alpha_j}$ valamilyen α_j -re, azért $b \in K_{\alpha_j} \cap L = 0$, és így fennáll $K_0 \cap L = 0$ is. Ezért alkalmazható a Kuratowski—Zorn lemma: létezik olyan K balideál, amelyet minimális balideálok generálnak és amely maximális a $K \cap L = 0$ tulajdonságra nézve.

$L + K$ tartalmazza R talpát, ellenkező esetben ugyanis volna olyan N minimális balideál, amelyre $N \cap (L + K) = 0$ teljesülne. Ekkor fennállna $(N + K) \cap L \neq 0$, amiből egy $l = n + k \neq 0$ ($l \in L, n \in N, k \in K$) egyenlet következne, azaz $n = l - k \neq 0$. Ez azt jelentené, hogy $N \subseteq L + K$, ami ellentmondás. Ezért érvényes

$$R = \bar{B} \subseteq \overline{L + K} = L + K.$$

R tehát algebrai értelemben L és K direkt összege. Mivel L R -ben nyílt is, azért nyilvánvalóan $R = L \oplus K$ is érvényes. $\square$

8, 7. korollárium. *Ha az R topológikusan egyszerű lokálisan lineárisan kompakt gyűrűben a topológia a legdurvább, akkor R lineárisan kompakt.*

A 8, 6. tétel szerint $R = L \oplus K$, ahol $L \neq 0$ lineárisan kompakt balideál, K pedig olyan diszkrét balideál amelyet minimális balideálok generálnak. Mivel R -ben és így K -ban is a topológia a legdurvább, azért K -t véges sok minimális balideál generálja. Ezért K is és vele együtt R is lineárisan kompakt.

8, 8. korollárium. *Ha az R topológikusan egyszerű, lineárisan kompakt gyűrű jobbegységelemes, akkor R lineárisan kompakt.*

A 8, 6. tétel szerint $R = L \oplus K$ és a K balideált $K_1, \dots, K_n, \dots$ minimális balideálok generálják. R -nek e jobbegységelemének legyen $e = l + (k_1 + \dots + k_n)$ ($l \in L, k_i \in K_i$) egy felbontása. Mivel a jobbegységelem, azért szükségképpen $K = \{K_1, \dots, K_n\}$, és így K is és R is lineárisan kompakt.

Az 5, 2. tétel alapján a 8, 7. és 8, 8. korollárium így foglalható össze:

8, 9. tétel. *Ha az R topológikusan egyszerű lokálisan lineárisan kompakt gyűrűben a topológia a legdurvább, vagy R jobbegységelemes, akkor R egy ferdetest feletti vektortér teljes endomorfizmusgyűrűjével izomorf.*

III. Lineárisan kompakt radikálgűrűkről

9. §. Az ideálok minimumfeltételét kielégítő nilpotens gyűrűk

A III. részben lineárisan kompakt radikálgűrűkkel foglalkozunk. Ezeknek kielégítő jellemzését tudjuk adni abban az esetben, amikor a radikálgűrű L -kompakt, és bizonyos megállapításokat teszünk az általános esetre vonatkozóan is. Az L -kompakt radikálgűrűk leírásához szükségünk van az ideálok minimumfeltételének eleget tevő nilpotens gyűrűknek egy újabb jellemzésére, továbbá a t -nilpotens K -kompakt gyűrűk meghatározására. Ezért először az ideálok minimumfeltételének eleget tevő nilpotens gyűrűket vizsgáljuk. Ehhez szükségünk lesz SZELE egy tételének ([29] Theorem 1) általánosítására. Ennek a megfogalmazásában használni fogjuk a következő jelölésmódot. Legyen M egy (R, S) -modulus. $R^k M$ -en ($k = 1, 2, \dots$) értjük az összes $r_1 \dots r_k m$ ($r_1, \dots, r_k \in R; m \in M$) alakú elem véges összegeit. Világos, hogy $R^k M$ M -nek (R, S) -részmodulusa. Hasonlóan definiáljuk az MS^l ($l = 1, 2, \dots$) és $R^k MS^l$ részmodulusokat is.

9,1. állítás. *Legyen M olyan (R, S) -modulus, amelyben teljesül az (R, S) -részmodulusok minimumfeltétele. Ha léteznek olyan k és l természetes egész számok, amelyekre $R^k M = MS^l = 0$, akkor M -ben teljesül a részcsoporthoz minimumfeltétele is.*

Bizonyítás. A $k = l = 1$ esetben $RM = MS = 0$ miatt M -nek minden részcsoporthoz (R, S) -részmodulus is, és az állítás triviális. Legyen ezután $l = 1$ és $k > 1$, és tételezzük fel az állítás helyességét $k - 1$ -re. Most az $R^{k-1}M$ részmodulusra teljesül $R(R^{k-1}M) = 0$ és $(R^{k-1}M)S = 0$, így $R^{k-1}M$ -ben érvényes a részcsoporthoz vonatkozó minimumfeltétel. Tekintsük ezután az $M' = M/R^{k-1}M$ faktormodulust.

M' -re teljesül $R^{k-1}M'=0$ és $M'S=0$, így az indukációs feltevés miatt M' -ben érvényes a részcsoportok minimumfeltétele. Mivel mind $R^{k-1}M$ -ben, mind $M/R^{k-1}M$ -ben teljesül a részcsoportok minimumfeltétele, azért a 2, 9. segédétel szerint M -ben is érvényes a részcsoportok minimumfeltétele.

Legyen végül k tetszőleges és $l > 1$. Tételizzük fel az állítás helyességét k -ra és az l -nél kisebb természetes számokra. Tekintsük az MS^{l-1} részmodulust és az $M^* = M/MS^{l-1}$ faktormodulust. $R^k(MS^{l-1}) \subseteq R^kM=0$ és $(MS^{l-1})S=0$ miatt az indukációs feltevésből következik, hogy MS^{l-1} -ben teljesül a részcsoportok minimumfeltétele. Minthogy $R^kM^*=0$ és $M^*S^{l-1}=0$, azért az indukációs feltevés miatt M^* -ban is érvényes a részcsoportok minimumfeltétele. Alkalmazva ismét a 2, 9. segédételt, azt kapjuk, hogy M -ben is teljesül a részcsoportok minimumfeltétele. $\square$

A 9, 1. állításnak két speciális esetére lesz szükségünk. Először tekintsük azt az esetet, amikor $R=M=S$. Ekkor előáll

(SZELE [29] Theorem 1): *ha R olyan nilpotens gyűrű, amelyekben teljesül az ideálok minimumfeltétele, akkor R -ben teljesül az additív részcsoportok minimumfeltétele is.*

Másodszor tekintsük azt az esetet, amikor $S=0$. Ekkor azt kapjuk, hogy *ha az M R -modulusban teljesül a részmodulusokra vonatkozó minimumfeltétel és van olyan k természetes szám, amelyre $R^kM=0$, akkor M -ben teljesül a részcsoportok minimumfeltétele is.*

KÜROSTÓL származik a következő

9, 2. állítás. *Ha egy G Abel-csoportban teljesül a részcsoportok minimumfeltétele, akkor G véges sok $p_i^{n_i}$ -edrendű $C(p_i^{n_i})$ ciklikus csoport direkt összege, ahol $1 \leq n_i \leq \infty$ és $C(p^\infty)$ a Prüfer-féle kváziciklikus csoportot jelöli.*

A bizonyításra nézve KÜROS [16]-ra vagy FUCHS [4] 65. oldalára utalunk.

Egy R gyűrűt p -gyűrűnek nevezünk, ha additív csoportja p -csoport, azaz minden elemének a rendje a p prímszámnak hatványa.

A 9, 1. és 9, 2. állításból közvetlenül folyik a

9, 3. tétel. *Ha R egy, az ideálok minimumfeltételének eleget tevő nilpotens gyűrű, akkor érvényes az*

$$R = R_{p_1} + \dots + R_{p_k}$$

gyűrű elméleti direkt felbontás, ahol az R_{p_i} ($i=1, \dots, k$) különböző p_i prímszámokhoz tartozó p_i -gyűrűk egyértelműen meghatározott nilpotens gyűrűk, amelyek eleget tesznek az ideálok minimumfeltételének.

A 9, 3. tétel értelmében elegendő az ideálok minimumfeltételének eleget tevő nilpotens p -gyűrűket vizsgálni és jellemezni. Ezekre érvényes a

9, 4. állítás. *Legyen R olyan nilpotens p -gyűrű, amely eleget tesz az ideálok minimumfeltételének. R -nek R^+ additív csoportja egy A^+ osztható Abel-csoportnak és egy B^+ véges Abel-csoportnak a direkt összege, továbbá $B^+ = C(p^{n_1}) + \dots + C(p^{n_k})$, A^+ a $C(p^\infty)$ kváziciklikus csoportnak véges sok példányban vett direkt összege és A^+ elemei R -nek annihilátorai, így ezek R -nek egy A ideálját alkotják.*

A 9, 1. és 9, 2 állítás következtében csupán azt kell kimutatnunk, hogy A^+ elemei R -nek annihilátorai. Legyen evégből $r \in R$ és $a \in A$ két tetszőleges elem, és

jelölje l r -nek a rendjét, b pedig egy megoldását az $lx=a$ egyenletnek. Most előáll

$$ar=(lb)r=b(lr)=0.$$

Hasonlóan nyerjük azt, hogy a jobb oldali annihilátor is. $\square$

SZELE [29] dolgozatában az ideálok minimumfeltételének eleget tevő nilpotens p -gyűrűket véges nilpotens p -gyűrűkkel jellemezte; ezt röviden vázoljuk. Tekintsük a 9.4. tételben szereplő B^+ csoport direkt felbontásában szereplő n_i kitevők maximumát és jelöljük ezt n -nel. Könnyű látni, hogy R -nek minden olyan r eleme, amelyre teljesül $p^n r=0$ egy R^* véges nilpotens gyűrűt alkot. R^* additív csoportja nyilván B^+ -nak és annyi darab $C(p^n)$ ciklikus csoportnak a direkt összege, amennyi A^+ direkt felbontásában a komponensek száma. R^* -ot R egyértelműen meghatározza.

Fordítva, tekintsünk egy véges nilpotens R^* p -gyűrűt és legyen ennek additív csoportja $\sum_{i=1}^k C_i(p^n) + \sum_{i=1}^l C_i(p^{n_i})$ ($n_i \leq n$), továbbá legyenek a $C_i(p^n)$ ciklikus csoportok elemei R^* -nak annihilátorai. Ekkor R^* -ból az R végtelen nilpotens p -gyűrűt úgy nyerjük, hogy az egyes $C_i(p^n)$ komponenseket beágyazzuk a $C_i(p^\infty)$ Prüfer-csoportba és R additív csoportja $R^+ = \sum_{i=1}^k C_i(p^\infty) + \sum_{i=1}^l C_i(p^{n_i})$

lesz. Két $r, s, \in R$ elem sorozatát pedig úgy definiáljuk, hogy ha $r=a+b$ és $s=c+d$ ($a, c \in \sum_{i=1}^k C_i(p^\infty)$;

$b, d \in \sum_{i=1}^l C_i(p^{n_i})$), akkor $rs=(a+b)(c+d)=bd$ legyen. R -et tehát meghatározza R^* és az R^+ additív csoportjából kiválasztott k darab olyan független elem, amelyek rendje éppen p^n .

SZELE Tibornak ez a jellemzése igen konstruktív. Az R -hez hozzárendelt R^* véges nilpotens gyűrű azonban R -nek nem homomorf invariánsa, azaz ha R -nek $\tilde{R}$ homomorf képe, akkor R^* -nek a képe ennél a homomorfizmusnál különbözhet az $\tilde{R}$ -hoz hozzárendelt $\tilde{R}^*$ véges nilpotens gyűrűtől.

Nekünk a továbbiakban az ideálok minimumfeltételét kielégítő nilpotens p -gyűrűknek homomorf invariánsokkal való jellemzésére lesz szükségünk.

9.5. tétel. Legyen R olyan nilpotens p -gyűrű, amely eleget tesz az ideálok minimumfeltételének. R -hez tartozik egy izomorfától eltekintve egyértelműen meghatározott véges nilpotens B p -gyűrű, amit R képének nevezünk, és egy N természetes szám. Ez a B kép izomorf az R/A faktorgyűrűvel, ahol A R -nek maximális osztható ideálja, és A elemei R -nek annihilátorai. A additív csoportja $C(p^\infty)$ Prüfer-csoportok direkt összege, és a komponensek száma éppen N .

Mindazoknak a nilpotens p -gyűrűknek az osztálya, amelyek eleget tesznek az ideálok minimumfeltételének és amelyekhez egy adott B kép és N természetes szám tartozik, csak véges sok nem izomorf gyűrűt tartalmaz.

Bizonyítás. A 9.4. állítás alapján a tétel első fele nyilvánvaló.

Legyen R egy olyan, az ideálok minimumfeltételének eleget tevő nilpotens p -gyűrű, amelyhez a B véges nilpotens p -gyűrű és az N természetes szám tartozik.

Nyilvánvaló, hogy R az $A = \sum_{i=1}^N C_i(p^\infty)$ zérógyűrűnek B -vel való Schreier-bővítése.

Ezért R elemeit (a, α) ($a \in B, \alpha \in A$) elempároknak tekinthetjük. Minthogy $A^+ R^+$ -nak direkt összeadandója, és A elemei R -nek annihilátorai, azért RÉDEI [21] 54. § alapján R -ben a következő műveleti szabályoknak kell fennállniuk:

$$(a, \alpha) + (b, \beta) = (a+b, \alpha+\beta),$$

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \langle a, b \rangle) \quad (a, b \in B; \alpha, \beta \in A),$$

ahol az $\langle a, b \rangle$ faktorrendszer kielégíti a

$$\langle 0, b \rangle = \langle a, 0 \rangle = 0,$$

$$\langle ab, c \rangle = \langle a, bc \rangle,$$

$$\langle a + b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle,$$

$$\langle a, b + c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle \quad (a, b, c \in B)$$

feltételeket.

Kimutatjuk, hogy A -nak B -vel való minden ilyen Schreier-bővítése egy ideálok minimumfeltételét kielégítő nilpotens p -gyűrűt szolgáltat. Az, hogy minden ilyen bővítésben teljesül az ideálok minimumfeltétele a 2, 8. segédétel szerint nyilvánvaló; az is triviális, hogy a bővítés is p -gyűrű lesz. Jelölje n B nilpotencia-fokát, és tekintsünk egy $n + 1$ tényezős $(a_1, \alpha_1) \dots (a_{n+1}, \alpha_{n+1})$ szorzatot $(a_1, \dots, a_{n+1} \in B; \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in A)$. Ekkor érvényes

$$((a_1, \alpha_1) \dots (a_n, \alpha_n))(a_{n+1}, \alpha_{n+1}) = (0, \beta)(a_{n+1}, \alpha_{n+1}) = (0, \langle 0, a_{n+1} \rangle) = 0.$$

Így tehát a bővítés nilpotens.

Megjegyezzük, hogy a bővítés nilpotens volta a Schreier-féle bővítések elmélete nélkül közvetlenül is belátható, de a Schreier-féle bővítéssel felső korlát is adódik a bővítés nilpotencia fokára nézve.

Tekintsük most a B képpel és N természetes számmal jellemzett gyűrűknek a $[B, N]$ osztályát. A $[B, N]$ osztályhoz tartozó nem izomorf gyűrűk száma a fentiek szerint legfeljebb annyi, mint ahányféleképpen az $\langle a, b \rangle$ faktorrendszer definiálható. Minthogy pedig $(a, 0)(b, 0) = (ab, \langle a, b \rangle)$, azért $\langle a, b \rangle \in A$ additív rendje nem haladhatja meg B számosságát, és így az összes lehetséges faktorrendszer mellett az $\langle a, b \rangle$ elemek A -nak egy véges A' részcsoportjába esnek. Az összes lehetséges faktorrendszer száma viszont legfeljebb annyi, mint a véges $B \times B$ halmaznak a véges A' halmazba történő leképezéseinek a száma, ami viszont véges. Következésképpen a $[B, N]$ osztály csak véges sok nem izomorf gyűrűt tartalmaz. $\square$

Az ideálok minimumfeltételét kielégítő nilpotens p -gyűrűk képe a gyűrűknek homomorf invariánsa, pontosabban érvényes a

9, 6. tétel. Legyen R_1 és R_2 két olyan nilpotens p -gyűrű, amely eleget tesz az ideálok minimumfeltételének, és jelölje B_i R_i -nek a képét ($i = 1, 2$). Ha φ R_1 -nek R_2 -re történő homomorfizmusa, akkor létezik B_1 -nek B_2 -re történő olyan ψ homomorfizmusa, amelyre az

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \xrightarrow{\varphi} & R_2 \rightarrow 0 \\ \alpha_1 \downarrow & & \downarrow \alpha_2 \\ B_1 & \xrightarrow{\psi} & B_2 \rightarrow 0 \end{array}$$

diagramm kommutatív.

Bizonyítás. Jelölje A_i R_i -nek ($i=1, 2$) maximális osztható ideálját. Ekkor $\text{Ker } \alpha_i = A_i$ ($i=1, 2$), és világos, hogy $\varphi(A_1) = A_2$. Felhasználva az izomorfiateleket azt nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} B_1 &\xrightarrow{\varphi} R_1/A_1 / \text{Ker } \varphi + A_1 / A_1 \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow R_1/A_1 / (\text{Ker } \varphi + A_1) / A_1 \xrightarrow{\varphi} R_1/(\text{Ker } \varphi + A_1) \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow R_1/(\text{Ker } \varphi + A_1) \xrightarrow{\varphi} \varphi(R_1)/\varphi(\text{Ker } \varphi + A_1) = R_2/A_2 \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow R_2/A_2 \xrightarrow{\varphi} B_2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

exakt sorozatok. Ezért $\psi = \varepsilon\delta\gamma\beta$ B_1 -et a kívánt módon fogja B_2 -re homomorf módon leképezni. $\square$

Ebben a §-ban jellemeztük az ideálok minimumfeltételét kielégítő nilpotens gyűrűket.

Szász Ferenc hívta fel a figyelmet arra, hogy ez a gyűrűosztály különbözik az ideálok minimumfeltételét kielégítő radikálgűrűk osztályától. Igaz ugyan, hogy minden nilpotens gyűrű radikálgűrű, mert bármely r elemének, ha $r^n = 0$, $r' = \sum_{i=1}^{n-1} (-r)^i$ kváziinverze. Viszont E. SĄSIADA [22] bebizonyította olyan nem-nilpotens radikálgűrűk létezését, amelyeknek csak triviális ideáljai vannak; egy ilyen gyűrű pedig eleget tesz az ideálok minimumfeltételének, de nem nilpotens. Artin-gyűrűk esetében viszont a radikálgűrűk nilpotensek is (vö. [30], § 148.).

10. §. t -nilpotens K -kompakt gyűrűk

A 4, 18. definíció alapján egy R topológikus gyűrűt K -kompaktnak nevezünk, ha

- (1) van ideálokból álló bázisfiltere,
- (2) minden zárt ideálok szerinti mellékosztályokból álló $\mathbf{F}$ filterre $\downarrow \mathbf{F} \neq \emptyset$,
- (3) minden nyílt ideálhoz van minimális őt tartalmazó ideál.

A 4, 19. állítás szerint megadható a K -kompakt gyűrűkre a következő ekvivalens definíció:

Az R gyűrűt K -kompaktnak nevezzük, ha R olyan $[R_\alpha, \pi_\beta^\alpha]$ inverz-rendszer limesze, amelyben az R_α gyűrűk diszkrét és eleget tesznek az ideálok minimumfeltételének.

A további vizsgálatokban a K -kompakt gyűrűknek ez a definíciója fog a legcélszerűbbnek bizonyulni.

Tekintsünk ezután egy R K -kompakt gyűrűt, amelyről tehát feltehető, hogy $R = \lim_{\omega} [R_\alpha, \pi_\beta^\alpha]$, ahol az R_α -k diszkrét, az ideálok minimumfeltételét kielégítő gyűrűk. Ha R t -nilpotens, akkor nyilván mindegyik R_α nilpotens; jelöljük n_α -val R_α nilpotencia-fokát. Most érvényes $R^{n_\alpha} \subseteq U_\alpha$, ahol U_α azt a nyílt ideált jelöli, amelyre $R_\alpha = R/U_\alpha$. Ezek szerint fennáll

$$R = \bigcap_{\omega} \bigcap_{i=1}^{\infty} R \subseteq \bigcap_{\alpha} \overline{R^{n_\alpha}} \subseteq \bigcap_{\alpha} U_\alpha = 0,$$

ahol ω az első végtelen rendszámot jelenti. Következőleg teljesül $R = R = 0$. Kimutatjuk, hogy érvényes $R_\omega = R$ is. Az nyilvánvaló, hogy $R_\omega^* \subseteq R_\omega$. Minthogy az A, B ideálokra a 3,3. állítás szerint fennáll $\overline{A \cdot B} = \overline{A \cdot B}$, azért $R_{n^2} = \overline{R^{n^2}} = R$. Ebből viszont $R_\omega \subseteq R$ következik, tehát valóban $R_\omega = R$.

Mivel valamennyi R_α gyűrű nilpotens, azért ezek radikálgűrűk. Így a 3,6. állítás alapján R is radikálgűrű. Ezzel bebizonyítottuk a

10,1. tételt. *Ha R t -nilpotens K -kompakt gyűrű, akkor R r -nilpotens is és érvényes $R_\omega = R = 0$. Minden t -nilpotens K -kompakt gyűrű radikálgűrű.*

Most sem igaz az, hogy egy K -kompakt radikálgűrű szükségképpen t -nilpotens. SĄSIADA [22] eredménye nyilván most is ellenpéldát szolgáltat.

A következő tétel azt mutatja, hogy elegendő a t -nilpotens K -kompakt gyűrűk jellemzésénél csak azokra szorítkozni, amelyek p -gyűrűk inverz-limeszei. Az egyszerűbb beszédmód kedvéért egy R gyűrűt K_p -gyűrűnek nevezzük, ha R K -kompakt, és p -gyűrűk inverz-limesze.

10,2. tétel. *Ha R egy t -nilpotens K -kompakt gyűrű, akkor R t -nilpotens K_p -gyűrűk direkt összege algebrai és topológiai értelemben.*

Bizonyítás. Legyen $R = \varprojlim [R_\alpha, \pi_\beta^\alpha]$. A 9,3. tétel szerint minden R_α egyértelműen felbontható $R_{\alpha p}$ p -gyűrűk direkt összegére, $R_\alpha = \sum_p R_{\alpha p}$. Így az $\Omega = [R_\alpha, \pi_\beta^\alpha]$ inverz-rendszer felbomlik az $\Omega_p = [R_{\alpha p}, \varrho_{\beta p}^\alpha]$ inverz-rendszerek direkt összegére, ahol $\varrho_{\beta p}^\alpha$ a π_β^α leképezést jelenti $R_{\alpha p}$ -re korlátozva. A 3,5. állítás felhasználásával nyerjük, hogy

$$R = \varprojlim \Omega = \varprojlim \sum_p \Omega_p \cong \sum_p \varprojlim \Omega_p,$$

ami bizonyítandó volt. $\square$

A t -nilpotens K_p -gyűrűk a következő tétellel írhatók le.

10,3. tétel. *Legyen R egy t -nilpotens K_p -gyűrű. R -hez tartozik egy a számosság, amely véges, vagy nem nagyobb, mint R súlya, továbbá egy B gyűrű, amely véges nilpotens p -gyűrűk inverz-limesze, és amelyet R képének nevezünk. Jelölje A R -nek maximális osztható ideálját. A zárt ideál, amelynek elemei R -nek annihilátorai, és érvényes az $A^+ = \sum_\gamma C_\gamma(p^\infty)$ direkt felbontás, ahol a komponensek számossága éppen α .*

A B gyűrű algebrai és topológiai értelemben izomorf az R/A faktorgyűrűvel. Az R gyűrű A -nak B -vel való olyan Schreier-bővítése, amelyben az

$$(4) (a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta),$$

$$(5) (a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \langle a, b \rangle) \quad (a, b \in B; \alpha, \beta \in A)$$

műveleti szabályok érvényesek és az $\langle a, b \rangle$ multiplikatív faktorrendszer kielégíti a következő feltételeket:

$$(6) \langle ab, c \rangle = \langle a, bc \rangle,$$

$$(7) \langle a + b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle,$$

$$(8) \langle a, b + c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle \quad (a, b, c \in B).$$

(9) Minden A -beli U környezethez van olyan V B -beli környezet, hogy teljesül $\langle v, a \rangle, \langle a, v \rangle \in U$ minden $v \in V$ és $a \in B$ elempárra.

Fordítva, tekintsünk egy α számosságot, egy B -gyűrűt, amely véges nilpotens p -gyűrűk inverz-limesze. Képezzük az $A = \sum_{\gamma} C_{\gamma}(p^{\infty})$ zérógyűrűt, ahol a komponensek számossága α , és tekintsük A -nak B -vel való Schreier-bővítései közül azt, amelyben a műveleti szabályokat (4) és (5) határozza meg, a faktorrendszer pedig kielégíti a (6)–(9) feltételeket, jelöljük ezt R -rel. R t -nilpotens K_p -gyűrű. Jelölje $[B, \alpha]$ a B és α invariánsokkal jellemzett t -nilpotens K_p -gyűrűknek az osztályát és b a B számosságát. $[B, \alpha]$ legfeljebb 2^{α} nemizomorf gyűrűt tartalmaz, ahol $c = \max(\alpha, b)$.

Bizonyítás. Legyen R egy t -nilpotens K_p gyűrű. Most fennáll $R = \varprojlim [R_{\alpha}, \pi_{\beta}^{\alpha}]$, ahol minden R_{α} olyan nilpotens p -gyűrű, amely kielégíti az ideálok minimumfeltételét. A 9, 5. tétel szerint minden R_{α} -hoz tartozik egy B_{α} kép és egy N_{α} természetes szám. A 9, 6. tétel következtében a B_{α} képek egy $[B_{\alpha}, \varrho_{\beta}^{\alpha}]$ inverz-rendszert alkotnak, jelöljük ennek inverz-limesét B -vel. R , illetve B elemei

$$[r_{\alpha}] \quad (\pi_{\beta}^{\alpha} r_{\alpha} = r_{\beta}, r_{\alpha} \in R_{\alpha}),$$

$$[b_{\alpha}] \quad (\varrho_{\beta}^{\alpha} b_{\alpha} = b_{\beta}, b_{\alpha} \in B_{\alpha})$$

alakú vektorok. Jelentse σ_{α} R_{α} -nak B_{α} -ra történő homomorfizmusát és tekintsük a

$$\sigma: [r_{\alpha}] \rightarrow [\sigma_{\alpha} r_{\alpha}]$$

leképezést. Nyilvánvaló, hogy σ R -nek B -re való homomorfizmusa. Tekintsük B -ben a 0 elemnek egy U környezetét. Feltehető, hogy U mindazoknak az elemeknek a halmaza, amelyekben az α_i -ik komponensek 0-k, rögzített véges sok $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ index mellett. Jelölje most V a

$$V = \{[r_{\alpha}] \in R \mid r_{\alpha_1} = \dots = r_{\alpha_k} = 0\}$$

halmazt. Világos, hogy V R -nek olyan nyílt környezete, amelyre teljesül $\sigma V = U$. Következésképpen a σ leképezés nyílt is és folytonos is, így érvényes a homomorfia-tétel algebrai és topológiai értelemben, tehát

$$(10) \quad R/\text{Ker } \sigma \cong B.$$

Jelöljük $\text{Ker } \sigma$ -t A -val, $\text{Ker } \sigma_{\alpha}$ -t A_{α} -val, és π_{β}^{α} -nak A_{α} -ra való korlátozását ω_{β}^{α} -val. Bebizonyítjuk, hogy érvényes $A = \varprojlim [A_{\alpha}, \omega_{\beta}^{\alpha}]$. Mindenekelőtt világos, hogy $[A_{\alpha}, \omega_{\beta}^{\alpha}]$ egy inverz-rendszert képez. Mivel $\sigma(\varprojlim [A_{\alpha}, \omega_{\beta}^{\alpha}]) = 0$, azért $\varprojlim [A_{\alpha}, \omega_{\beta}^{\alpha}] \subseteq A$. Másrészt ha $\sigma([r_{\alpha}]) = 0$, akkor minden r_{α} -nak A_{α} -ban kell feküdnie, ami azt jelenti, hogy $[r_{\alpha}] \in \varprojlim [A_{\alpha}, \omega_{\beta}^{\alpha}]$.

Mint hogy minden A_α R_α -nak maximális osztható ideálja, azért A R -nek maximális osztható ideálja. Az A_α -k $C(p^\infty)$ kváziciklikus csoportok véges direkt összegei, így A is $C(p^\infty)$ kváziciklikus csoportok direkt összege. Mivel A súlya megegyezik direkt komponenseinek a számosságával, ezért ez nem haladhatja meg R súlyát.

Kimutatjuk, hogy A elemei R -nek annihilátorai. Legyen evégből $a = [a_\alpha]$ és $r = [r_\alpha]$ két tetszőleges elem A -ból illetve R -ből. Mivel minden A_α R_α -nak annihilátoraiából áll, azért fennáll $[a_\alpha][r_\alpha] = [r_\alpha][a_\alpha] = 0$, következésképp az A ideál benne van R annihilátorideáljában.

A (10) izomorfia azt mutatja, hogy az R gyűrű A -nak B -vel való Schreier-bővítése, így feltehető, hogy R elemei az (a, α) ($a \in B, \alpha \in A$) alakú párok. A^+ osztható csoport lévén, R^+ -nak direkt összeadandója. Figyelembe véve ezt, és azt a körülményt, hogy A elemei R annihilátorai, azt kapjuk, hogy R -ben érvényes az összeadásra és a szorzásra vonatkozó (4) és (5) műveleti szabály, továbbá az $\langle a, b \rangle$ faktorrendszer kielégíti a (6), (7) és (8) feltételeket.

Most megmutatjuk, hogy $\langle a, b \rangle$ -re teljesül a (9) feltétel is. Legyen e végből U egy tetszőleges A -beli 0-környezet. Feltehető, hogy $U = A \cap W$, ahol W R -nek alkalmas nyílt ideálja. Jelöljük σW -t V -vel, V B -nek 0-környezete. Most tehát bármely W -beli elem (v, u) ($v \in V, u \in U$) alakú. Mint hogy W ideál R -ben, azért az összes $(a, \alpha)(v, u)$ és $(v, u)(a, \alpha)$ szorzat W -ben fekszik, következésképp $\langle a, v \rangle, \langle v, a \rangle \in U$, vagyis $\langle a, b \rangle$ -re teljesül a (9) feltétel is.

Tekintsünk ezután egy a tetszőleges számosságot és egy olyan B gyűrűt, amely véges nilpotens p -gyűrűk inverz-limesze. Képezzük a $C(p^\infty)$ csoportnak a példányban vett komplett direkt összegét, az erre épített zérógyűrűt jelöljük A -val, és vezessük be A -ban a Tyihonov-topológiát. Az (a, α) ($a \in B, \alpha \in A$) elempárok által alkotott $R = B \times A$ szorzattérben értelmezzük a műveleteket a (4) és (5) képletekkel, úgy, hogy az $\langle a, b \rangle$ faktorrendszer teljesítse a (6)–(9) feltételeket. (9) következtében fennáll

$$\langle 0, a \rangle, \langle a, 0 \rangle \in \bigcap_{\gamma} U_{\gamma},$$

ezért RÉDEI [21] 54. § szerint R az A gyűrűnek B -vel való Schreier-bővítése.

Tekintsük A -nak egy $U = \{U_{\gamma}\}$ ideálokból álló bázisfilterét. Ekkor a (9) feltétel miatt minden $U_{\gamma} \in U$ ideálhoz van B -nek olyan $V_{\gamma} = \{V_{\gamma\delta}\}$ ideálokból álló bázisfiltere, amelyre érvényes $\langle v, a \rangle, \langle a, v \rangle \in U_{\gamma}$ minden $V_{\gamma\delta} \in V_{\gamma}$ ideálnak bármely v elemére. Jelölje V az összes V_{γ} által generált filtert, nyilvánvaló, hogy B -nek V is bázisfiltere. Alkossuk meg

$$W = \{(V_{\gamma\delta}, U_{\gamma})\} = \{W_{\alpha}\} \quad ((V, U) = \{(v, u) \mid v \in V, u \in U\})$$

rendszert, a γ, δ indexpárok minden lehetséges értékeire. Világos, hogy W egy filtert alkot, amelyet tekinthetünk R bázisfilterének. W elemei R -nek ideáljai. Mivel A és B is teljes topológikus gyűrűk, azért az $R = B \times A$ szorzattér is teljes. Így a 4. 13. állítás szerint R izomorf az $[R_\alpha, \pi_\beta^*]$ inverz-rendszer limeszével, ahol R_α az R/W_α ($W_\alpha \in W$) faktorgyűrűt jelöli.

Most bebizonyítjuk, hogy R t -nilpotens K_p -gyűrű. Ehhez azt kell kimutatni, hogy minden R_α p -gyűrű és eleget tesz az ideálok minimumfeltételének. Az, hogy minden R_α p -gyűrű, (4) és a 3. 5. állítás miatt nyilvánvaló. Legyen $A_\alpha = \{A, W_\alpha\}/W_\alpha$. Az

$$\{A, W_\alpha\}/W_\alpha \cong A/A \cap W_\alpha = \sum_{i=1}^{k_\alpha} C_i(p^\infty)$$

izomorfia miatt nyilvánvaló, hogy minden A_α -ban teljesül az ideálok minimumfeltétele. Tegyük fel, hogy B a B_α véges nilpotens p -gyűrűk inverz-limesze. $B \cong R/A$ és a 4, 13. állítás miatt B_α -nak $R/A/\{A, W_\alpha\}/A$ ($W_\alpha \in W$) vehető.

Minthogy fennáll

$$R_\alpha/A_\alpha = R_\alpha/W_\alpha / \{A, W_\alpha\} \cong R/\{A, W_\alpha\} \cong R/A / \{A, W_\alpha\}/A = B_\alpha$$

azért R_α/A_α -ban is teljesül az ideálok minimumfeltétele. Így tehát mind A_α -ban, mind R_α/A_α -ban érvényes az ideálok minimumfeltétele, ezért a 2, 8. segédétel szerint R_α -ban is érvényes. Ezzel kimutattuk, hogy R K_p -gyűrű.

Ezekután azt mutatjuk ki, hogy R t -nilpotens. Legyen evégből $W_\alpha = (V_\alpha, U_\alpha) \in W$. Minthogy $B_\alpha = B/V_\alpha$ nilpotens, azért minden α -hoz létezik olyan n_α természetes szám, amelyre $B_\alpha^{n_\alpha} \subseteq V_\alpha$ érvényes. Ezért (9) felhasználásával előáll

$$R_\alpha^{n_\alpha+1} = (B, A)^{n_\alpha} R \subseteq (V_\alpha, A) R \subseteq (V_\alpha, U_\alpha) = W_\alpha,$$

ahol (X, Y) az összes (x, y) ($x \in X, y \in Y$) alakú elempárok halmazát jelenti. Következésképpen érvényes

$$R = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{R^n} \subseteq \bigcap_{\alpha} \overline{R^{n_\alpha+1}} \subseteq \bigcap_{\alpha} W_\alpha = 0,$$

amivel kimutattuk, hogy R t -nilpotens. Ha a és b (B számossága) véges, akkor a 9, 5. tétel szerint a B és a invariánsokkal jellemzett K_p -gyűrűk $[B, a]$ osztálya csak véges sok nem izomorf gyűrűt tartalmaz, és ez a szám, az ott tett meggondolások szerint nem haladhatja meg 2^c -t, ahol $c = \max(a, b)$. Legyen ezután $c = \max(a, b)$ végtelen, akkor ez nyilván éppen R súlya, és így az összes R_α számossága éppen c . A 9, 5. tétel szerint R_α egy $[B_\alpha, N_\alpha]$ gyűrűosztályhoz tartozik, és ez az osztály legfeljebb véges sok nemizomorf gyűrűt tartalmaz. Ezért a $[B, a]$ gyűrűosztály legfeljebb 2^c nemizomorf gyűrűt tartalmazhat. $\square$

E § végén megemlítjük, hogy egyes diszkrét t -nilpotens gyűrűk beágyazhatók t -nilpotens K -kompakt gyűrűkbe sűrű részgyűrűként.

Legyen R egy olyan diszkrét gyűrű, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

$$(10) \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} R^n = 0,$$

(11) Az R/R^n ($n=1, 2, \dots$) faktorgyűrűkben teljesül az ideálok minimumfeltétele.

10, 4. tétel. Minden olyan R gyűrű, amely eleget tesz a (10) és (11) feltételeknek, sűrű részgyűrűként beágyazható egy t -nilpotens K -kompakt gyűrűbe.

Bizonyítás. Defináljunk R -ben egy topológiát az $\{R^n\}$ bázisfilterrel. Világos, hogy R topológikus gyűrű lesz. A 4, 14. állítás szerint R -nek $\tilde{R}$ teljes burka algebrailag és topológiailag izomorf az R/R^n faktorgyűrűk inverz-limeszével. $\square$

11. § t -nilpotens L -kompakt gyűrűk

Megismételjük, hogy egy R topológikus gyűrűt L -kompaktnak nevezünk, ha

- (1) van balideálokból álló bázisfiltere,
- (2) minden zárt balideálok szerinti mellékosztályokból álló F filterre $\downarrow F \neq 0$,
- (3) minden nyílt balideálhoz van minimális őt tartalmazó balideál.

Ezzel ekvivalens definíció:

Az R gyűrű L -kompakt, ha R előáll olyan $[M_\alpha, \pi_\beta]$ inverz-rendszer limeszeként, amelyben az M_α -k diszkrét R -modulusok és eleget tesznek a részmodulusok minimum-feltételének.

Ebben a §-ban jellemezzük a t -nilpotens L -kompakt gyűrűket oly módon, hogy minden ilyen R gyűrűhöz hozzárendelünk egy C zárt ideált és a $B = R/C$ gyűrűt, ahol $C^3 = 0$ és B már K -kompakt gyűrű (sőt látni fogjuk, hogy ezeknél több is igaz). Bebizonyítjuk továbbá, hogy az L -kompakt gyűrűk osztályában a t -nilpotens gyűrűk éppen a radikálgűrűk. Azt is látni fogjuk, hogy egy t -nilpotens lineárisan kompakt gyűrű legdurvább lineárisan kompakt topológiájában mindig L -kompakt és így radikálgűrű is.

11, 1. tétel. Legyen R egy t -nilpotens L -kompakt gyűrű. Jelölje A R -nek maximális osztható ideálját és C a

$$C = \{x \in R \mid xR \subseteq A\}$$

halmazt, amit R magjának fogunk nevezni. C R -nek zárt ideálja, és így L -kompakt gyűrű, továbbá érvényes $CR^2 = 0$. A C/A faktorgyűrű véges zérógyűrűk inverz-limesze, ezért maga is zérógyűrű. A $B = R/C$ faktorgyűrű, amit R képének nevezünk, véges nilpotens gyűrűk inverz-limesze, így B egyúttal K -kompakt is.

Jelöljön R egy lineárisan topológikus gyűrűt és legyen C a magja és B a képe. Tegyük fel, hogy C olyan zárt ideál, amely az indukált topológiában L -kompakt és amelyre teljesül $CR^2 = 0$, továbbá legyen B véges nilpotens gyűrűk inverz-limesze. Ekkor R t -nilpotens L -kompakt gyűrű.

Bizonyítás. Tekintsük egy t -nilpotens L -kompakt R gyűrűt. Ha $U = \{U_\alpha\}$ jelenti R -nek egy bázisfilterét, akkor $M_\alpha = R/U_\alpha$ minimumfeltételnek eleget tevő diszkrét R -modulus minden $U_\alpha \in U$ balideál mellett. A minimumfeltétel következtében minden α indexhez van olyan n_α természetes szám, amelyre teljesül $R^{n_\alpha} M_\alpha = R^{n_\alpha} R^{n_\alpha} M_\alpha$. Mivel R t -nilpotens, azért előáll

$$R^{n_\alpha} M_\alpha = \underset{*}{R} M_\alpha = 0.$$

Ezért a 9, 1. állítás miatt M_α -ban teljesül a részcsoporthoz minimumfeltétele is, és így a 9, 2. állítás szerint M_α , mint csoport felbontható véges sok ciklikus, vagy kváziciklikus p -csoport direkt összegére, azaz

$$(4) \quad M_\alpha = \sum_{i=1}^{k_\alpha} C_i(p_{\alpha_i}^{n_{\alpha_i}}) \quad (1 \leq n_{\alpha_i} \leq \infty)$$

érvényes.

Most kimutatjuk, hogy A elemei R -nek balannihilátorai. Tekintsünk evégből egy tetszőleges $a \in A$ és $m_\alpha \in M_\alpha$ elemet. Jelöljük l_α -val m_α rendjét, l_α (4) következtében véges. Minthogy A osztható, azért létezik olyan $a_\alpha \in A$ elem, amelyre $l_\alpha a_\alpha = a$. Azt nyerjük, hogy

$$am_\alpha = (l_\alpha a_\alpha)m_\alpha = a_\alpha(lm_\alpha) = 0,$$

tehát valóban A benne van R balannihilátorideáljában.

Ezután bebizonyítjuk, hogy A zárt. Legyen $d \in \bar{A}$ egy tetszőleges elem. Ekkor minden $U_\alpha \in U$ balideál esetén $d + U_\alpha$ tartalmaz A -beli elemet, azaz $(d + U_\alpha) \cap A \neq \emptyset$.

A oszthatósága miatt tetszőleges n egészszámhoz létezik olyan $x_\alpha \in A$ elem, amelyre $nx_\alpha \in d + U_\alpha$. Jelöljük $Z(n, \alpha)$ -val a

$$Z(n, \alpha) = \{x \in \bar{A} \mid nx \in U_\alpha\}$$

halmazt. Minthogy $U_\alpha \cap \bar{A} \subseteq Z(n, \alpha)$ azért $Z(n, \alpha)$ $\bar{A}$ -ban nyílt, következésképpen zárt R -modulusa $\bar{A}$ -nak. Világos, hogy az $nx \in d + U_\alpha$ relációnak összes $x \in \bar{A}$ megoldása egy $x_\alpha + Z(n, \alpha)$ mellékosztályt alkot. Mivel pedig $U_\gamma \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$ -ből

$$nx_\gamma \in d + U_\gamma \subseteq (d + U_\alpha) \cap (d + U_\beta)$$

következik, azért $Z = \{x_\alpha + Z(n, \alpha)\}$ zárt részmodulusokból álló filtert alkot. De $\bar{A}$, mint R zárt R -modulusa, a 4, 5. állítás szerint lineárisan kompakt, ezért $Z \neq \emptyset$, és egy $x_0 \in Z$ elemre fennáll $nx_0 \in \bigcap_\alpha (d + U_\alpha) = d$, és $x_0 \in \bar{A}$. Ez azt jelenti,

hogy $\bar{A}$ -ban minden $nx = a$ ($a \in \bar{A}$) egyenlet megoldható, vagyis $\bar{A}$ additív csoportja osztható. Ezért A maximalitásából azt kapjuk, hogy $\bar{A} \subseteq A$, amivel kimutattuk, hogy A zárt.

$AR = 0$ miatt $CR^2 = 0$ nyilvánvalóan igaz. A zártságának pedig triviális következménye, hogy C zárt ideál R -ben. Ezért a 4, 20. állítás szerint C is L -kompakt és így olyan C_α diszkrét R -modulusok inverz-limesze, amelyek eleget tesznek a részmodulusok minimumfeltételének. Figyelembe véve, hogy $C^3 = 0$, a 9, 1. állítás szerint minden C_α -ban teljesül a részcsoportok minimumfeltétele és így a C gyűrű (C mint C -modulus) L -kompakt.

$C \cdot C \subseteq CR \subseteq A$ miatt C/A zérógyűrű. Minthogy a C/A faktorgyűrű, mint C -modulus szintén L -kompakt, azért a 9, 2. állítás alapján, figyelembe véve, hogy A C -nek is maximális osztható ideálja, C/A véges zérógyűrűk inverz-limesze.

Tekintsük most az $N_\alpha = R/\{U_\alpha, A\}$ faktormodulusokat minden $U_\alpha \in \mathcal{U}$ balideál mellett. A (4) felbontás értelmében valamennyi N_α véges. Világos, hogy a

$$C_\alpha = \{x \in R \mid xR \subseteq \{U_\alpha, A\}\} \quad (U_\alpha \in \mathcal{U})$$

halmazok zárt ideált alkotnak. Ha egy $x \in R$ elemre $xN_\alpha = 0$, akkor x -re teljesül $xR \subseteq \{U_\alpha, A\}$, vagyis $x \in C_\alpha$; következésképpen a $B_\alpha = R/C_\alpha$ faktorgyűrűt felfoghatjuk úgy, mint N_α -nak egy endomorfizmusgyűrűjét. Mivel pedig N_α véges, azért szükségképpen B_α is véges és diszkrét. Következésképpen C_α R -nek nyílt ideálja és R/C -ben $\{C_\alpha/C\} = C$ nyílt ideáloknak egy olyan filterét alkotja, amelyre $\bigcap C = 0$. A C által indukált topológia R/C topológiájánál durvább, de R/C -ben, mint L -kompakt R -modulusban a topológia a legdurvább, következésképpen C tekinthető R/C bázisfilterének. Ezért a 4, 13. állítás szerint fennáll

$$B = R/C \cong \varprojlim [R/C/C_\alpha/C, \pi_\beta^\alpha] \cong \varprojlim [B_\alpha, \varrho_\beta^\alpha],$$

ahol π_β^α és ϱ_β^α a természetes módon előálló leképezésrendszereket jelöli. Mivel R t -nilpotens és $B_\alpha = R/C_\alpha$ véges, azért minden B_α nilpotens. Ezzel bebizonyítottuk, hogy B véges nilpotens gyűrűk inverz-limesze.

Legyen végül R egy olyan lineárisan topológikus gyűrű, amelynek C magja és B képe teljesíti a tételben kimondott feltételeket. C a 4, 6. állítás szerint zárt R -ben, ezért alkalmazható a 4, 23. állítás a C és R/C L -kompakt faktormodulusokra és így R L -kompakt gyűrű.

Mivel B egyúttal K -kompakt gyűrű is, és t -nilpotens, azért a 10, 1. tétel szerint $B_\omega = 0$. $B = R/C$ miatt tehát $R_\omega \subseteq C$, és $CR^2 = 0$ következtében előáll

$$R_{\omega+2} = \overline{R_\omega \cdot R^2} \subseteq \overline{CR^2} = 0.$$

Ezzel kimutattuk, hogy R r - és egyúttal t -nilpotens gyűrű. $\square$

A következő tétel azt mutatja, hogy az L -kompakt radikálgyűrűket éppen a 11, 1. tételben írtuk le.

11. 2. tétel. *Egy R L -kompakt gyűrűre az alábbi feltételek ekvivalensek:*

- a) R radikálgyűrű;
- b) R r -nilpotens gyűrű;
- c) R t -nilpotens gyűrű.

Bizonyítás. a) $\Rightarrow$ b) Ez az állítás speciális esete LEPTIN [18] Satz 9-nek, amely szerint egy L -kompakt gyűrű radikálja r -nilpotens. Itt csak ebben a speciális esetben bizonyítjuk be ezt az állítást. Ha R radikálgyűrű, akkor a radikál definíciója szerint R minden M irreducibilis R -modulust annihilál, azaz $RM = 0$.

Tekintsük R -nek egy L nyílt balideálját, és az

$$L' = \{r \in R \mid R_* r \subseteq L\}$$

halmazt. Mivel R_* ideál, azért világos, hogy L' balideál, továbbá $L \subseteq L'$ miatt L' nyílt. Most két eset lehetséges:

- (i) minden L nyílt balideál esetén $L' = R$, vagy
- (ii) van olyan L nyílt balideál, amelyre L' valódi része R -nek.

Kimutatjuk, hogy az (ii) eset nem állhat fenn, feltételezése ellentmondáshoz vezet. Jelöljön ugyanis ebben az esetben K egy minimális L' -t tartalmazó balideált R -ben. Minthogy R a feltétel szerint L -kompakt, azért ilyen K mindig létezik. Most a K/L' R -modulus irreducibilis, ezért szükségképpen $RK \subseteq L'$. Ennek következtében fennáll

$$R_* RK \subseteq R_* L' \subseteq L.$$

Tekintsük a

$$D = \{r \in R \mid rK \subseteq L\}$$

halmazt. Világos, hogy $R_* R \subseteq D$. D -ről könnyű látni, hogy zárt ideált alkot, ezért teljesül $R_* = \overline{R_* R} \subseteq D$ is. Következésképpen fennáll $R_* K \subseteq L$, azaz $K \subseteq L'$, ami ellentmondás. Így tehát csak az (i) eset lehetséges. Ez azt jelenti, hogy $R_* R \subseteq L$ érvényes minden L nyílt balideálra, ezért $R_* R \subseteq \bigcap L = 0$, tehát $R_* = 0$, amivel kimutattuk, hogy R r -nilpotens.

b) $\Rightarrow$ c) Ez triviális.

c) $\Rightarrow$ a) Tegyük fel, hogy R t -nilpotens L -kompakt gyűrű, de nem radikálgyűrű.

Legyen J R radikálja. J az 5, 1. tétel szerint zárt R -ben. Az $R/J \neq 0$ faktorgyűrű lineárisan kompakt féligegyszerű gyűrű, ezért az 5, 3. tétel alapján egységelemes. Egységelemes gyűrű azonban nem lehet t -nilpotens, ennek megfelelően $R \subseteq J$ sem

állhat fenn, ami ellentmond annak a feltevésnek, hogy $R = 0$. $\square$

*

A 11, 2. tétel állítása lineárisan kompakt gyűrűkre már nem általánosítható. LEPTIN ([19] 2. §) konstruált többek között olyan lineárisan kompakt gyűrűket, amelyeknek a radikálja idempotens. Ennek tárgyalására, mivel igen hosszadalmas lenne, nem térünk ki.

A 4. §-ban definiált különböző típusú lineáris kompaktsági fogalmak szempontjából alapvető fontosságú lesz a következő példa. Látni fogjuk, hogy:

a) a különböző típusú lineárisan kompakt modulusok osztályai általában különböző gyűrűosztályok, sőt még a különböző típusú szűkebb értelemben vett lineárisan kompakt modulusok osztályai is különböző egymást nem tartalmazó osztályok. A SÁSIADA [22] által konstruált csak triviális ideállal rendelkező radikálgűrűk K -kompaktak, de mivel nem t -nilpotensek azért a 11, 2. tétel szerint nem lehetnek L -kompakt gyűrűk. Az alábbi példa olyan gyűrűt szolgáltat, amely L -kompakt, de nem K -kompakt. Továbbá:

b) Egymást nem tartalmazó osztályok a K -kompakt és L -kompakt radikálgűrűk osztályai is. A példában szereplő gyűrű ugyanis t -nilpotens L -kompakt gyűrű lesz, azaz L -kompakt radikálgűrű, amely nem K -kompakt.

c) A t -nilpotens L -kompakt gyűrűk osztálya valódi módon tartalmazza a t -nilpotens K -kompakt gyűrűk osztályát. Az ugyanis, hogy minden t -nilpotens K -kompakt gyűrű egyben L -kompakt is, ez a 10, 2. és a 10, 3. tételek alapján világos.

11, 3. példa. Jelölje P a p -adikus egészs számokat ellátva a p -adikus topológiával és legyen $P_i = p^i P$ ($i = 1, 2, \dots$). Tekintsük úgy, hogy P a $C(p^\infty)$ kváziciklikus csoportnak a teljes endomorfizmusgyűrűje. A $P_1^+ + C(p^\infty)$ csoportelméleti direkt összeg felett definiáljuk a szorzást a következőképpen:

$$(a + \alpha)(b + \beta) = ab + a\beta \quad (a, b \in P_1; \alpha, \beta \in C(p^\infty)).$$

Egyszerű számolással meggyőződhetünk róla, hogy ez a szorzás asszociatív, továbbá az összeadással szemben disztributív is. Jelöljük az így előállt gyűrűt R -rel. A szorzás definíciójából világos, hogy a P_i ($i = 1, 2, \dots$) halmazok R -nek balideáljai. Vezessünk be R -be egy lineáris topológiát úgy, hogy $\{P_i\}$ -t R bázisfilterének tekintjük. Ahhoz, hogy ezúton R topológikus gyűrű lett, elegendő kimutatni a jobb szorzás folytonosságát, azaz ha $ab + a\beta + P_i$ az $(a + \alpha)(b + \beta)$ szorzatnak egy környezete, akkor létezik olyan P_k balideál, amelyre $(a + \alpha + P_k)(b + \beta) \subseteq ab + a\beta + P_i$. Válasszuk k -t úgy, hogy fennálljon $p^k \geq \max(p^i, o(\beta))$, ekkor érvényes

$$(a + \alpha + P_k)(b + \beta) = ab + a\beta + P_k b + P_k \beta \subseteq ab + a\beta + P_i,$$

tehát R topológikus gyűrű. Mivel P_1 és $C(p^\infty) \cong R/P_1$ egyaránt L -kompakt, azért a 4, 23. állítás szerint R is L -kompakt.

Ezzel szemben R nem K -kompakt, bár mind P_1 , mind $C(p^\infty)$ K -kompakt gyűrűk. Ezt úgy láthatjuk be, hogy kimutatjuk a $C(p^\infty) \subseteq I$ tartalmazást R bármely I nyílt ideáljára. Ha ugyanis I nyílt ideál, akkor $P_1 \cap I$ P_1 -ben nyílt, következésképpen van olyan n természetes szám, amelyre $P_n \subseteq I$. I ideál voltából pedig $C(p^\infty) = P_n C(p^\infty) \subseteq I$ következik, ezért R -nek nem lehet ideálokból álló bázisfiltere.

Végül kimutatjuk, hogy R t -nilpotens. R balannihilátorideálja és magja éppen $C(p^\infty)$. Ezt felhasználva kapjuk:

$$R \subseteq R_{\omega+1} = \overline{R_\omega \cdot R} = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} (P_n + C(p^\infty)) \cdot R} = \overline{C(p^\infty) \cdot R} = 0,$$

amiért is R t -nilpotens és a 11, 2 tétel szerint radikálgűrű is.

Bebizonyítjuk, hogy a 11, 1. tétellel bizonyos t -nilpotens lineárisan kompakt gyűrűket is jellemeztünk, ugyanis érvényes a

11, 4. tétel. *Egy t -nilpotens lineárisan kompakt gyűrű a legdurvább lineárisan kompakt topológiában L -kompakt.*

Bizonyítás. A bizonyításban felhasználjuk azt az állítást, hogy egy R L -kompakt gyűrű feletti lineárisan kompakt M R -modulus is L -kompakt. Ennek a bizonyításához azt kell megmutatnunk, hogy bármely $U \subseteq M$ nyílt részmodulus esetén az M/U faktormodulusban van minimális részmodulus. Ha $R(M/U) = 0$, akkor tekintjük M/U -nak egy $m \neq 0$ elemét. Megmutatjuk, hogy m véges rendű. Ellenkező esetben a diszkrét lineárisan kompakt M/U modulusnak $\{m\}$ olyan végtelen ciklikus részcsoportha, amelynek lineárisan kompaktnak kell lennie. Tekintjük a $\frac{3^n - 1}{2} m + \{3^n m\}$ ($n = 1, 2, \dots$) mellékosztályokból álló F filtert. F elemei fogyó láncot alkotnak, és $\downarrow F = \emptyset$, ami ellentmondásban van azzal, hogy $\{m\}$ lineárisan kompakt. Következésképp m véges rendű elem. Ebből triviálisan következik, hogy $\{m\}$ -nek és így M/U -nak van minimális részmodulusa. Az $R(M/U) \neq 0$ esetben tekintjük M -nek egy olyan x elemét, amelyre $Rx \not\subseteq U$, és az

$$L = \{r \in R \mid rx \in U\}$$

halmazt. Nyilvánvaló, hogy L R -nek nyílt balideálja, továbbá érvényes az

$$R/L \cong \{Rx, U\} / U \subseteq M/U$$

izomorfia. Mivel pedig R L -kompakt, azért R/L -nek, következésképpen M/U -nak is van minimális részmodulusa.

Most bebizonyítjuk, hogy R/R a legdurvább lineárisan kompakt topológiában L -kompakt. Ehhez transzfinit indukcióval azt mutatjuk ki, hogy minden μ rendszámhoz R/R L -kompakt. $\mu = 0$ -ra $R = R$ miatt R/R triviálisan L -kompakt. Tegyük fel ezután, hogy a μ rendszámra R/R L -kompakt. Most érvényes

$$R/R \cong \frac{R/R}{\mu} \Big/ \frac{R/R}{\mu \mu + 1}$$

Kimutatjuk, hogy R/R is L -kompakt. Minthogy $R(R/R) = 0$, azért R/R -et tekinthetjük R/R -modulusnak. De R/R az indukciós feltevés miatt L -kompakt, azért az előzőek szerint R/R is L -kompakt. Alkalmazva a 4, 23. állítást azt nyerjük, hogy R/R is L -kompakt.

Ha pedig λ limesz-szám, akkor a 4, 13. állításhoz hasonlóan belátható, hogy R/R algebrailag izomorf az R/R ($\mu < \lambda$) faktorgyűrűk S inverz-limeszével. S , mint az R/R L -kompakt gyűrűk komplett direkt összegének zárt részgyűrűje a 4, 22.

állítás szerint szintén L -kompakt. Jelöljük φ -vel R/R -nek S -re való izomorfizmusát, és U -val R -nek egy balideálokból álló bázisfilterét. Mivel R/R -ben az $\{U, R\}/R$ ($U \in U$) alakú balideálok bázisfiltert alkotnak, azért a

$$V_\mu = \{x \in S \mid \pi_\mu x \in \{U, R\}/R\}$$

alakú balideálok S -nek egy V bázisfilterét alkotják. V -nek a φ^{-1} leképezésénél R/R -ban az $\{U, R\}/R$ balideál felel meg, világos, hogy $\{U, R\}/R \subseteq \{U, R\}/R$. Az $R = \{R/R\}_{\mu < \lambda}$ filterre teljesül $\mathbf{R} = 0$, azért R/R -nek a legdurvább lineárisan kompakt topológiájában a 4, 15. állítás szerint $\lim \mathbf{R} = 0$ is teljesül. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan v rendszám, amelyre $R/R \subseteq \{U, R\}/R$ teljesül. Következésképp fennáll $\{U, R\}/R \subseteq \{U, R\}/R$ is. Ezek a megfontolások azt mutatják, hogy φ nyílt-folytonos leképezés, és így R/R L -kompakt.

Ezzel kimutattuk, hogy R/R a legdurvább lineárisan kompakt topológiában L -kompakt. Minthogy pedig R t -nilpotens, azért $R = R/R$ L -kompakt. $\square$

A 11, 4. és 11, 2. tételekből közvetlenül folyik a

11, 5. korollárium. *Egy t -nilpotens lineárisan kompakt gyűrű mindig radikálgűrű.*

Ez a korollárium általánosítása annak az állításnak, amely szerint egy nilpotens Artin-gyűrű radikálgűrű.

Miként azt a 11, 2. tétel bizonyítása után már megemlítettük, LEPTIN [19] 2. §-ának eredményei mutatják, hogy ennek a korolláriumnak a megfordítása nem érvényes; egy lineárisan kompakt radikálgűrű nem szükségképpen t -nilpotens, és így nem szükségképpen L -kompakt a legdurvább lineárisan kompakt topológiában.

A 11, 4. tétel bizonyításánál láttuk, hogy egy R lineárisan kompakt gyűrű R/R faktorgyűrűje a legdurvább lineárisan kompakt topológiában L -kompakt, továbbá az is igaz, hogy R/R t -nilpotens. Ezzel előállt a

11, 6. korollárium. *Egy R lineárisan kompakt radikálgűrű az R lineárisan kompakt idempotens radikálgűrűnek az R/R t -nilpotens lineárisan kompakt gyűrűvel való Schreier-bővítése.*

(Beérkezett: 1966. I. 17.)

BEITRÄGE ZUR THEORIE DER LINEAR KOMPAKTEN RINGE

Von

RICHARD WIEGANDT

ZUSAMMENFASSUNG

Diese Arbeit enthält die Ergebnisse der Arbeiten [31], [32], [33] und [34] mit ausführlichen Vorbereitungen. Der erste Teil dieser Arbeit ist in dieser Zeitschrift (16 (1966) 239—267) erschienen. Das Literaturverzeichnis ist dem ersten Teil beigelegt.