MEGJEGYZÉS AZ EGYSÉGELEMES FÉLCSOPORTOKRÓL

Írta: SZÁSZ FERENC

A közelmúltban e Közleményekben jelent meg LAJOS SÁNDOR és SZÉP JENŐ [5] közös cikke az egységelemes félcsoportok néhány új jellemzéséről az összes félcsoport osztályán belül. Ebben a dolgozatban is olyan feltételek megállapítása szerepel, amelyek az egységelemes félcsoportokat az összes félcsoport osztályán belül jellemzik.

Félcsoporton (vagy más szóval asszociatív rendszeren) tudvalevőleg olyan F halmazt értünk, amelyben minden $x, y \in F$ elempárra értelmezve van egy $x \cdot y \in F$ szorzat úgy, hogy minden $x, y, z \in F$ elemhármasra $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ teljesül. Egy F félcsoportot *balegységelemes*nek, ill. *jobbegységelemes*nek nevezzük, ha F-ben létezik olyan e_1, illetve e_2 elem, hogy minden x és $y (\in F)$ elemre $e_1 x = x$, illetve $y e_2 = y$ fennáll. Az F félcsoportot *egységelemes*nek nevezzük, ha F-nek van olyan eleme, amelyik egyidejűleg balegységelem és jobbegységelem is. Világos, hogy ha egy F félcsoportban létezik egy e_1 balegységelem és egy e_2 jobbegységelem, akkor szükségképpen $e_1 = e_2$ és így az $e = e_1 = e_2$ elem F-nek egységeleme. Egy $z \in F$ elemet a félcsoport *zérusá*nak nevezzük, ha minden $x \in F$ elemre $xz = zx = z$ teljesül. Ha létezik egy F félcsoportban zérus, akkor ez egyértelműen meg van határozva. Világos, hogy minden félcsoportnak létezik zéruselemes félcsoport bővítése. Egy z zéruselemes F félcsoportnak a b elemét F *balannihilátorá*nak (illetve j elemét jobbannihilátorának) hívjuk, ha $bx = z$ (illetve $xj = z$) teljesül minden $x \in F$ elemre. Világos, hogy maga a z zéruselem, ha létezik ilyen F-ben, F-nek mind bal oldali, mind jobb oldali annihilátora. Abban a félcsoportban, amelyben bármely két elem szorzata egy előre kijelölt rögzített elemmel egyenlő, minden elem egyidejűleg bal- és jobbannihilátor, és a kijelölt rögzített elem a félcsoport zérusa. Ebben az utóbbi F félcsoportban $|F| \geqq 2$ esetén mindig van olyan x, y, z elemhármas, hogy $x \neq y$, de $xz = yz$ vagy $zx = zy$. Valamilyen F félcsoportban az f elemet *balreguláris*nak (ill. jobbregulárisnak) nevezzük, ha minden $fx = fy$ $(x, y \in F)$ egyenletből (illetve minden $xf = yf$ egyenletből) már $x = y$ is folyik. Az egyidejűleg bal- és jobbreguláris elemet regulárisnak nevezzük. Az F félcsoport egy L részhalmaza (ill. R részhalmaza) *balideál* (*jobbideál*) F-ben, hogyha fennáll $FL \subseteqq L$ (illetve $RF \subseteqq R$). Az I részhalmaz F-nek *ideál*ja, ha I egyidejűleg mind balideál, mind pedig jobbideál F-ben. Egy z zéruselemes F félcsoportból egy olyan F' faktorfélcsoport készíthető F-nek bármely I ideálja szerint, amely az összes f' elemből áll, ahol $f \in F$, és $f \notin I$ esetén $f' = f$, míg $f \in I$ esetén $f' = z'$, ahol z az F-nek, z' az F'-nek a zérusa, és F' homomorf képe F-nek. Ehhez megjegyezzük, hogy az F' faktorfélcsoportot az F-nek az I ideálja szerint vett *Rees-féle faktorfélcsoportjá*nak nevezik, és általában egy olyan φ egyváltozós függvényt, amelynek értelmezési tartománya egy F félcsoport, értékkészlete egy F' félcsoportnak egy részhalmaza, és amelyre $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ teljesül minden $x, y \in F$ elempárra, az F félcsoport F'-be (tehát F' egy részhalmazára) való *homomorfizmusának* nevezzük. F-nek a *centruma* mindazon x-ek halmaza, amelyekre minden y elemre $xy = yx$ teljesül $(x, y \in F)$.

A félcsoportok további tulajdonságaira, továbbá speciális félcsoportok ti. csoportok és gyűrűk definíciójára és alapvető tulajdonságaira nézve utalunk RÉDEI LÁSZLÓ [8] magyar nyelvű tankönyvére.

Közismert dolog, hogy a félcsoportok az algebrában, továbbá a matematika egyéb ágaiban és az automaták absztrakt elméletében milyen fontos szerepet játszanak (lásd pl. LJAPIN [6], HILLE [4], GLUSKOV [2]). E fontos szerep betöltésének oka főleg az, hogy bármely H halmaz önmagába való egyértelmű leképezéseinek F halmaza, a leképezések szorzatának a szokásos $(\varphi_1 \varphi_2)h = \varphi_1(\varphi_2 h)$, $\varphi_i h \in H$, $h \in H$ és $\varphi_i \in F$ értelmezését alapul véve, nyilván egy egységelemes félcsoport. Ezen kívül igen sok fontos matematikai objektum, mint pl. egy topológikus tér önmagába való folytonos (egyértelmű) leképezéseinek a halmaza, vagy egy ferdetest feletti adott $n \times n$ típusú összes négyzetes matrix halmaza a leképezések, ill. matrixok szorzásának szokásos értelmezésével nyilván félcsoportot alkot. Mindhárom példa egyszersmind egységelemes félcsoportot ad. Ha azonban adott n-re nem az összes $n \times n$ típusú négyzetes matrixot tekintjük, könnyen kaphatunk példát nem egységelemes félcsoportra. Tekintsük ugyanis pl. a racionális számtest felett vett

$$\bar{e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \bar{o} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3×3 típusú matrixokat a szokásos matrix-szorzással. Ekkor az $F = \{\bar{e}, \bar{z}, \bar{o}\}$ halmaz olyan félcsoport, amely nem egységelemes, és amelyben $\bar{e}$ jobbegységelem, $\bar{z}$ jobbannihilátor és $\bar{o}$ zéruselem. Hasonlóan a racionális számtest feletti

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{g} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrixokkal generált $F_1 = \{\bar{f}, \bar{g}, \bar{o}\}$ félcsoport szintén nem egységelemes, de F_1-ben $\bar{f}$ balegységelem, $\bar{g}$ balannihilátor és $\bar{o}$ zéruselem. F_1-nek az $F_2 = \{\bar{g}, \bar{o}\}$ részhalmaza példa olyan félcsoportra, amelyben nincs sem balegységelem, sem jobbegységelem.

Már az eddig elmondottakból is következik a félcsoport egységelemének nagy szerepe, de topológikus terek további leképezéseinek, ill. *Banach*-terek operátorainak halmazaival lehetne még jobban megvilágítani a egységelemes félcsoportok fontosságát. Ezért kézenfekvőnek és célszerűnek látszik egy tetszőleges absztrakt F félcsoportban az egységelem létezésére szükséges és elegendő feltételeket megállapítani. Minthogy az összes asszociatív gyűrű osztályában az egységelemes gyűrűk mind direktfelbontások, mind pedig moduluselméleti szempontból kitüntetett szerepet játszanak, gyűrűkben is célszerű végezni és végeztek is vizsgálatokat olyan kritériumok megállapítására, amelyek ekvivalensek a gyűrű egységelemének a létezésével. Az egységelem létezésére vonatkozó ilyen jellegű bizonyos vizsgálatokat találhatunk pl. gyűrűk esetében R. BAER [1], J. N. HERSTEIN [3], G. MICHLER [7] és szerző [9], [10] dolgozataiban, vagy félcsoportok esetében, pl. LAJOS S. és SZÉP J. [5] dolgozatában.

A jelen dolgozatnak a célja további olyan kritériumnak a megállapítása, amely ekvivalens egy F félcsoport egységelemének a létezésével. Dolgozatomban megemlítem még e kritériumnak néhány következményét, amelyek konkrét esetekben valószínűleg hasznosnak bizonyulnak. Megjegyzem egyébként, hogy az alábbi tétel úgy is tekinthető, mint szerző [10] dolgozata 3. 2. 1 gyűrűelméleti tételének egyik félcsoportelméleti analogonja, ez az analógia azonban nem teljes, a félcsoportban a kivonás korlátlan elvégezhetőségének a hiánya miatt. Érvényes tehát a következő:

TÉTEL. *Egy F félcsoportra nézve egymással ekvivalens az alábbi két feltétel:*

a) *F egységelemes félcsoport;*

b) *F tartalmaz olyan f_1 balreguláris elemet és f_2 jobbreguláris elemet, amelyekre $Ff_1 \subseteq f_1F$ és $f_2F \subseteq Ff_2$ fennáll, továbbá F olyan félcsoport, amelynek az F' legszűkebb zéruselemes bővítésére egyidejűleg teljesül az alábbi két feltétel:*

(*) *F'-nek minden homomorf képe balannihilátormentes (azaz a zérus az F' minden homomorf képének egyetlen balannihilátora),*

(**) *F'-nek minden homomorf képe jobbannihilátormentes, (azaz a zérus az F' minden homomorf képének egyetlen jobbannihilátora).*

1. KÖVETKEZMÉNY. Egy F félcsoport akkor és csak akkor egységelemes, ha F tartalmaz centrumbeli reguláris elemet, és F-nek az F' legszűkebb zéruselemes bővítésére teljesül (*) és (**).

2. KÖVETKEZMÉNY. Egy olyan F félcsoport, amelynek minden nem-zérus eleme reguláris, akkor és csak akkor egységelemes, ha F centruma nem az F zéruseleme, és ha az F' legszűkebb zéruselemes bővítésére (*) és (**) teljesül.

3. KÖVETKEZMÉNY. Egy olyan kommutatív félcsoport, amelynek minden nem-zérus eleme reguláris, akkor és csak akkor egységelemes, ha F-nek az F' legszűkebb zéruselemes bővítésére (*) és (**) teljesül.

Bizonyítás. Minthogy b) nyilvánvalóan folyik a)-ból, elegendő megmutatni, hogy a) is következik a b) feltételből. Legyen tehát F tetszőleges olyan félcsoport, amelyre teljesül a tételben szereplő b) feltétel, és be fogjuk bizonyítani, hogy létezik F-ben egységelem. Legyen L az F tetszőleges balideálja. Minthogy LF ideál és az F/LF Rees-féle faktorfélcsoport balannihilátormentes (*) miatt, ezért $L \subseteq LF$. Speciálisan $L = F$ esetére adódik $F \subseteq F^2 \subseteq F$, tehát $F^2 = F$, míg az $L = f \cup Ff$ speciális esetre azt kapjuk, hogy $f \in fF \cup FfF$, minden $f \in F$ elemre. Hasonlóan (xx) miatt $R \subseteq FR$ érvényes F minden R jobbideáljára, tehát speciálisan $f \in Ff \cup FfF$ teljesül minden $f \in F$ elemre. Ámde a b) feltételei szerint létezik olyan f_1 balreguláris elem és olyan f_2 jobbreguláris elem, amelyekre fennáll $Ff_1 \subseteq f_1F$ és $f_2F \subseteq Ff_2$. Ezért, és mivel $F^2 = F$, továbbá minden $f \in F$ elemre $f \in (Ff \cup FfF) \cap (fF \cup FfF)$ teljesül, szükségképpen adódik $f_1 \in f_1F \cap Ff_1F \subseteq f_1F \cup f_1F^2 = f_1F$ és hasonlóan $f_2 \in Ff_2$. Létezik tehát olyan $g_1, g_2 \in F$ elempár, amelyre $f_1 = f_1g_1$ és $f_2 = g_2f_2$. Ez egyenletek közül az elsőt tetszőleges $x \in F$ elemmel jobbról szorozva és a balreguláris f_1 elemmel balról egyszerűsítve $x = g_1x$, a második egyenletet x-szel balról szorozva és a jobbreguláris f_2 elemmel jobbról egyszerűsítve $x = xg_2$ nyerhető. Speciálisan tehát $g_2 = g_1g_2$ és $g_1 = g_1g_2$, tehát $g_1 = g_2$ adódik. Ennélfogva F-nek az $e = g_1 = g_2$ elemére és minden $x \in F$ elemre $ex = xe = x$ adódik, tehát e egységelem F-ben. Ezzel kimutattuk azt, hogy az a) és b) feltételek ekvivalensek, amivel a tétel bizonyítást nyert. Minthogy az 1., 2. és 3. Következmény nyilvánvalóan folyik a tételből, ezek nem igényelnek külön bizonyítást.

Érdemes volna megvizsgálni azt, hogy a tételben szereplő b) feltétel formálisan hogyan enyhíthető egy b′) feltétellé úgy, hogy b') még ekvivalens maradjon tartalmilag b)-vel, tehát az a) feltétellel is. Gyűrűknél ugyanis elegendő a bal-jobb szimmetrikus b) feltételnek bizonyos értelemben csak a „bal felét" vagy a „jobb felét" venni ahhoz, hogy a feltétel az egységelemes gyűrűket adja. De félcsoportoknál a kivonás értelmezésének hiánya akadályt látszik állítani ahhoz, hogy b)-nek pl. csak a „bal fele" (azaz létezik olyan f_1 balreguláris elem, amelyre fennáll $Ff_1 \subseteqq f_1 F$ és F'-re teljesül (*)) elegendő legyen az a)-val való ekvivalenciához.

IRODALOM

[1] R. BAER, Kriterien für die Existenz eines Einselementes in Ringen, *Math. Zeitschr.* **56** (1952), 1—17.
[2] V. M. GLUSKOV, Az automaták absztrakt elmélete, I, *MTA III. Oszt. Köz.* **13** (1963), 287—309; II, *MTA III. Oszt. Közl.* **14** (1964), 71—110 (fordítás oroszból).
[3] I. N. HERSTEIN, On torsion free Artin rings, *Annales Univ. Sci. Budapest Eötvös, Sect. Math.*, 7 (1964), 97—98.
[4] E. HILLE, *Functional Analysis and Semi-Groups*, Providence, 1948.
[5] LAJOS S.—SZÉP J.: Az egységelemes félcsoportok néhány jellemzése, *MTA III. Oszt. Közl.*, **15** (1965), 29—32.
[6] E. SZ. LJAPIN, *Polügruppü*, Moszkva, 1960 (oroszul).
[7] G. MICHLER, Kleine Ideale, Radikale und die Eins in Ringen, *Publ. Math. Debrecen*, **12** (1965) 231—252.
[8] RÉDEI L, *Algebra*, I., Budapest, 1954.
[9] F. SZÁSZ, Über Artinsche Ringe, *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl.* III., **11**:6 (1963) 351—354.
[10] F. SZÁSZ, Einige Kriterien für die Existenz des Einselementes in einem Ring, *Acta Sci. Math. Szeged*, (sajtó alatt).

(Beérkezett: 1966. VI. 3.)

EINE BEMERKUNG ÜBER DIE HALBGRUPPEN MIT ZWEISEITIGEM EINSELEMENT

Von
F. SZÁSZ

ZUSAMMENFASSUNG

Verfasser gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des Einselementes einer Halbgruppe H an. Es gilt nämlich der folgende.

SATZ. Für eine Halbgruppe H sind die folgenden zweien Aussagen untereinander äquivalent:

a) H enthält zweiseitiges Einselement

b) H enthält ein linksregulares Element f_1 und ein rechtsregulares Element f_2 mit den Bedingungen $Hf_1 \subseteqq f_1 H$ und $f_2 H \subseteqq Hf_2$, weiterhin sind für die engste Halbgruppenerweiterung H' von H mit der Adjunktion eines Nullelementes die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

(*) jedes homomorphe Bild $H'\varphi$ von H' besitzt keinen von Null verschiedenen Linksannihilator;

(**) jedes homomorphe Bild $H'\varphi$ von H' besitzt keinen von Null verschiedenen Rechtsannihilator.

Dieser Satz kann, als eine teilweise Verallgemeinerung eines ringtheoretischen Satzes aus [10] angesehen werden.