EGY ÁLTALÁNOS MÓDSZER FÜGGVÉNY-EGYENLETEK NÉHÁNY OSZTÁLYÁNAK MEGOLDÁSÁRA, III.*

Írta: VINCZE ENDRE

7. §. Két speciális függvényegyenletrendszer megoldhatóságának feltételei

7. 1. A későbbiekben rá fogunk mutatni, hogy e determinánsos módszerrel (2. 29) típusú egyenletekből álló függvényegyenletrendszerek is minden *elvi* nehézség nélkül megoldhatók. Itt csupán két speciális egyenletrendszert kívánunk tárgyalni; gyakori felbukkanásuk irányította rá a figyelmet. Az e §-ban tárgyaltakhoz hasonló függvényegyenletrendszer J. ACZÉL és Z. DARÓCZY [6] közös munkájában szerepel.

7. 2. Tekintsük a $Q_0(\ast)$ félcsoporton érvényes

$$(7.1)\quad G(z\ast t) = a_1G(z)G(t)+a_2G(z)H(t)+a_3H(z)G(t)+a_4H(z)H(t)+G(z)+G(t),$$

$$(7.2)\quad H(z\ast t) = a_5G(z)G(t)+a_6G(z)H(t)+a_7H(z)G(t)+a_8H(z)H(t)+H(z)+H(t),$$

$$[G(z),\ H(z)\colon Q_0(\ast)\to Q]$$

egyenletekből álló egyenletrendszert. Érvényes a

7. 1. TÉTEL. *Ha a $Q_0(\ast)$ ABEL-félcsoporton érvényes* (7. 1) *és* (7. 2) *egyenletekből álló egyenletrendszerben a $G(z)$ és $H(z)$ függvényekre*

$$(7.3)\quad \bar{\Delta}(G, H)\not\equiv 0$$

teljesül, akkor ennek az egyenletrendszernek csak abban az esetben van megoldása, ha a benne szereplő konstansok kielégítik az

$$a_2 = a_3,\quad a_6 = a_7;$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_5 \\ a_4 & a_6 \end{vmatrix} = 0,\qquad \begin{vmatrix} a_2 & a_1-a_6 \\ a_4 & a_2-a_8 \end{vmatrix} = 0,\qquad \begin{vmatrix} a_5 & a_1-a_6 \\ a_6 & a_2-a_8 \end{vmatrix} = 0$$

feltételi egyenleteket.

MEGJEGYZÉS. A $\Delta(G,H)\equiv 0$ esetben (7. 1) és (7. 2) csak egy ismeretlen függvényt tartalmazó egyenletekre egyszerűsödik; hasonló típusokat az előzőekben már tárgyaltunk. A bizonyítás során az $M''=M(z\ast t)$, $M'=M(t)$, $M=M(z)[M=G,\ H]$ jelöléseket ismételten használni fogjuk.

* A dolgozat első és második része az *MTA Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **16** (1966), 179—208 és 301—331 oldalain jelent meg; az egyes fejezetek, képletek, tételek stb. számozása ezekhez csatlakozóan folytatólagos. A *teljes irodalomjegyzéket* is az első részhez csatoltuk.

BIZONYÍTÁS. A bal oldalak szimmetriája alapján

$$a_2\Delta(G, H)+a_3\Delta(H, G)=(a_2-a_3)\Delta(G, H) = 0,$$

$$a_6\Delta(G, H)+a_7\Delta(H, G)=(a_6-a_7)\Delta(G, H) = 0,$$

tehát (7. 3) miatt valóban $a_2=a_3$ és $a_6=a_7$.

Az asszociativitás folytán pedig (7. 1) és (7. 2) ismételt felhasználásával (7. 1)-ből

$$\Delta(G'', a_1G)+\Delta(G'', a_2H)+\Delta(H'', a_2G)+\Delta(H'', a_4H)+\Delta(G'', 1)+\Delta(1, G) =$$

$$= \Delta(a_1G'G+a_2H'G+a_2G'H+a_4H'H+G+G', a_1G)+$$

$$+\Delta(a_1G'G+a_2H'G+a_2G'H+a_4H'H+G+G', a_2H)+$$

$$+\Delta(a_5G'G+a_6H'G+a_6G'H+a_8H'H+H+H', a_2G)+$$

$$+\Delta(a_5G'G+a_6H'G+a_6G'H+a_8H'H+H+H', a_4H)+$$

$$+\Delta(a_1G'G+a_2H'G+a_2G'H+a_4H'H+G+G', 1)+\Delta(1, G)=0,$$

azaz rövid számítás után

(7. 4) $$[(a_4a_5-a_2a_6)G'+(a_2^2-a_1a_4-a_2a_8+a_4a_6)H']\Delta(G, H) = 0$$

adódik, tehát (7. 3) miatt valóban

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_5 \\ a_4 & a_6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_2 & a_1-a_6 \\ a_4 & a_2-a_8 \end{vmatrix} = 0.$$

Vegyük észre továbbá, hogy a (7. 1)—(7. 2) egyenletrendszer bizonyos szimmetriát mutat, éspedig abban az értelemben, hogy a

(7. 5) $$G(z) \leftrightarrow H(z), \quad a_1 \leftrightarrow a_8, \quad a_2(=a_3) \leftrightarrow a_6(=a_7), \quad a_4 \leftrightarrow a_5$$

egyidejű cserékkel (7. 1)-ből (7. 2), ill. (7. 2)-ből (7. 1) adódik. Így az asszociativitás kihasználása (7. 2)-ben ugyanazt eredményezi, mint ha (7. 4)-ben, ill. a belőle felírt determinánsokban az említett cseréket végrehajtjuk:

$$\begin{vmatrix} a_6 & a_4 \\ a_5 & a_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_6 & a_8-a_2 \\ a_5 & a_6-a_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

7. 3. Hasonló tétel érvényes a

(7. 6) $$G(z*t) = a_1G(z)G(t)+a_2G(z)H(t)+a_3H(z)G(t)+a_4H(z)H(t),$$

(7. 7) $$H(z*t)=a_5G(z)G(t)+a_6G(z)H(t)+a_7H(z)G(t)+a_8H(z)H(t)$$

$$[G(z), H(z)\colon Q_0(*)\to Q]$$

egyenletekből álló egyenletrendszerre is.

7. 2. TÉTEL. *Ha a* $Q_0(*)$ ABEL-*félcsoporton érvényes* (7. 6) *és* (7. 7) *egyenletekből álló egyenletrendszerben a G és H függvényekre*

$$\Delta(G, H) \not\equiv 0$$

teljesül, akkor ennek az egyenletrendszernek csak abban az esetben van megoldása, ha a benne szereplő konstansok kielégítik az

$$a_2 = a_3, \quad a_6 = a_7;$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_5 \\ a_4 & a_6 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_2 & a_1 - a_6 \\ a_4 & a_2 - a_8 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_5 & a_1 - a_6 \\ a_6 & a_2 - a_8 \end{vmatrix} = 0$$

feltételi egyenletrendszert.

MEGJEGYZÉS. A $\Delta(G, H) \equiv 0$ eset figyelmen kívül hagyható, mert ekkor (7. 6), ill. (7. 7) egy-egy speciális esetét képezi a már részletesen vizsgált (4. 23) egyenletnek.

BIZONYÍTÁS. A bal oldalak szimmetriájából a szokásos módon most is $a_2 = a_3$ és $a_6 = a_7$ adódik.

Az asszociativitást kihasználva (7. 6) alapján egyrészt

$$\begin{aligned} \Delta(G'', a_1G) + \Delta(G'', a_2H) + \Delta(H'', a_2G) + \Delta(H'', a_4H) &= \\ = \Delta(a_1G'G + a_2H'G + a_2G'H + a_4H'H, a_1G) &+ \\ + \Delta(a_1G'G + a_2H'G + a_2G'H + a_4H'H, a_2H) &+ \\ + \Delta(a_5G'G + a_6H'G + a_6G'H + a_8H'H, a_2G) &+ \\ + \Delta(a_5G'G + a_6H'G + a_6G'H + a_8H'H, a_4H) &= \\ = [(a_4a_5 - a_2a_6)G' + (a_2^2 - a_1a_4 - a_2a_8 + a_4a_6)H']\Delta(G, H) &= 0 \end{aligned}$$

adódik, tehát $\Delta(G, H) \not\equiv 0$ miatt valóban

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_5 \\ a_4 & a_6 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_2 & a_1 - a_6 \\ a_4 & a_2 - a_8 \end{vmatrix} = 0.$$

Másrészt az előző tétel bizonyításánál említett szimmetriaviszonyok [vö. (7. 5)] itt is fennállnak, így

$$\begin{vmatrix} a_6 & a_4 \\ a_5 & a_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_6 & a_8 - a_2 \\ a_5 & a_6 - a_1 \end{vmatrix} = 0$$

is teljesül, s ezzel a tételt igazoltuk.

7. 4. Érdekes megjegyezni, hogy a (7. 1)—(7. 2), ill. (7. 6)—(7. 7) egyenletrendszerben a konstansokra *ugyanazok* a relációk érvényesek, noha a két egyenletrendszer nemcsak hogy nem ekvivalens, de általában nem is írható egymásba.

8. §. Az n-edrendű lineáris függvényegyenlet visszavezetése alacsonyabbrendű függvényegyenletekre

E § előzményeit lényegében már a (4. f) és (4. g) egyenletek kapcsán az előzőekben említettük. Legutóbb G. N. SAKOVITS [85] foglalkozott ennek az egyenletnek több fontos speciális esetével.

8. 1. Útmutatást kívánunk adni az

$$F(z_1 * z_2) = \sum_{k=1}^{n} G_k(z_1) H_k(z_2) \tag{8. 1}$$

$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0(*);\ F(z), G_k(z), H_k(z): Q_0(*) \to Q;\ k = 1, 2, \ldots, n]$$

típusú függvényegyenletek vizsgálatához, ill. megoldásához tetszőleges n természetes szám esetén is, ahol az F, G_k, H_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ függvények között van (legalább egy) *ismeretlen* függvény is.

8. 1. DEFINÍCIÓ. *Ha* (8. 1)-*ben a*

$$\Delta(G_1, G_2, \ldots, G_n) \not\equiv 0, \tag{8. 2}$$

$$\Delta(H_1, H_2, \ldots, H_n) \not\equiv 0 \tag{8. 3}$$

feltételek egyidejűleg teljesülnek, akkor (8. 1)-*et „a* $Q_0(*)$ ABEL-*félcsoporton pontosan n-edrendű lineáris függvényegyenletnek" nevezzük.*

8. 2. DEFINÍCIÓ. *Az* $F_1, F_2, \ldots, F_m$ $[F_k: Q_1 \to Q;\ k=1, 2, \ldots, m]$ *függvények tetszőleges* Q_1 *halmazon vannak értelmezve. Azt mondjuk, hogy e függvényrendszer „a* Q_1 *halmazon pontosan m-edrangú", ha lineárisan függetlenek, azaz ha*

$$\Delta(F_1, F_2, \ldots, F_m) \not\equiv 0.$$

Legyen e függvényrendszer lineárisan függő, tehát

$$\Delta(F_1, F_2, \ldots, F_m) \equiv 0. \tag{8. 4}$$

Ha (8. 4)-*nek minden* $(r+1)$-*edrendű aldeterminánsa azonosan eltűnik, de van (legalább egy) nem azonosan eltűnő r-edrendű aldeterminánsa, akkor „a függvényrendszer a* Q_1 *halmazon pontosan r-edrangú"* $(r>0)$. *Az* $F_1 = F_2 = \ldots = F_m = 0$ *függvényrendszer és csak ez* 0-*adrangú.*

8. 1. LEMMA. *Legyen a* (8. 1) *egyenletben szereplő* $\{G_k\}$ *ill.* $\{H_k\}$ *függvényrendszer rangja* $r(G_k)$, *ill.* $r(H_k)$. *Ha* $n > r = \min(r(G_k), r(H_k)) > 0$ *fennáll, akkor* (8. 1) *mindig visszavezethető egy legfeljebb r-edrendű lineáris függvényegyenletre.*

BIZONYÍTÁS. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a függvényegyenlet rangja éppen $r = r(G_k)$, továbbá, hogy a G_k függvények indexelését úgy végeztük, hogy

$$\Delta(G_1, G_2, \ldots, G_r) \not\equiv 0$$

fennáll. Mivel $n > r$, ezért

$$\Delta(G_i, G_1, G_2, \ldots, G_r) \equiv 0,$$

$$(i = r+1, \ldots, n),$$

azaz

$$G_i = a_{i1}G_1 + a_{i2}G_2 + \ldots + a_{ir}G_r \qquad (n \geqq i \geqq r+1).$$

Írjuk e függvényeket (8. 1)-be, akkor az

$$F(z_1 * z_2) = \sum_{k=1}^{r} G_k(z_1)H_k(z_2) + \sum_{i=r+1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{r} a_{ik}G_k(z_1)\right] H_i(z_2) =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} G_k(z_1)\left[H_k(z_2) + \sum_{i=r+1}^{n} a_{ik}H_i(z_2)\right] = \sum_{k=1}^{r} G_k(z_1)K_k(z_2)$$

egyenletet nyerjük. A

$$K_k(z) = H_k(z) + \sum_{i=r+1}^{n} a_{ik}H_i(z) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

függvényrendszer rangja általában $r(K_k) \leqq r$. Ezzel a 8. 1. lemmát igazoltuk.

Nyilvánvaló, hogy a 8. 1. lemma ismételt felhasználásával minden esetben elérhető, hogy a (8. 1) egyenlet vagy az

$$F(z_1 * z_2) \equiv 0,$$

vagy pedig egy

(8. 5) $$F(z_1 * z_2) = \sum_{k=1}^{\bar{n}} \bar{G}_k(z_1)\bar{H}_k(z_2)$$

alakú lineáris egyenletre egyszerűsödik, ahol

$$\Delta(\bar{G}_1, \bar{G}_2, \ldots, \bar{G}_{\bar{n}}) \not\equiv 0,$$

$$\Delta(\bar{H}_1, \bar{H}_2, \ldots, \bar{H}_{\bar{n}}) \not\equiv 0,$$

tehát pontosan *n-edrendű lineáris függvényegyenlet*. Ezért a következőkben feltehetjük, hogy (8. 1) pontosan n-edrendű.

8. 2. Szükségünk lesz a következő lemmára:

8. 2. LEMMA. *Ha az $a_{k,i}$ konstansok szimmetrikusak, azaz $a_{k,i} = a_{i,k}$, akkor tetszőleges $H_1, H_2, \ldots, H_n$ függvényrendszerre*

(8. 6) $$\sum_{k=2}^{p-1} \sum_{i=1}^{k-1} a_{k,i}\Delta(H_i, H_k, H_{p+1}, \ldots, H_n) + \sum_{k=1}^{p-2} \sum_{j=k+1}^{p-1} a_{k,j}\Delta(H_j, H_k, H_{p+1}, \ldots, H_n) = 0$$

érvényes.

BIZONYÍTÁS. Vegyük észre, hogy (8. 6) első kettős összege — az indexek alkalmas átírása után — a következőképpen alakul:

$$\sum_{k=2}^{p-1}\sum_{i=1}^{k-1} a_{k,i}\Delta(H_i, H_k, H_{p+1}, \dots, H_n) = \sum_{i=2}^{p-1}\sum_{k=1}^{i-1} a_{i,k}\Delta(H_k, H_i, H_{p+1}, \dots, H_n) =$$
$$= \sum_{k=1}^{p-2}\sum_{j=k+1}^{p-1} a_{j,k}\Delta(H_k, H_j, H_{p+1}, \dots, H_n) =$$
$$= -\sum_{k=1}^{p-2}\sum_{j=k+1}^{p-1} a_{k,j}\Delta(H_j, H_k, H_{p+1}, \dots, H_n).$$

Ilyen átalakítások után (8. 6) helyessége nyilvánvaló, amivel a lemmát igazoltuk.

A 8. 2. lemmát felhasználva bizonyítható a

8. 1. TÉTEL. *Ha a* (8. 1) *függvényegyenletet kielégítő* $\{H_k(z)\}$ *függvényrendszer rangja pontosan* $n=r(H_k)$, *akkor*

$$'G_p(z) = \sum_{i=1}^{n} a_{p,i}H_i(z) \qquad (p = 1, 2, \dots, n), \tag{8. 7}$$

ahol az $a_{p,i}$ *együtthatók szimmetrikusak:* $a_{p,i}=a_{i,p}$ $(i, p=1, 2, \dots, n)$.

MEGJEGYZÉS. A bizonyításból ki fog tűnni, hogy a tétel *nem asszociatív* $z_1 * z_2$ művelet esetén is érvényes.

BIZONYÍTÁS. A (8. 1) egyenletből a $z_1 * z_2$ művelet kommutativitása alapján a szokásos módon a

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta(G_k, H_k) = 0$$

egyenletet nyerjük. „Bővítsük" most ezt az egyenletet rendre a $H_n, H_{n-1}, \dots, H_2$ függvényekkel, akkor a következőket kapjuk:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \Delta(G_k, H_k, H_n) = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\sum_{k=1}^{p} \Delta(G_k, H_k, H_{p+1}, H_{p+2}, \dots, H_n) = 0, \tag{8. 8}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\sum_{k=1}^{2} \Delta(G_k, H_k, H_3, H_4, \dots, H_n) = 0, \tag{8. 9}$$
$$\Delta(G_1, H_1, H_2, H_3, \dots, H_n) = 0.$$

E legutolsó egyenletből $\Delta(H_1, H_2, \dots, H_n) \not\equiv 0$ miatt

$$G_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{1,i}H_i \qquad (a_{1,i} = \text{konst};\ i = 1, 2, \dots, n) \tag{8. 10}$$

következik. Írjuk ezt (8. 9)-be:

$$\Delta\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1,i}H_i, H_1, H_3, \dots, H_n\right) + \Delta(G_2, H_2, H_3, \dots, H_n) =$$
$$= \Delta(a_{1,2}H_2, H_1, H_3, \dots, H_n) + \Delta(G_2, H_2, H_3, \dots, H_n) =$$
$$= \Delta(G_2 - a_{1,2}H_1, H_2, H_3, \dots, H_n) = 0,$$

tehát $\Delta(H_2, H_3, \dots, H_n) \not\equiv 0$ miatt

$$G_2 - a_{1,2}H_1 = \sum_{i=2}^{n} a_{2,i}H_i \qquad (a_{2,i} = \text{konst};\ i = 2, 3, \dots, n). \tag{8. 11}$$

Mivel a jobb oldalon $a_{2,1}$ konstans nem szerepel, megállapodhatunk abban, hogy $a_{1,2} = a_{2,1}$ legyen, s így (8. 11) helyett

$$G_2 = \sum_{i=1}^{n} a_{2,i}H_i$$

írható.

Tegyük most fel, hogy a $(p-1)$-edik lépésig bezárólag (8. 11)-hez hasonló alakú kifejezést nyertünk minden G_k-ra $(k = 2, 3, \dots, p-1 \leqq n-1)$, azaz

$$G_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_{i,k}H_i + \sum_{j=k}^{n} a_{k,j}H_j = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}H_i, \tag{8. 12}$$
$$[a_{i,j} = a_{j,i};\ i,j \leqq k;\ k = 2, 3, \dots, p-1 \leqq n-1],$$

akkor ebből következni fog, hogy G_p is hasonló alakú. Írjuk ugyanis a (8. 10) és (8. 12) alatti függvényeket (8. 8)-ba, tehát a 8. 2. lemmát is felhasználva

$$\sum_{k=1}^{p-1} \Delta\left(\sum_{i=1}^{n} a_{k,i}H_i, H_k, H_{p+1}, \dots, H_n\right) + \Delta(G_p, H_p, H_{p+1}, \dots, H_n) =$$
$$= \sum_{k=1}^{p-1}\left[\sum_{i=1}^{k-1} a_{k,i}\Delta(H_i, H_k, H_{p+1}, \dots, H_n) + \sum_{j=k+1}^{p-1} a_{k,j}\Delta(H_j, H_k, H_{p+1}, \dots, H_n) + \right.$$
$$\left. + a_{k,p}\Delta(H_p, H_k, H_{p+1}, \dots, H_n)\right] + \Delta(G_p, H_p, H_{p+1}, \dots, H_n) =$$
$$= \sum_{k=2}^{p-1}\sum_{i=1}^{k-1} a_{k,i}\Delta(H_i, H_k, H_{p+1}, \dots, H_n) + \sum_{k=1}^{p-2}\sum_{j=k+1}^{p-1} a_{k,j}\Delta(H_j, H_k, H_{p+1}, \dots, H_n) +$$
$$+ \Delta\left(H_p, \sum_{k=1}^{p-1} a_{k,p}H_k, H_{p+1}, \dots, H_n\right) + \Delta(G_p, H_p, H_{p+1}, \dots, H_n) =$$
$$= \Delta\left(G_p - \sum_{k=1}^{p-1} a_{k,p}H_k, H_p, H_{p+1}, \dots, H_n\right) = 0$$

adódik, azaz

$$G_p - \sum_{k=1}^{p-1} a_{k,p}H_k = \sum_{i=p}^{n} a_{p,i}H_i \qquad (a_{p,i} = \text{konst};\ i = p, p+1, \dots, n).$$

Mivel a jobb oldalon az $a_{k,p}$ $(k=1, 2, \ldots, p-1)$ konstansok nem szerepelnek, legyen $a_{k,p}=a_{p,k}$ $(k=1, 2, \ldots, p-1)$, s így valóban

$$G_p = \sum_{i=1}^{n} a_{p,i} H_i \qquad [a_{i,j} = a_{j,i};\ i,j \leqq p]$$

is fennáll. Ez az eljárás nyilván $p=n$-ig folytatható. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

A 8. 1. tétel segítségével tehát a (8. 1)-ben szereplő $G_k(z)$ függvények kifejezhetők a $\{H_k(z)\}$ függvényrendszerrel és (8. 1) helyett

$$(8.13) \qquad F(z_1 * z_2) = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} a_{k,i} H_i(z_1) \right] H_k(z_2) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} H_i(z_1) H_k(z_2)$$

írható.

8. 3. A következőkben csupán a $\{G_k(z)\}$ és $\{H_k(z)\}$ függvényrendszerekre vonatkozó függvényegyenleteket kívánunk nyerni. Érvényes a

8. 2 TÉTEL. *Ha a* (8. 1) *egyenletet kielégítő* $\{H_k(z)\}$ *függvényrendszer rangja* $n=r(H_k)$, *akkor minden* $1 \leqq p \leqq n$-*re*

$$(8.14) \qquad G_p(z_1 * z_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{(p)} H_j(z_1) H_i(z_2)$$

fennáll, ahol $a_{i,j}^{(p)} = a_{j,i}^{(p)}$ *(szimmetrikus) konstansok.*

BIZONYÍTÁS. A (8. 1) egyenletből a $z_1 * z_2$ művelet asszociatív és kommutatív voltát kihasználva

$$(8.15) \qquad \sum_{k=1}^{n} \Delta(G_k'', H_k) = 0$$

írható, ahol $G_k'' = G_k(z * t)$ korábbi jelölést használtuk. „Bővítsük" ezt az egyenletet rendre a $H_n, \ldots, H_{p-1}, H_{p+1}, \ldots, H_1$ függvényekkel, akkor végül is a

$$\Delta(G_p'', H_1, H_2, \ldots, H_n) = 0$$

egyenlethez jutunk. Innen $\Delta(H_1, H_2, \ldots, H_n) \not\equiv 0$ miatt

$$(8.16) \qquad G_p'' = \sum_{i=1}^{n} M_{p,i}' H_i$$

következik, ahol $M_{p,i}' = M_{p,i}(t)$.

A (8. 16) egyenlet viszont ismét (8. 1) típusú, s mivel a $\{H_i(z)\}$ függvényrendszer rangja feltevésünk szerint $r(H_i)=n$, ezért alkalmazható rá a 8. 1. tétel. Eszerint

$$M_{p,i}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{(p)} H_j(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ahol $a_{i,j}^{(p)}$ szimmetrikus konstansok. Így (8. 16) helyett

$$(8.17) \qquad G_p'' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{(p)} H_j' H_i \qquad [a_{i,j}^{(p)} = a_{j,i}^{(p)};\ i,j = 1, 2, \ldots, n]$$

írható. Ez nyilván minden $1 \leqq p \leqq n$ egész számra elvégezhető, így a tételt bebizonyítottuk.

A (8. 17)-ben szereplő $a_{i,j}^{(p)}$ konstansokra további megszorításokat nyerhetnénk, ha (8. 17)-et (8. 15)-be helyettesítenénk, ezt azonban itt nem szükséges elvégeznünk.

8. 4. A 8. 1. és 8. 2. tételből közvetlenül adódik a

8. 1. KOROLLÁRIUM. *Ha a* (8. 1) *egyenletet kielégítő* $\{G_k(z)\}$ *és* $\{H_k(z)\}$ *függvényrendszer rangja* $n=r(G_k)=r(H_k)$, *akkor* (8. 1)*-ből a*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,p} H_i(z_1 * z_2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{(p)} H_i(z_1) H_j(z_2) \qquad (p=1,2,\dots,n) \tag{8. 18}$$

egyenletrendszer következik, ahol az $[a_{i,p}]$ $(i, p=1,2,\dots,n)$ *és* $[a_{i,j}^{(p)}]$ $(i,j=1,2,\dots,n)$ *együttható-mátrixok szimmetrikusak, továbbá*

$$\det[a_{i,p}] \neq 0, \qquad \det[a_{i,j}^{(p)}] \neq 0 \qquad (p=1,2,\dots,n). \tag{8. 19}$$

BIZONYÍTÁS. Feltevésünk szerint $\Delta(H_1, H_2, \dots H_n) \not\equiv 0$, tehát (8. 7) és (8. 14) összehasonlításából azonnal (8. 18) adódik. Az együttható-mátrixok determinánsaira felírt egyenlőtlenségek is nyilván teljesülnek, ha ugyanis ezek egyike is nem teljesülne, akkor (8. 7) vagy (8. 14) alapján a kizárt $\Delta(G_1, G_2, \dots, G_n) \equiv 0$ következne. Érvényes továbbá a

8. 2. KOROLLÁRIUM. *Ha* (8. 18) *és* (8. 19) *egyidejűleg fennáll, akkor*

$$H_p(z_1 * z_2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}^{(p)} H_i(z_1) H_j(z_2) \qquad (p=1,2,\dots,n) \tag{8. 20}$$

is következik, ahol a $[b_{i,j}^{(p)}]$ $(i,j=1,2,\dots,n)$ *együttható-mátrix szimmetrikus.*

(8. 19) esetén ugyanis (8. 18) tetszőleges $H_p(z * z_2)$-re megoldható; a $b_{i,j}^{(p)}$ konstansok szimmetrikus volta nyilvánvaló.

8. 5. Keressünk most olyan $A_1, A_2, \dots, A_n$ nem mind zérus konstansokat, melyekkel a (8. 20) alatti egyenleteket rendre megszorozva és összeadva

$$\sum_{p=1}^{n} A_p H_p(z_1 * z_2) = \sum_{k=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} B_i^{(k)} H_i(z_1)\right]\left[\sum_{j=1}^{n} C_j^{(k)} H_j(z_2)\right] \tag{8. 21}$$

alakú legfeljebb $m(<n)$-edrendű lineáris függvényegyenletet nyerünk. Ilyen konstansok akkor léteznek, ha a (8. 20) és (8. 21) összehasonlításából adódó

$$\sum_{k=1}^{m} B_i^{(k)} C_j^{(k)} - \sum_{p=1}^{n} A_p b_{i,j}^{(p)} = 0 \qquad (i,j=1,2,\dots,n;\ m<n) \tag{8. 22}$$

egyenletrendszernek van nem triviális megoldása, melyen itt azt értjük, hogy

$$\left(\sum_{p=1}^{n} |A_p|\right) \prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} |B_i^{(k)}|\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |C_j^{(k)}|\right) \neq 0. \tag{8. 23}$$

A (8. 22) egyenletrendszer n^2 számú egyenletből áll. Tekintsük ismeretlennek csak az A_p, $B_i^{(k)}$ konstansokat, akkor az ismeretlenek száma $mn+n$, s a (8. 22) homogén lineáris egyenletrendszer mátrixa pedig

$$
(8.24)\qquad \begin{bmatrix}
\boxed{C_j^{(k)}} & & & 0 & \boxed{-b^{(p)}_{1,j}} \\
& \boxed{C_j^{(k)}} & & & \boxed{-b^{(p)}_{2,j}} \\
& & \boxed{C_j^{(k)}} & & \boxed{-b^{(p)}_{3,j}} \\
& & & \ddots & \vdots \\
0 & & & \boxed{C_j^{(k)}} & \boxed{-b^{(p)}_{n,j}}
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{matrix}
(j=1,2,\dots,n) \\
(k=1,2,\dots,m<n) \\
(p=1,2,\dots,n)
\end{matrix}
$$

alakú. Az egyes „blokkokban" szereplő felső indexek oszlopot, az alsók sort jelölnek, így

$$
\boxed{C_j^{(k)}} = \begin{vmatrix}
C_1^{(1)} & C_1^{(2)} \dots C_1^{(m)} \\
C_2^{(1)} & C_2^{(2)} \dots C_2^{(m)} \\
\dots & \dots \\
C_n^{(1)} & C_n^{(2)} \dots C_n^{(m)}
\end{vmatrix} \qquad (m<n)
$$

$$
\boxed{-b_{i,j}^{(p)}} = \begin{vmatrix}
-b_{i,1}^{(1)} & -b_{i,1}^{(2)} \dots -b_{i,1}^{(n)} \\
-b_{i,2}^{(1)} & -b_{i,2}^{(2)} \dots -b_{i,2}^{(n)} \\
\dots & \dots \\
-b_{i,n}^{(1)} & -b_{i,n}^{(2)} \dots -b_{i,n}^{(n)}
\end{vmatrix},
$$

a blokkokon kívül pedig csak zérusok állnak.

A (8. 24) mátrixban, eltekintve a (8. 23) megszorítástól, a $C_j^{(k)}$ ismeretlenek fölött szabadon rendelkezhetünk, s ezek alkalmas választásával (legalább) az $m=n-1$ esetben mindig elérhető, hogy a (8. 22) homogén lineáris egyenletrendszernek legyen a triviálistól különböző megoldása, ehhez ti. az $m=n-1$ esetben csak az szükséges, hogy (8. 24) determinánsa eltűnjön.

Ez pl. à következőképpen érhető el: A (8. 24) mátrix determinánsát kifejtjük és zérussal tesszük egyenlővé; bármely $C_j^{(k)}$ ismeretlen a kifejtésben legfeljebb n-edik hatványon fordul elő. Az összesen $(n-1)n$ számú $C_j^{(k)}$ ismeretlenek közül valamely kiválasztott $C_{j^*}^{(k^*)}$ kivételével a többi n^2-n-1 számút, figyelembe véve (8. 23)-at is, tetszőlegesen előírjuk, s az így előálló $C_{j^*}^{(k^*)}$-ra n-edrendű közönséges algebrai egyenletet pedig megoldjuk. Mivel a többi n^2-n-1 számú $C_j^{(k)}$ konstansot *tetszőlegesen* írtuk elő, ez az eljárás feltételezi, hogy az alapul választott Q testben [vö. (8. 1)] minden, legfeljebb n-edrendű algebrai egyenletnek van megoldása.

Így a (8. 20) alatti egyenletrendszer mindig visszavezethető (8. 21)-re, ahol $m<n$ és a $\Delta(H_1, H_2, \dots, H_n)\not\equiv 0$ megszorítás, továbbá (8. 23) miatt ez az egyenlet pontosan $m(<n)$-edrendű lineáris függvényegyenlet.

Figyelembe véve a 8. 1. lemmát is a következőt mondhatjuk:

8. 3. TÉTEL. *Ha a Q testben minden legfeljebb n-edrendű algebrai egyenletnek van megoldása, akkor bármely* (8. 1) *típusú függvényegyenlet mindig visszavezethető egy legfeljebb $n-1$-edrendű lineáris függvényegyenletre.*

8. 6. Az előzőek alapján már nyilvánvaló, hogy tetszőleges (8. 1) típusú egyenlet teljes megoldásrendszerének felírásához konkrét módszer áll rendelkezésünkre. Ha (8. 1)-ben valamennyi függvényt *ismeretlennek* tekintjük, akkor (8. 1) teljes megoldása azt jelenti, hogy *minden* (8. 1) típusú legfeljebb n-edrendű lineáris függvényegyenletet meg kell oldanunk. Így természetesnek mondható az a törekvés, melyet az általános eset vizsgálatánál az előzőekben végig megvalósítottunk, ti. hogy a megoldást az eredetinél alacsonyabbrendű egyenletek segítségével állítsuk elő. Természetesen egy-egy konkrét esetben, amikor a szereplő függvények nem mindegyike ismeretlen, vagy a szereplő függvények között lineáris függőséget vagy függetlenséget állapíthatunk meg, a megoldás korántsem olyan hosszadalmas, mint az általános esetben.

Az elmondottakból az is kitűnik, hogy e módszerrel minden, a (8. 1) típusú egyenletekből felépített függvényegyenlet-rendszer is megoldható, hisz az egyes egyenleteket külön-külön megoldva, s a megoldásokat az eredeti egyenletrendszerbe visszahelyettesítve, legfeljebb a megoldások specializálódnak.

9. §. A D'Alembert—Poisson-féle függvényegyenlet

Az alkalmazási lehetőségek nagy száma miatt is a

(9. a) $$C(x+y)+C(x-y) = 2C(x)C(y)$$

egyenlet szerepel a legtöbbet a trigonometriai függvényegyenletek irodalmában. Csupán néhány eredmény vázolására szorítkozva a következőket említjük: J. D'ALEMBERT [9], [10] és S. D. POISSON [53] analicitási feltételek mellett vizsgálják; A. L. CAUCHY [18], J. L. W. V. JENSEN [31] és J. ANDRADE [11] folytonossági feltételek mellett oldják meg; E. HOPF [27] kimutatja, hogy az $|y|\leqq 1$ ill. $y\geqq 1$ tartományokban a nem folytonos megoldások gráfja mindenütt sűrű; I. CARSTOIU [17] a LAPLACE-transzformáció segítségével oldja meg; G. ARRIGHI [14] kimutatja, hogy ha $C(x)$ valamely x helyen, pl. jobbról folytonos, akkor mindenütt folytonos; TH. ANGHELUTZA [13] további megoldásokat mutat differenciálhatóságot feltételezve; L. VIETORIS [66] megadja a legáltalánosabb valós változójú komplex megoldást; S. KUREPA [39] (vö. [37], [38]) HILBERT-térben mérhetőségi feltételek mellett vizsgálja; I. FENYŐ [22] disztribúció-módszere itt is alkalmazható.

A konkrét alkalmazásokra nem térünk ki részletesen.

9. 1. Legyen $Q_0(+)$ tetszőleges (additív módon írt) ABEL*-csoport és Q továbbra is tetszőleges test. Legyen továbbá Q' olyan test, mely Q-ból az összes olyan x elem bővítésével áll elő, mely megoldása az $x^2(a^2-1)=1$ egyenletnek, miközben $a\neq\pm 1$ a Q test elemeit futja be.* A $Q_0(+)$-ban értelmezett „összeadás" általában nem egyezik meg a Q-ban, ill. Q'-ben levővel, de mégsem fog félreértésre vezetni, ha mindkettőt egyformán jelöljük, mert $Q_0(+)$-beli elemekkel csak a szereplő függvények argumentumában, a Q-ban (vagy Q'-ben) levőkkel pedig csak azon kívül fogunk találkozni.

Tekintsük a

(9. 1) $$C(z_1+z_2)+C(z_1-z_2) = 2C(z_1)C(z_2)$$

$$[z_1, z_2, z_1+z_2, z_1-z_2 \in Q_0(+);\ C(z)\colon Q_0(+)\to Q]$$

függvényegyenletet, melyet csak egyszerűen D'ALEMBERT—POISSON-egyenlet néven tart számon az irodalom. Célunk megmutatni, hogy az előzőekben már körvonalazott determinánsos megoldási módszer erre az egyenletre is alkalmazható, s éppen ezért az eddigieknél lényegesen általánosabb eredményt kapunk. Egyszerű számítás mutatja, hogy a $z_1+z_2 \in Q_0(+)$ művelet kommutativitásából csupán $C(z)=C(-z)$ $[z \in Q_0(+)]$ adódik (a $C(z)$ függvényt az analízisből vett mintára továbbra is „páros függvénynek" fogjuk nevezni), az asszociativitás kihasználásából pedig éppenséggel semmit nem nyerünk. A módszer mégis úgy lesz alkalmazható, hogy észrevesszük a bal oldal mindkét argumentumának biszimmetrikus voltát és ennek alapján írunk fel determinánsos egyenletet; ismeretes, hogy a $B(u, v)$ függvényt akkor nevezzük biszimmetrikusnak, ha kielégíti a

$$B[B(u_1, u_2), B(u_3, u_4)] = B[B(u_1, u_3), B(u_2, u_4)]$$

függvényegyenletet.

Érvényes a következő

9. 1. TÉTEL. *A $Q_0(+)$ ABEL-csoporton érvényes* (9. 1) *függvényegyenlet összes megoldásai a következő függvények:*

(M7. 1) $$C(z) \equiv 0,$$

(M7. 2) $$C(z) = \tfrac{1}{2}[g(z)+g(z)^{-1}];$$

ahol $g(z) \neq 0$ a (2. 26) *típusú*

(9/2. 26) $$g(z_1+z_2) = g(z_1)g(z_2)$$

$$[z_1, z_2, z_1+z_2 \in Q_0(+);\ g(z): Q_0(+) \to Q']$$

CAUCHY-*egyenlet olyan megoldása, melyre*

$$\tfrac{1}{2}[g(z)+g(z)^{-1}]: Q_0(+) \to Q \qquad [z \in Q_0(+)]$$

teljesül. Más megoldások nincsenek.

MEGJEGYZÉS. Szembetűnő, hogy a (9. 1) egyenlet összes Q-beli megoldásai csak olyan $g(z)$ függvények segítségével állíthatók elő, melyek a Q-ba *nem* tartozó értékeket is felvehetnek.

BIZONYÍTÁS. Alkalmazzuk a (9. 1) egyenletet a $(z_1+u+v+z_2) \in Q_0(+)$ összegre kétféle módon:

$$C(z_1+u+v+z_2) = 2C(z_1+u)C(v+z_2) - C(z_1+u-v-z_2) =$$
$$= 2C(z_1+u)C(z_2+v) - 2C(z_1-v)C(u-z_2) + C(z_1-v-u+z_2),$$
$$C(z_1+v+u+z_2) = 2C(z_1+v)C(u+z_2) - C(z_1+v-u-z_2) =$$
$$= 2C(z_1+v)C(z_2+u) - 2C(z_1-u)C(v-z_2) + C(z_1-u-v+z_2),$$

tehát a $C(z)$ függvény páros voltát is figyelembe véve a

$$\Delta[C(z_1+u), C(z_2+v)] + \Delta[C(z_1-u), C(z_2-v)] = 0$$

egyenlet írható fel. Ezt (9. 1) alapján a későbbiek szempontjából még könnyebben kezelhető formába írjuk át, azaz

$$\Delta[C(z_1+u),\ C(z_2+v)]+\Delta[2C(z_1)C(u)-C(z_1+u),\ 2C(z_2)C(v)-C(z_2+v)] =$$
$$= \Delta[C(z_1+u),\ C(z_2+v)]+\Delta[-C(z_1+u),\ 2C(z_2)C(v)]+$$
$$+\Delta[2C(z_1)C(u),\ -C(z_2+v)]+\Delta[-C(z_1+u),\ -C(z_2+v)]=0,$$

tehát

(9. 2)
$$\Delta[C(z_1+u),\ C(z_2+v)]-\Delta[C(z_1+u),\ C(v)C(z_2)]+$$
$$+\Delta[C(z_1+v),\ C(u)C(z_2)]=0$$

adódik. „Bővítsük" most ezt az egyenletet a szokásos módon $C(z)$-vel, akkor a

(9. 3)
$$\Delta[C(z_1+u),\ C(z_2+v),\ C(z_3)] = 0$$

azonosságot kapjuk, ahol két esetet fogunk megkülönböztetni.

Megjegyzés. Látható, hogy (9. 3)-ban az eddigiektől eltérően *két* paraméter is szerepel. Ez egyrészt kedvező, mert (9. 3) ezáltal „erősebb" megszorítást jelöl ki $C(z)$-re nézve, mint a korábbi hasonló típusú (de csak egy paramétert tartalmazó) determinánsos egyenletek, tehát a megoldás ezért „elvileg" könnyebbé válik. Másrészt azonban a (9. 3)-ból a 2. 2. tétel alapján következő

$$M_1(u,v)C(z+u)+M_2(u,v)C(z+v)+M_3(u,v)C(z) \equiv 0,$$
$$\sum_{i=1}^{3}|M_i(u,v)|>0$$

azonosság túl általános, tehát túl sok (s az esetek nagy többségében megoldást nem adó) aleset vizsgálatát igényelné, de mindenesetre járható út lenne, ha a szokásos módon vizsgálnánk a $C(z+u)$, $C(z+v)$ és $C(z)$ függvények „z szerinti" lineáris függőségét. Nyilván (9. 3) alkalmas specializálása könnyít a helyzeten.

Folytatva a 9. 1. tétel bizonyítását, világos, hogy (9. 3) a

(9. 1A)
$$\Delta[C(z_1+v),\ C(z_2)]\equiv 0$$

esetben teljesül. Ha viszont $\Delta[C(z_1+v),\ C(z_2)]\not\equiv 0$, akkor van olyan $v=v_0\in Q_0(+)$ rögzített elem, melyre

(9. 1B)
$$\begin{cases} \Delta[C(z_1+u),\ C(z_2+v_0),\ C(z_3)]\equiv 0, \\ \Delta[C(z_1+v_0),\ C(z_2)]\not\equiv 0 \end{cases}$$

fennáll. E két eset vizsgálata kimeríti az összes lehetőséget.

9. 1A. Látható, hogy (9. 1A)-ból a

(9. 1A1)
$$C(z) \equiv 0,$$

(9. 1.A2)
$$C(z+v) = M(v)C(z)$$

esetek egyike következik.

9. 1. A1. A $C(z) \equiv 0$ valóban megoldása (9. 1)-nek. A továbbiakban feltesszük, hogy $C(z) \not\equiv 0$.

9. 1.A2. Ha $C(z+v) = M(v)C(z)$, akkor $\Delta(M, C) = 0$ és a feltételezett $C(z) \not\equiv 0$ alapján $M(z) = kC(z)$, tehát

$$C(z_1 + z_2) = kC(z_1)C(z_2). \tag{9. 4}$$

A $Q_0(+)$ csoporttulajdonsága folytán $z_1 + z_2$ a teljes $Q_0(+)$ halmazt befutja, így $C(z_1 + z_2) \equiv 0$-ból $C(z) \equiv 0$ is következne. Feltehető tehát, hogy (9. 4)-ben $k \neq 0$. Helyettesítsük (9. 4)-et az eredeti (9. 1)-be, akkor a nyert

$$kC(z_1)C(z_2) + kC(z_1)C(-z_2) = 2C(z_1)C(z_2)$$

egyenletből $C(z) = C(-z) \not\equiv 0$ miatt $k = 1$ következik. Így $C(z)$ egy, a (2. 26) alakú CAUCHY-egyenletet kielégítő *páros* függvény. Ezt a megoldást (M 7. 2) a $g(z)^2 \equiv 1$ esetben tartalmazza. Ugyanis, ha $C(z) \not\equiv 0$ multiplikatív, akkor sehol sem zérus, s ha páros is, akkor $C(z)^2 = C(z)C(-z) = C(z)C(z)^{-1} = 1$. A továbbiakban feltehetjük, hogy

$$\Delta[C(z_1 + v_0), C(z_2)] \not\equiv 0. \tag{9. 5}$$

MEGJEGYZÉS. Az a tény, hogy a $C(z)$ függvény lehet egyidejűleg páros és multiplikatív, s mégsem azonosan konstans függvény, első pillanatra meglepő. De valóban a

$$C(z_1 + z_2) = C(z_1)C(z_2) = C(z_1)C(-z_2) = C(z_1 - z_2) \qquad [z_1, z_2 \in Q_2(+)]$$

azonosságból $C(z) \equiv$ konst. *csak akkor* következik, ha *minden* $u, v \in Q_0(+)$ elempárhoz található olyan $z_1, z_2 \in Q_0(+)$, melyek a $z_1 + z_2 = u$, $z_1 - z_2 = v$ egyenletrendszert kielégítik. Pl. az egész számok additív csoportjában a mondott egyenletrendszer nem oldható meg korlátlanul, és ezen a csoporton meg is adható olyan $C(z) \not\equiv$ konst., mely egyidejűleg páros és multiplikatív: $C(2n) = 1$, $C(2n-1) = -1$, ha n egész.

9. 1. B. A (9. 1. B) esetben már csak az

$$C(z+u) = M_1(u)C(z+v_0) + M_2(u)C(z) \tag{9. 6}$$

egyenletet kell megvizsgálnunk. A változók szimmetriája miatt innen

$$\Delta[M_1(z_1), C(z_2+v_0)] + \Delta[M_2(z_1), C(z_2)] = 0, \tag{9. 7}$$

$$\Delta[M_1(z_1), C(z_2+v_0), C(z_3)] = 0,$$

tehát (9. 5) miatt

$$M_1(z) = k_1C(z+v_0) + k_2C(z) \qquad (k_1, k_2 = \text{konst.}), \tag{9. 8}$$

továbbá (9. 7)-ből $C(z) \not\equiv 0$ alapján

$$\Delta[k_1C(z_1+v_0) + k_2C(z_1), C(z_2+v_0)] + \Delta[M_2(z_1), C(z_2)] =$$

$$= \Delta[M_2(z_1) - k_2C(z_1+v_0), C(z_2)] = 0$$

$$M_2(z) = k_2C(z+v_0) + k_3C(z) \qquad (k_3 = \text{konst.}) \tag{9. 9}$$

következik. Ezeket felhasználva (9. 6) szerint

$$C(z+u) = k_1C(z+v_0)C(u+v_0)+k_2C(z+v_0)C(u)+ \tag{9. 10}$$
$$+k_2C(z)C(u+v_0)+k_3C(z)C(u).$$

A k_1, k_2, k_3 konstansokra további megszorításokat nyerhetünk a szokásos módon is, azaz ha (9. 6)-ot (9. 2)-be írjuk. Itt azonban már letérünk a szokásos útról, mert a $Q_0(+)$ alaphalmaz csoporttulajdonsága lényegesen nagyobb szabadságot biztosít, mint az eddigiekben és így könnyebben is érünk célt. Legyen ugyanis (9. 10)-ben $u=0$, akkor [$C(z)\not\equiv 0$ miatt $C(0)=1$; vö. (9. 1)]

$$C(z) = k_1C(v_0)C(z+v_0)+k_2C(z+v_0)+k_2C(v_0)C(z)+k_3C(z),$$

tehát (9. 5) miatt

$$k_1C(v_0)+k_2 = 0,$$
$$k_2C(v_0)+k_3-1 = 0$$

adódik. E konstansokkal (9. 10) a

$$C(z+u)=k_1[C(z+v_0)-C(v_0)C(z)][C(u+v_0)-C(v_0)C(u)]+C(z)C(u) \tag{9. 11}$$

egyenletre egyszerűsödik. (9. 1) szerint továbbá

$$C(u+2v_0)=2C(u+v_0)C(v_0)-C(u),$$

s ha most (9. 11)-ben u helyett $(u+v_0)$-t írunk, nyerjük a

$$C(z+u+v_0) = k_1[C(z+v_0)-C(v_0)C(z)][2C(v_0)C(u+v_0)-C(u)-C(v_0)C(u+v_0)]+$$
$$+C(z)C(u+v_0)$$

egyenletet. A bal oldal szimmetriája és (9. 5) alapján itt szükségképpen

$$-k_1C(v_0)^2+1 = -k_1, \tag{9. 12}$$

tehát

$$C(z+u+v_0) = k_1C(v_0)[C(z+v_0)C(u+v_0)+C(z)C(u)]- \tag{9. 13}$$
$$-k_1[C(z+v_0)C(u)+C(z)C(u+v_0)].$$

Végül (9. 11), (9. 12), (9. 13) szerint

$$C(z+u+v_0)-C(v_0)C(z+u) = [k_1C(v_0)-C(v_0)-k_1C(v_0)^3]C(z)C(u)+$$
$$+[k_1(v_0)^2-k_1][C(z+v_0)C(u)+C(z)C(u+v_0)],$$

$$C(z+u+v_0)-C(v_0)C(z+u) = [C(z+v_0)-C(v_0)C(z)]C(u)+ \tag{9. 14}$$
$$+[C(u+v_0)-C(v_0)C(u)]C(z).$$

Az eddigiek során a $v_0\in Q_0(+)$ helyről csupán annyit tételeztünk fel, hogy alkalmasan megválasztva (9. 5) fennáll. A (9. 11)-ben szereplő k_1 „konstans" természetszerűleg *függ* v_0-tól, vö. (9. 12); innen az is látható, hogy $C(v_0)^2\neq 1$. Tegyük fel most, hogy létezik olyan $v_0 \in Q_0(+)$, melyre *egyidejűleg* (9. 5) és a (9. 12)-ből adódó

$$k_1 = \frac{1}{C(v_0)^2 - 1} = k^2 \qquad (k \in Q;\ k \neq 0) \tag{9.15}$$

is fennáll, ahol tehát — hangsúlyozzuk — a (9. 15) egyenletnek van Q-ban k-ra nézve megoldása. Bizonyítjuk, hogy ekkor (9. 1) *minden* megoldása (M7. 2) alakú és a szereplő $g(z)$ függvény *is* $Q_0(+)$-t Q-ba képezi le, más szóval (9. 1)-nek az (M7. 2) típusú megoldásai közül csak azok állíthatók elő csupán Q-beli értékeket felvevő $g(z)$ függvényekkel, mely megoldások értékkészletében létezik olyan $C(v_0)$, hogy (9. 5) és (9. 15) egyidejűleg fennáll.

Ha ugyanis (9. 15) fennáll, akkor (9. 11) és (9. 14) szerint

$$kC(z+u+v_0)+[1-kC(v_0)]C(z+u) =$$
$$= [kC(z+v_0)+(1-kC(v_0))C(z)][kC(u+v_0)+(1-kC(v_0))C(u)],$$
$$-kC(z+u+v_0)+[1+kC(v_0)]C(z+u) =$$
$$= [-kC(z+v_0)+(1+kC(v_0))C(z)][-kC(u+v_0)+(1+kC(v_0))C(u)],$$

azaz két (2. 26) alakú CAUCHY-egyenletet nyertünk, tehát

$$kC(z+v_0)+[1-kC(v_0)]C(z) = g_1(z),$$
$$-kC(z+v_0)+[1+kC(v_0)]C(z) = g_2(z),$$

s a $g_1(z)$, $g_2(z)$ függvények — értelmezésük folytán — *csak* Q-beli értékeket vesznek fel. Látható továbbá, hogy (9. 5) miatt $\Delta(g_1, g_2) \not\equiv 0$ is fennáll. Helyettesítsük most a kapott

$$C(z) = \tfrac{1}{2}[g_1(z)+g_2(z)]$$

megoldást a (9. 1)-ből következő $C(2z)+1 = 2C(z)^2$ egyenletbe, akkor

$$\tfrac{1}{2}[g_1(z)^2+g_2(z)^2]+1 = \tfrac{1}{2}[g_1(z)^2+2g_1(z)g_2(z)+g_2(z)^2],$$
$$g_1(z)g_2(z) = 1.$$

Innen látható, hogy $Q_0(+)$ csoporttulajdonsága és a $C(z) \not\equiv 0$ feltevés $g_1(z)g_2(z) \neq 0$ fennállását minden $z \in Q_0(+)$-ra már eleve biztosította, ezért valóban az (M7. 2) megoldást nyertük.

Ha viszont a (9. 15) egyenlet nem oldható meg Q-ban, akkor bővítve Q-t a k $(k^2 = k_1)$ elemmel oly módon, hogy a bővített Q' halmaz továbbra is testet alkosson, az előző gondolatmenet továbbra is érvényes, csupán a $g_1(z)$ függvény, értelmezése folytán, értékeit Q'-ből veszi azzal a megszorítással, hogy

$$C(z) = \tfrac{1}{2}[g_1(z)+g_1(z)^{-1}]:\ Q_0(+) \to Q$$

minden $z \in Q_0(+)$-ra igaz. Mivel (9. 15)-ben $C(v_0)$ a kizárt $C(v_0)^2 \neq 1$ esettől eltekintve *bármely* Q-beli értéket felvehet, ezért (9. 1) *összes* megoldása csak akkor adható meg (2. 26) típusú CAUCHY-egyenletet kielégítő $g(z)$ függvények segítségével, ha Q-t az *összes* olyan x elemmel bővítjük, mely megoldása az $x^2(a^2-1)=1$ $(a \in Q;\ a^2 \neq 1)$ egyenletnek.

A felsorolt függvények valóban megoldások, így a tétel bizonyítását befejeztük.

9. 2. A most bizonyított tétel alapján már könnyen belátható a következő is:

9. 2. TÉTEL. *Legyen $C(z)\not\equiv 0$ és $C(z)^2\not\equiv 1$, s elégítse ki a* (9. 1) *egyenletet. Ha létezik olyan $v_0\in Q_0(+)$ elem $C(z)$ értelmezési tartományában, melyre a*

$$\Delta[C(z_1+v_0),\, C(z_2)]\not\equiv 0 \tag{9. 5}$$

feltétel teljesül, továbbá van olyan $k\in Q$, mellyel

$$k^2[C(v_0)^2-1]=1 \qquad (k\in Q) \tag{9. 16}$$

fennáll, akkor és csak akkor (9. 1) *megoldásai*

$$\begin{gathered} C(z)=\tfrac{1}{2}[g(z)+g(z)^{-1}] \\ g(z_1+z_2)=g(z_1)g(z_2)\neq 0 \\ [z\in Q_0(+);\ g(z)\colon Q_0(+)\to Q] \end{gathered} \tag{9. 17}$$

alakúak, ahol tehát a $g(z)$ függvény is csak Q-beli értékeket vesz fel.

BIZONYÍTÁS. A (9. 5) és (9. 16) feltételek elégséges volta a megelőző tétel bizonyításából nyilvánvaló. A feltételek szükségességének belátására elég azt kimutatnunk, hogy bármely (9. 17) megoldás esetén *van olyan $v_0\in Q_0(+)$, mellyel* (9. 5) és (9. 16) *egyidejűleg fennáll.* Sőt több is igaz, *minden olyan $v_0\in Q_0(+)$, melyre $C(v_0)^2\neq 1$, a mondott tulajdonságú.*

Egyrészt, ha $C(z)^2\not\equiv 1$ és (9. 17) alakú, akkor $g(z)^2\not\equiv 1$ is fennáll. Ugyanis $g(z)^2\equiv 1$-ből

$$C(z)^2=\left[\frac{g(z)+g(z)^{-1}}{2}\right]^2=\frac{[g(z)^2+1]^2}{4g(z)^2}$$

miatt $C(z)^2\equiv 1$ következne; nyilván ugyanígy $C(v_0)^2\neq 1$ esetben $g(v_0)^2\neq 1$ is következik. Másrészt $g(z)^2\not\equiv a$ (konst.), mivel ellenkező esetben $g(z_1+z_2)^2=$ $=g(z_1)^2g(z_2)^2\neq 0$ miatt $a=a^2$, azaz $a=g(z)^2\equiv 1$ adódna.

Kiszámítjuk a (9. 5)-ben szereplő determináns értékét, így

$$\Delta[C(z_1+v_0),\, C(z_2)]=\frac{1}{4}\,\Delta[g(z_1)g(v_0)+g(z_1)^{-1}g(v_0)^{-1},\, g(z_2)+g(z_2)^{-1}]=$$

$$=\frac{1}{4}[g(v_0)-g(v_0)^{-1}]\Delta[g(z_1),\, g(z_2)^{-1}]=\frac{g(v_0)^2-1}{4g(v_0)}\,\frac{g(z_1)^2-g(z_2)^2}{g(z_1)g(z_2)}\not\equiv 0$$

a kizárt $g(z)^2\not\equiv a$ miatt valóban igaz minden olyan $v_0\in Q_0(+)$-ra, mely esetén $g(v_0)^2\neq 1$, azaz $C(v_0)^2\neq 1$ áll. Tehát (9. 5) szükségképpen teljesül.

Végül (9. 16) abból következik, hogy (9. 17) esetén *minden* $C(v_0)^2-1\neq 0$ Q-ban teljes négyzet:

$$C(v_0)^2-1=\frac{1}{4}[g(v_0)+g(v_0)^{-1}]^2-1=\left[\frac{g(v_0)^2-1}{2g(v_0)}\right]^2\neq 0.$$

Ezzel mindent bizonyítottunk.

10. §. A D'Alembert—Poisson-féle függvényegyenlet általánosításának megoldhatósága

A (9a) egyenlet általánosításaival kapcsolatosan W. H. WILSON [80], VAN DER LYN [44], D. V. IONESCU [32] és I. FENYŐ [22], [23] munkáit említjük, R. SATO [57] pedig a (C) típusú egyenleteket vizsgálja (de megoldást nem ad). Ide sorolható még a [68] dolgozat is.

10. 1. A (9. 1) függvényegyenlet egyik általánosítása az

$$F(z+t)+G(z-t) = \sum_{k=1}^{n} F_k(z)G_k(t) \tag{10. 1}$$

$[z, t, z+t, z-t \in Q_0(+);\ F(z), G(z), F_k(z), G_k(z)\colon\ Q_0(+)\to Q;\ k=1,2,\dots,n]$

egyenlet; $Q_0(+)$ *itt is tetszőleges (additív módon írt)* ABEL-*csoportot jelent.* Feltesszük, hogy (10. 1)-ben legalább egy ismeretlen függvény is szerepel. Célunk megmutatni, hogy (10. 1) mindig visszavezethető (8. 1) típusú egyenletek megoldására, így (10. 1) típusú egyenletek megoldását is a determinánsos módszerrel megadhatjuk. Érvényes a

10. 1. TÉTEL. *A* $Q_0(+)$ ABEL-*csoporton értelmezett* (10. 1) *függvényegyenlet visszavezethető az*

$$\left\{\begin{aligned} A(z+t)+A(z-t) &= 2\sum_{k=1}^{n} P_k(z)R_k(t),\\ B(z+t)-B(z-t) &= 2\sum_{k=1}^{n} Q_k(z)S_k(t),\\ C(z+t)-C(z-t) &= 2\sum_{k=1}^{n} P_k(z)S_k(t),\\ D(z+t)+D(z-t) &= 2\sum_{k=1}^{n} R_k(z)Q_k(t)\end{aligned}\right. \tag{10. 1'}$$

függvényegyenlet-rendszerre, ahol az $A(z)$, $B(z)$, $P_k(z)$ *és* $R_k(z)$ $(k=1, 2, \dots, n)$ *függvények párosak, a* $C(z)$, $D(z)$, $Q_k(z)$ *és* $S_k(z)$ $(k=1, 2, \dots, n)$ *függvények pedig páratlanok, s e függvények segítségével a* (10. 1)*-ben szereplő függvények a következőképpen állíthatók elő:*

$$F(z)=\tfrac{1}{2}[A(z)+B(z)+C(z)+D(z)],$$

$$G(z)=\tfrac{1}{2}[A(z)-B(z)+C(z)-D(z)],$$

$$F_k(z)=P_k(z)+Q_k(z),\quad G_k(z)=R_k(z)+S_k(z)$$

$$(k=1, 2, \dots, n).$$

BIZONYÍTÁS. Bármely, a $Q_0(+)$ ABEL-csoporton értelmezett $M(z)\,[Q_0(+)\to Q]$ függvény felbontható egy páros és páratlan függvény összegére; ugyanis az

$$M(z)=\tfrac{1}{2}[M(z)+M(-z)]+\tfrac{1}{2}[M(z)-M(-z)]$$

felbontásban az első rész nyilván páros, a második pedig páratlan. Bontsuk fel a (10. 1)-ben szereplő F, G, F_k, G_k $(k=1, 2, \dots, n)$ függvényeket is ily módon:

$$(10.2)\quad \begin{cases} F(z) = P(z)+Q(z), & P(z) = P(-z), & Q(z) = -Q(-z), \\ G(z) = R(z)+S(z), & R(z) = R(-z), & S(z) = -S(-z); \\ F_k(z) = P_k(z)+Q_k(z), & P_k(z) = P_k(-z), & Q_k(z) = -Q_k(-z), \\ G_k(z) = R_k(z)+S_k(z), & R_k(z) = R_k(-z), & S_k(z) = -S_k(-z), \\ & (k=1,2,\dots,n). & \end{cases}$$

Írjuk most fel (10. 1) és (10. 2) alapján az

$$(10.1\text{a})\quad P(z+t)+Q(z+t)+R(z-t)+S(z-t) = \sum_{k=1}^{n} [P_k(z)+Q_k(z)][R_k(t)+S_k(t)],$$

$$(10.3)\quad F(z-t)+G(z+t) = \sum_{k=1}^{n} F_k(z)G_k(-t),$$

$$(10.3\text{a})\quad P(z-t)+Q(z-t)+R(z+t)+S(z+t) = \sum_{k=1}^{n} [P_k(z)+Q_k(z)][R_k(t)-S_k(t)]$$

$$(10.4)\quad F(-z+t)+G(-z-t) = \sum_{k=1}^{n} F_k(-z)G_k(t),$$

$$(10.4\text{a})\quad P(z-t)-Q(z-t)+R(z+t)-S(z+t) = \sum_{k=1}^{n} [P_k(z)-Q_k(z)][R_k(t)+S_k(t)],$$

$$(10.5)\quad F(-z-t)+G(-z+t) = \sum_{k=1}^{n} F_k(-z)G_k(-t),$$

$$(10.5\text{a})\quad P(z+t)-Q(z+t)+R(z-t)-S(z-t) = \sum_{k=1}^{n} [P_k(z)-Q_k(z)][R_k(t)-S_k(t)]$$

egyenleteket. Végezzük el továbbá a „(10. 1a)+(10. 3a)+(10. 4a)+(10. 5a)” összevonásokat:

$$2P(z+t)+2P(z-t)+2R(z+t)+2R(z-t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \{[P_k(z)+Q_k(z)][R_k(t)+S_k(t)]+[P_k(z)+Q_k(z)][R_k(t)-S_k(t)]+$$

$$+[P_k(z)-Q_k(z)][R_k(t)+S_k(t)]+[P_k(z)-Q_k(z)][R_k(t)-S_k(t)]\} = 4\sum_{k=1}^{n} P_k(z)R_k(t),$$

azaz bevezetve az

$$(10.6)\quad A(z) \overset{\text{def}}{=} P(z)+R(z)$$

jelölést az

$$(10.7)\quad A(z+t)+A(z-t) = 2\sum_{k=1}^{n} P_k(z)R_k(t)$$

egyenletet nyerjük, ahol $A(z)$ értelmezéséből kifolyólag *páros* függvény.

Hasonlóan nyerjük „(10. 1a) – (10. 3a) – (10. 4a) + (10. 5a)" összevonásokkal a

$$2P(z+t)-2P(z-t)+2R(z-t)-2R(z+t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{[P_k(z)+Q_k(z)][R_k(t)+S_k(t)]-[P_k(z)+Q_k(z)][R_k(t)-S_k(t)]-$$

$$-[P_k(z)-Q_k(z)][R_k(t)+S_k(t)]+[P_k(z)-Q_k(z)][R_k(t)-S_k(t)]\}=4\sum_{k=1}^{n}Q_k(z)S_k(t)$$

egyenletet, azaz a

$$B(z)\overset{\text{def}}{=}P(z)-R(z) \tag{10. 8}$$

jelöléssel

$$B(z+t)-B(z-t)=2\sum_{k=1}^{n}Q_k(z)S_k(t) \tag{10. 9}$$

írható, ahol $B(z)$ nyilván *páros* függvény.

Ugyanígy kapjuk a „(10. 1a) – (10. 3a) + (10. 4a) – (10. 5a)" összevonások útján a

$$2Q(z+t)-2Q(z-t)+2S(z-t)-2S(z+t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{[P_k(z)+Q_k(z)][R_k(t)+S_k(t)]-[P_k(z)+Q_k(z)][R_k(t)-S_k(t)]+$$

$$+[P_k(z)-Q_k(z)][R_k(t)+S_k(t)]-[P_k(z)-Q_k(z)][R_k(t)-S_k(t)]\}=4\sum_{k=1}^{n}P_k(z)S_k(t)$$

egyenletet, tehát

$$C(z)\overset{\text{def}}{=}Q(z)-S(z) \tag{10. 10}$$

$$C(z+t)-C(z-t)=2\sum_{k=1}^{n}P_k(z)S_k(t) \tag{10. 11}$$

adódik, ahol $C(z)$ *páratlan* függvény.

Végül a „(10. 1a) + (10. 3a) – (10. 4a) – (10. 5a)" összevonások alapján

$$2Q(z+t)+2S(z+t)+2Q(z-t)+2S(z-t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{[P_k(z)+Q_k(z)][R_k(t)+S_k(t)]+[P_k(z)+Q_k(z)][R_k(t)-S_k(t)]-$$

$$-[P_k(z)-Q_k(z)][R_k(t)+S_k(t)]-[P_k(z)-Q_k(z)][R_k(t)-S_k(t)]\}=4\sum_{k=1}^{n}R_k(z)Q_k(t)$$

adódik, melyet a

$$D(z)\overset{\text{def}}{=}Q(z)+S(z) \tag{10. 12}$$

jelöléssel a

$$D(z+t)+D(z-t)=2\sum_{k=1}^{n}R_k(z)Q_k(t) \tag{10. 13}$$

alakba írhatunk, ahol $D(z)$ *páratlan* függvény.

Könnyen látható továbbá, hogy a (10. 7), (10. 9), (10. 11) és (10. 13) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása után (10. 2), (10. 6), (10. 8), (10. 10) és (10. 12) alapján

$$F(z)=\tfrac{1}{2}[A(z)+B(z)+C(z)+D(z)],$$

$$G(z)=\tfrac{1}{2}[A(z)-B(z)+C(z)-D(z)].$$

Végül (10. 2)-ből az $F_k(z)$, $G_k(z)$ függvények is adottak. Ezzel a tételt igazoltuk.

10. 2. A 10. 1. tételből közvetlenül adódik a

10. 1. KOROLLÁRIUM. *A* (10. 1′) *alatti egyenletrendszerből a*

$$\left\{\begin{aligned} C(z+t) &= \sum_{k=1}^{n}[P_k(z)S_k(t)+P_k(t)S_k(z)],\\ D(z+t) &= \sum_{k=1}^{n}[R_k(z)Q_k(t)+R_k(t)Q_k(z)]\end{aligned}\right. \tag{10. 14}$$

egyenletek következnek.

BIZONYÍTÁS. Cseréljük fel ugyanis a (10. 1′) utolsó két egyenletében a z és t változókat, majd adjuk össze a kapott egyenleteket. Mivel a $C(z)$ és $D(z)$ függvények páratlanok, ezért valóban a (10. 14) egyenletekhez jutunk. Ezek már ténylegesen (8. 1) típusúak.

A $P_k(z)$, $Q_k(z)$, $R_k(z)$, $S_k(z)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ függvények ismeretében egyrészt az $F_k(z)$ és $G_k(z)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ függvények, másrészt a (10. 1′)-ben szereplő $A(z)$ és $B(z)$ függvények is meghatározhatók, így az $F(z)$ és $G(z)$ is ismertnek tekinthető.

Megjegyezni kívánjuk, hogy a (10. 14) egyenletek megoldását *lényegesen* könnyíti az a tény, hogy a bennük szereplő függvények mindegyike páros, ill. páratlan. Részleteiben a megoldással itt nem kívánunk foglalkozni.

(Beérkezett: 1966. VI. 19)

EINE ALLGEMEINE METHODE ZUR LÖSUNG EINIGER KLASSEN VON FUNKTIONALGLEICHUNGEN, I—II—III.

Von

E. VINCZE

Die aus drei Teilen bestehende Arbeit skizziert eine allgemeine Lösungsmethode für Funktionalgleichungen von Typen

$$F(x+y)=\sum_{i=1}^{n}G_i(x)\,H_i(y), \tag{A}$$

$$F(x+y)+(x-y)=\sum_{i=1}^{n}H_i(x)K_i(y), \tag{B}$$

$$F(x+y)=\sum_{i=1}^{n}G_i(x)\,H_i(y)\Big/\sum_{j=1}^{m}K_j(x)L_j(y) \tag{C}$$

auf. Man kann aber diese sogennante *Determinantenmethode* auch für solche Funktionalgleichungssysteme anwenden, die die oben genannten Gleichungen (A), (B), (C) bilden.

Im Kapitel 1 wurde darauf hingewiesen, dass diese (vom gewissen Gesichtspunkte aus elementare) Methode auch im Falle angewendet werden kann, als es für den Definitionsbereich nur Halbgruppen- (eventuell Gruppen-) Eigenschaften bzw. für die Funktionswerte nur Körpereigenschaften vorausgesetzt werden. Im Kapitel 2 wurde eine allgemeinere Definition der linearen Abhängigkeit von Funktionen und einige daraus folgende Eigenschaften angegeben. Ebenda ist auch die *Pexider*sche Funktionalgleichung

$$F(z_1 * z_2) = G(z_1)\, H(z_2) \tag{2. 22}$$

$$[z_1, z_2, z_1 * z_2 \in Q_0(*);\; F(z),\, G(z),\, H(z): Q_0 \to Q'(\cdot)]$$

gelöst (Satz 2. 4.), wobei $Q_0(*)$ eine beliebige kommutative Halbgruppe ist, bzw. $Q'(\cdot)$ die auch mit Nullelement „erweiterte" multiplikative Gruppe eines Körpers Q (der Charakteristik 0) bezeichnet.

Im Kapitel 3 sind die Funktionalgleichungen (3. 1) und (3. 23) gelöst (vgl. Sätze 3. 1. und 3. 2.), die je eine Verallgemeinerung von (2. 22) sind. Im Kapitel 4 sind die sogenannte Sinusgleichung (4. 1) und die Cosinusgleichung (4. 12) voneinander unabhängig im quadratischen Körper Q^2 behandelt (vgl. Sätze 4. 1. und 4. 2.). Ebenda wurde auch eine gemeinsame Verallgemeinerung von vorigen Gleichungen (4. 1) und (4. 12) gelöst (vgl. Satz 4. 3.). Im Kapitel 5 sind Funktionalgleichungen mit Funktionen der „bekannten" Eigenschaften untersucht (vgl. Sätze 5. 1—5. 7.).

Im Kapitel 6 ist die Äquivalenz der Funktionalgleichungen (6. 1) und (2. 23) bewiesen, wobei n eine natürliche Zahl bezeichnet. In den Kapiteln 7 und 8 sind Funktionalgleichungssysteme bzw. die allgemeine Gleichung (A) untersucht. Schliesslich wurde die Determinantenmethode in den Kapiteln 9 und 10 auch für die Gleichungen (B) angewendet (vgl. Sätze 9. 1. und 10. 1.), inzwischen auch ein bisher ungelöstes Problem von *S. Kurepa* bezüglich der Gleichung (9. 1) gelöst ist (vgl. Satz 9. 2.). Wir betonen, dass die Lösungen der sämtlichen hier vorkommenden Funktionalgleichungen auf die (früher schon gelösten) *Cauchy*schen Gleichungen zurückgeführt wurden. Das ganze Literaturverzeichnis wurde zum ersten Teile beigefügt.