GYŰRŰK JACOBSON-FÉLE RADIKÁLJÁRÓL

Ott-Heinrich Keller 60. születésnapjára tisztelettel és meleg barátsággal

Írta: KERTÉSZ ANDOR

1. §. Bevezetés

A véges rangú asszociatív algebrák elméletében, amelyet a nem-kommutatív gyűrűelmélet kiindulópontjának tekinthetünk, igen fontos szerepet játszik a radikál fogalma. A radikál az algebra összes nilpotens jobbideáljának az egyesítése, mely olyan egyértelműen meghatározott kétoldali ideál, amelynek nagysága bizonyos értelemben az algebra „irregularitását" méri. Minél kisebb a radikál, annál kevésbé „irreguláris" az algebra. Ha a radikál a lehető legkisebb, vagyis a nullideál, akkor az algebra „reguláris", s szerkezetét jól leírja a WEDDERBURN-féle struktúratétel. Emellett még igaz, hogy a radikál szerinti faktoralgebra radikálja a nullideál.

ARTIN [1] nevéhez fűződik az a felismerés, hogy a véges rangú asszociatív algebrák elméletének jelentős része átvihető olyan gyűrűk esetére, amelyek jobbideáljaikra nézve a minimumkövetelménynek tesznek eleget. Ebben az esetben még a klasszikus radikálfogalom is kielégítő marad. Nem felel meg azonban a célnak ez a radikálfogalom, ha tetszőleges asszociatív gyűrűket tekintünk. Éppen ezért természetes, hogy többen kísérletet tettek a radikálfogalom általánosítására. A feladat megoldása nem egyértelmű. Az irodalomban ma már számos radikálfogalom szerepel, amelyek mindegyike egybeesik a klasszikus radikállal, ha a gyűrű a minimumkövetelménynek tesz eleget.

A különböző radikálok közül talán a JACOBSON-féle radikál bizonyult a leghasznosabbnak a gyűrűelméletben. E dolgozat célja, hogy a nem kifejezetten algebraérdeklődésű olvasó számára is közel hozzuk a gyűrűelmélet e fontos fogalomalkotását, és röviden összefoglaljuk a JACOBSON-féle radikálra vonatkozó legfontosabb ismereteket. A dolgozat főforrása természetesen JACOBSON [4] dolgozata és [5] könyve. Bár a dolgozat összefoglaló jellegű, néhány új megállapítást is tartalmaz. A radikálnak a 12. tételben adott jellemzései közül új az (f) és (g) jellemzés (ezek közül az (f) korábban idegen nyelven publikálva, lásd [7]), továbbá új a féligegyszerű gyűrűket jellemző 15. tétel.

Végül megjegyezzük, hogy a következőkben *radikálon mindig a* JACOBSON-*féle radikált fogjuk érteni.*

2. §. Előkészítés

Ebben a paragrafusban előrebocsátjuk a későbbiek során használt alapfogalmakat és jelöléseket.

Gyűrűn mindig *asszociatív* gyűrűt értünk. Ha azt mondjuk, hogy G R-modulus, az azt jelenti, hogy a G additív csoport az R gyűrűvel mint *jobb oldali* operátortartománnyal van ellátva. A csoport, operátormodulus és gyűrű fogalmára vonatkozó alapvető fontosságú elemi tényeket ismertnek tételezzük fel. (Erre vonatkozólag lásd pl. RÉDEI [8].)

Ha R egységelemes gyűrű ($1 \in R$) és G olyan R-modulus, hogy G bármely g elemére fennáll a

$$g \cdot 1 = g$$

egyenlőség, akkor a G operátormodulust (BOURBAKI [3] szerint) *unitér R-modulusnak* nevezzük.

Ha G olyan R-modulus, amely egyetlen, mondjuk g elemmel van generálva, akkor *ciklikus R-modulusnak* nevezzük. Ekkor G nyilvánvalóan az összes

$$gr + gn \qquad (r \in R)$$

alakú elemekből áll, ahol n racionális egész szám. Ha a G unitér R-modulust a g elem generálja, akkor G-t már a gr ($r \in R$) alakú elemek kimerítik. A ciklikus modulus fogalmának egy finomítását adja a következő definíció: Egy G R-modulust *szigorúan ciklikusnak* hívnak, ha valamely $g \in G$ elemre

$$gR = G.$$

Unitér modulusok esetében „ciklikus" és „szigorúan ciklikus" ugyanazt jelenti.

Legyen H a G R-modulus valamely részmodulusa és Q a G tetszőleges részhalmaza. A $(H: Q)$ hányadoson az R összes olyan r elemének halmazát értjük, amelyekre $Qr \subseteq H$, azaz

$$(H: Q) \overset{\text{def}}{=} \{r \mid r \in R;\ q \in R;\ qr \in H \quad \text{minden} \quad q \in Q\text{-ra}\}.$$

$(H: Q)$ az R gyűrű egy jól meghatározott jobbideálja. A $(0: G) = 0$ esetben azt mondjuk, hogy *G hű* R-modulus. Ha $(0: G) = R$, azaz, ha minden $g(\in G)$ és $r(\in R)$ elemre $gr = 0$, akkor G-t *triviális* R-modulusnak hívjuk.

Ha a G R-modulusnak pontosan két különböző részmodulusa van, akkor *egyszerű* R-modulusnak nevezzük. Ha a G egyszerű R-modulus valamely g elemére $gR \neq 0$, akkor $gR = G$, s G minden nulltól különböző eleme ugyanilyen tulajdonságú. Az ilyen modulust *irreducibilis* modulusnak nevezzük.

Ha B az R gyűrű jobbideálja, akkor B R-modulusnak tekinthető, amennyiben az R operátortartomány elemeivel való szorzást az R gyűrűben értelmezett szorzásként definiáljuk. Ha a B jobbideált ebben az értelemben tekintjük R-modulusnak, akkor jelölésére a B_R jelet használjuk. Speciálisan R_R azt jelenti, hogy az R gyűrűt jobb oldali R-modulusnak tekintjük. Operátorizomorfizmus jelölésére — ha az operátortartomány R — az $\cong_R$ jel szolgál.

Egy R gyűrű valamely A részhalmaza által generált ideálját (A)-val, jobbideálját $(A)_j$-vel, balideálját $(A)_b$-vel jelöljük. Legyen A és B az R gyűrű két részhalmaza. Az $A + B$ összegen az összes

$$a + b \qquad (a \in A;\ b \in B)$$

alakú elemek halmazát értjük. Az AB szorzat a

$$\sum a_i b_i \qquad (a_i \in A;\ b_i \in B)$$

alakú *véges* összegek összességét jelenti. Ha n természetes szám, az A n-edik hatványán az

$$A^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{A}_{1} \cdot \underbrace{A}_{2} \cdot \ldots \cdot \underbrace{A}_{n}$$

szorzatot értjük.

Ha A és B jobbideál (balideál), ill. ideál R-ben, akkor $A+B$ és AB szintén jobbideál (balideál), ill. ideál R-ben és fennáll

$$A+B=(A, B)_j \quad (=(A, B)_b),$$

ill.

$$A+B=(A, B).$$

Az R gyűrű egy a elemét *nilpotens elemnek* mondjuk, ha valamely m természetes számra $a^m=0$. Hasonlóan egy A jobbideált, balideált, ill. ideált *nilpotensnek* nevezünk, ha valamely m természetes számra $A^m=(0)$. Egy jobbideált, balideált, ill. ideált *nil-jobbideálnak, nil-balideálnak ill. nil-ideálnak* hívunk, ha minden eleme nilpotens. Nyilvánvaló, hogy bármely nilpotens jobbideál (balideál, ideál) nil-jobbideál (nil-balideál, nil-ideál), de ennek az állításnak a megfordítottja általában nem igaz.

Azt mondjuk, hogy az R gyűrű az S_ν $(\nu \in \Gamma)$ gyűrűk *szubdirekt összege*, ha minden $\nu(\in \Gamma)$ indexhez van R-nek egy φ_ν epimorfizmusa S_ν-re, úgy hogy ha r az R-nek 0-tól különböző eleme, akkor legalább egy ν-re $r\varphi_\nu \neq 0$. E definícióból könnyen adódik a következő

LEMMA. *Az R gyűrű akkor és csak akkor szubdirekt összege az S_ν $(\nu \in \Gamma)$ gyűrűknek, ha R-nek minden ν-höz van olyan A_ν ideálja, hogy $R/A_\nu \cong S_\nu$ és*

$$\bigcap_{\nu \in \Gamma} A_\nu = (0).$$

Egy R gyűrűt *Artin-gyűrűnek* nevezünk, ha jobbideáljaira nézve minimumkövetelménynek tesz eleget, azaz ha R jobbideáljainak bármely nemüres rendszerében van minimális elem. E definícióból könnyen adódik, hogy R akkor és csak akkor Artin-gyűrű, ha jobbideáljainak bármely csökkenő lánca

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$$

véges, azaz tagjai egy bizonyos m indextől kezdve megegyeznek: $B_m = B_{m+1} = \ldots$.

Megállapodunk még abban, hogy ha valamely modulus faktormodulusáról, vagy gyűrű faktorgyűrűjéről van szó és x a tekintett modulus vagy gyűrű eleme, akkor $\bar{x}$-sal jelöljük a tekintett faktorstruktúrának azt az elemét, amely mint mellékosztály az x elemet tartalmazza.

3. §. Primitív ideálok és gyűrűk

Az R gyűrű valamely A ideálját *primitív ideálnak* nevezik, ha van olyan G irreducibilis R-modulus, hogy $A=(0: G)$. Ha létezik hű irreducibilis R-modulus, akkor az R gyűrűt *primitív gyűrűnek* hívják. E definícióból következik, hogy egy R gyűrű akkor és csak akkor primitív, ha (0) az R primitív ideálja.

(A fentiekben tulajdonképpen „jobb primitív" gyűrűket és ideálokat definiáltunk, minthogy az alapul vett modulusok jobbmodulusok. Ha balmodulusokat tekintünk, akkor a „balprimitív" gyűrűk és ideálok fogalmához jutunk. Azt a kérdést, hogy e fogalmak különbözőek-e, BERGMAN [2] döntötte el, olyan jobbprimitív gyűrűt konstruálva, amely nem balprimitív.)

A primitív gyűrűk és ideálok kapcsolatát fejezi ki a következő tétel:

1. TÉTEL. *Az R gyűrű A ideálja akkor és csak akkor primitív, ha az R/A faktorgyűrű primitív.*

Bizonyítás. Legyen A az R primitív ideálja. Ekkor van olyan G irreducibilis R-modulus, hogy $(0:G)=A$. A G modulust R/A-modulussá, mégpedig egyszerű R/A modulussá tesszük azáltal, hogy G tetszőleges g és R/A tetszőleges $\bar{r}=r+A$ $(r\in R)$ elemére a $g\bar{r}$ szorzatot

$$g\bar{r}\stackrel{\text{def}}{=}gr$$

által definiáljuk. Ez a definíció megengedett, mert $\bar{r}=\bar{s}$-ból $r-s\in A$, tehát $g(r-s)=0$, azaz $gr=gs$ következik. Még meg kell jegyeznünk, hogy G mint R/A-modulus hű: ha ugyanis $G\bar{r}=0$, azaz $Gr=0$, akkor $r\in A$, azaz $\bar{r}=\bar{0}$.

Legyen most megfordítva R/A primitív gyűrű. Ekkor létezik egy G hű irreducibilis R/A modulus. A

$$gr\stackrel{\text{def}}{=}g\bar{r}\qquad(g\in G;\ r\in R)$$

definíció által G R-modulussá válik, amely nyilvánvalóan irreducibilis R-modulus. Tegyük fel, hogy $Gr=0$, azaz $G\bar{r}=0$. Ebből következik, hogy $\bar{r}=\bar{0}$, azaz $r\in A$. Másrészt világos, hogy minden $r\in A$ elemre fennáll $Gr=0$. Tehát $(0:G)=A$, azaz A az R gyűrű primitív ideálja.

Megjegyzendő, hogy nem minden R gyűrűhöz van irreducibilis R-modulus. Pl. ha R zérógyűrű, akkor abból, hogy $R^2=(0)$ és $GR=G$,

$$0=GR^2=(GR)R=GR=G$$

következik. Zérógyűrűnek tehát nincs primitív ideálja.

Abból a célból, hogy egy R gyűrű primitív ideáljait „belsőleg", tehát R-modulusoktól függetlenül jellemezhessük, bevezetjük a következő fogalmat:

Egy R gyűrű valamely B jobbideálját *modulárisnak* nevezzük, ha R-nek van mod B balegységeleme, azaz ha van R-ben olyan e elem, hogy minden R-beli x elemre

$$x-ex\in B$$

teljesül. Hasonlóképpen az R valamely L balideálját modulárisnak hívjuk, ha R-nek van mod L jobbegységeleme. Ha R egy A ideálja egyidejűleg moduláris jobbideál és moduláris balideál, akkor A *moduláris ideál.* Más szavakkal, az A ideál akkor és csak akkor moduláris, ha az R/A faktorgyűrű egységelemes gyűrű. Ha R-nek van balegységeleme, ill. jobbegységeleme, akkor R minden jobbideálja, ill. balideálja moduláris. Az R gyűrű egy olyan maximális jobbideálját, amely moduláris jobbideál, *moduláris maximális jobbideálnak* nevezzük.

2. TÉTEL. *Ha az R gyűrű az A és B moduláris jobbideálok összege, akkor $A\cap B$ szintén moduláris.*

Bizonyítás. Legyen e mod A és f mod B balegységelem. Ekkor

$$e = a_1 + b_1$$

és

$$f = a_2 + b_2$$

alkalmas $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ elemekkel. Megmutatjuk, hogy

$$e_0 = a_2 + b_1$$

mod $A \cap B$ balegységelem. Minden $r(\in R)$ esetén definiáljuk az

$$r^* \overset{\text{def}}{=} (e - b_1)r - a_2 r$$

elemet. Ez az r^* elem $e - b_1 = a_1$ miatt A-ban van. Az r^* elem a következő alakban is írható:

$$r^* = r - (a_2 + b_1)r - (r - er).$$

Minthogy $r^* \in A$ és $r - er \in A$, következik, hogy

$$r - (a_2 + b_1)r \in A.$$

Másrészt, definiáljuk az

$$r^{**} \overset{\text{def}}{=} (f - a_2)r - b_1 r$$

elemet. Ekkor hasonlóan következik, hogy

$$r - (a_2 + b_1)r \in B,$$

tehát $a_2 + b_1$ valóban mod $A \cap B$ balegységelem, q. e. d.

1. KÖVETKEZMÉNY. *Ha az R gyűrű az A és B moduláris jobbideálok direkt összege, akkor R-nek van balegységeleme.*

Bizonyítás. A 2. tétel szerint $A \cap B = (0)$ moduláris jobbideál, tehát az R-nek van mod (0) balegységeleme, amely nyilvánvalóan balegységelem.

2. KÖVETKEZMÉNY. *Legyen A moduláris jobbideál, M moduláris maximális jobbideál az R gyűrűben. Ekkor az $A \cap M$ szintén moduláris jobbideál.*

Bizonyítás. Ha A benne van M-ben, akkor az állítás nyilvánvaló. Legyen most $A \nsubseteq M$. Ekkor $A + M = R$ és a 2. tétel alapján az $A \cap M$ moduláris, q. e. d.

3. KÖVETKEZMÉNY. *Az R gyűrű véges sok moduláris maximális jobbideáljának a metszete szintén moduláris.*

Bizonyítás. Legyen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ az R gyűrű moduláris jobbideálja. Az állítás bizonyítását n szerinti teljes indukcióval végezzük. Az $n = 1$ esetben az állítás igaz. Tegyük fel, hogy $n - 1$-re is igaz ($n > 1$). Következésképp

$$M' = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_{n-1}$$

moduláris. Minthogy

$$M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n = M' \cap M_n,$$

állításunk azonnal adódik a 2. következményből.

Érdemes e helyen megemlíteni a következő nyitott kérdést:
Két moduláris jobbideál metszete vajon mindig moduláris-e?

Egy R gyűrű moduláris jobbideáljai és a szigorúan ciklikus R-modulusok közötti kapcsolatot fejezi ki a következő tétel:

3. TÉTEL. *Legyen R tetszőleges gyűrű. Ha G szigorúan ciklikus R-modulus: $G=gR$, akkor*

$$G\cong_R R/(0:g),$$

ahol $(0:g)$ moduláris jobbideál R-ben. Ha megfordítva B az R gyűrű moduláris jobbideálja, akkor van olyan $G=gR$ szigorúan ciklikus R-modulus, hogy

$$B=(0:g).$$

Bizonyítás. Legyen először $G=gR$. Ekkor az

$$r\to gr \qquad (r\in R)$$

leképezés az R_R R-modulusnak G-re való R-homomorfizmusa. E homomorfizmus magja a $B=(0:g)$ jobbideál. A homomorfizmustétel szerint

$$G\cong_R R/(0:g).$$

Minthogy g maga is G-beli elem, R-nek van olyan e eleme, amelyre

$$g=ge.$$

Ekkor minden R-beli r elemmel

$$gr=ger,$$

azaz

$$g(r-er)=0.$$

Következésképp $r-er\in B$, tehát B moduláris jobbideál.

Megfordítva, legyen B az R gyűrű moduláris jobbideálja. Ekkor R-nek van mod B balegységeleme, mondjuk e, azaz minden $r(\in R)$ elemre

$$r-er\in B. \tag{1}$$

Az R/B faktormodulus szigorúan ciklikus, minthogy (1) miatt

$$\bar r-\bar e r=\bar 0,$$

azaz

$$\bar r=\bar e r$$

minden $r(\in R)$-re. Tehát $R/B=\bar e R$. Minthogy továbbá — ugyancsak (1) miatt — $r\in B$ akkor és csak akkor teljesül, ha $er\in B$, következik

$$(0:\bar e)=B,$$

s ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Ezek után már megfogalmazhatjuk és bebizonyíthatjuk a primitív ideálok „belső" jellemzésére vonatkozó tételt:

4. TÉTEL. *Az R gyűrű A ideálja akkor és csak akkor primitív, ha R-nek van olyan M moduláris maximális jobbideálja, amelyre*

$$A=(M:R).$$

Bizonyítás. Legyen A az R primitív ideálja. Ekkor van olyan G irreducibilis R-modulus, amelyre $A=(0: G)$. Ha g a G modulus tetszőleges 0-tól különböző eleme, akkor $G=gR$, tehát a 3. tétel szerint

$$G \cong_R R/(0: g), \tag{2}$$

ahol az $M \overset{\mathrm{def}}{=} (0: g)$ jobbideál moduláris és a G modulus *egyszerű* volta miatt maximális. Megmutatjuk, hogy $A=(M: R)$. Nyilván fennáll $(0: G) \subseteq (0: g)$, azaz $A \subseteq M$ és így $RA \subseteq M$. Tehát $A \subseteq (M: R)$. Ha másfelől $x \in (M: R)$, akkor $(R/M)x=\bar{0}$. Ezért (2) alapján $Gx=0$, azaz $x \in A$. Tehát $(M: R) \subseteq A$ is teljesül.

Megfordítva, tegyük fel, hogy M moduláris maximális jobbideál R-ben és $A=(M: R)$. Ez azt jelenti, hogy R/M irreducibilis R-modulus és $A=(\bar{0}: R/M)$. Ebből következik, hogy A primitív ideál.

A most bebizonyított tétel közvetlen következménye az alábbi állítás:

Egy R gyűrű akkor és csak akkor primitív, ha van olyan M moduláris maximális jobbideálja, hogy $(M: R)=(0)$.

Most néhány példát adunk meg primitív gyűrűkre. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy minden ferdetest primitív. Ha ugyanis K ferdetest, akkor K-nak egyetlen maximális jobbideálja van, ez a (0) ideál, amely egyben moduláris is és fennáll $(0: K)=(0)$. A ferdetestek azonban még távolról sem merítik ki a primitív gyűrűk osztályát. Annyi azonban igaz, hogy *kommutatív primitív gyűrű szükségképpen test.* Legyen ugyanis R kommutatív primitív gyűrű. Ekkor van R-nek olyan M moduláris maximális jobbideálja, hogy $(M: R)=(0)$. Minthogy M ebben az esetben ideál, fennáll $RM \subseteq M$, azaz $M \subseteq (M: R)=(0)$. Következésképp $M=(0)$. Ezzel megmutattuk, hogy R egyszerű gyűrű. Minthogy a nullideál moduláris, R-nek van egységeleme. Jól ismert tétel szerint bármely egységelemes kommutatív egyszerű gyűrű test, így az R gyűrű test.

A következő példa azt mutatja, hogy egy primitív gyűrű nem szükségképpen ferdetest. Legyen K ferdetest, V egy K feletti vektortér és $\mathcal{T}(V)$ a V tér összes lineáris transzformációinak gyűrűje. Könnyű belátni, hogy V mint (jobb oldali) $\mathcal{T}(V)$-modulus egyszerű és hű. Tehát a $\mathcal{T}(V)$ gyűrű primitív. Ha azonban V-nek legalább két lineárisan független eleme van, akkor $\mathcal{T}(V)$ nem lehet ferdetest, mert akkor van nullosztója.

Bizonyítás nélkül megemlítjük, hogy ha R primitív gyűrű és n természetes szám, akkor az R elemeiből felépített $n \times n$ típusú mátrixok gyűrűje szintén primitív. Speciálisan, ferdetest feletti teljes mátrixgyűrű mindig primitív.

4. §. A radikál

Legyen R tetszőleges gyűrű és $\mathscr{C}(R)$ az összes egyszerű R-modulus osztálya. Minthogy bármely prímszámrendű Abel-csoport triviális R-modulusként tekintve nyilvánvalóan egyszerű R-modulus, a $\mathscr{C}(R)$ osztály egyetlen R gyűrű esetén sem üres. Könnyű belátni, hogy az

$$\{r \mid r \in R;\ Gr=0 \quad \text{minden} \quad G \in \mathscr{C}(R)\text{-re}\}$$

halmaz R-nek kétoldali ideálja. Ezt az ideált az R gyűrű *radikáljának* nevezik.

Adott R gyűrű esetén az R radikálját $\mathfrak{R}(R)$-rel fogjuk jelölni. A definíció alapján világos, hogy

$$\mathfrak{R}(R) = \bigcap_{G \in \mathscr{C}(R)} (0:G).$$

$\mathfrak{R}(R)$-re vonatkozólag két határeset lehetséges: $\mathfrak{R}(R)=(0)$ és $\mathfrak{R}(R)=R$. Az első esetben az R gyűrűt *radikálmentesnek* hívjuk, a második esetben azt mondjuk, hogy R *radikálgyűrű*.

A radikálmentes gyűrűk osztályába tartozik valamennyi primitív gyűrű. Ez világos, mert R primitív volta azt jelenti, hogy van olyan $G \in \mathscr{C}(R)$, hogy $(0: G)=(0)$ teljesül. A primitív gyűrűk azonban korántsem merítik ki a radikálmentes gyűrűk osztályát. Például a racionális egész számok $\mathscr{J}$ gyűrűje radikálmentes, de nem primitív. Ez utóbbi világos, mert $\mathscr{J}$ kommutatív, de nem test. Ahhoz, hogy $\mathscr{J}$ radikálmentes, csupán azt kell meggondolnunk, hogy $\mathscr{C}(\mathscr{J})$ az összes p prímszámra tartalmazza a $\mathscr{Z}(p)$ p-rendű ciklikus csoportot, mint unitér $\mathscr{J}$-modulust. Ekkor $\mathfrak{R}(\mathscr{J}) \subseteq \bigcap_p (0: \mathscr{Z}(p)) = \bigcap_p (p) = (0)$.

Felléphet a másik határeset is. Az R gyűrű ugyanis akkor és csak akkor radiálgyűrű, ha bármely egyszerű R-modulus triviális, azaz, ha $\mathscr{C}(R)$ csupa triviális R-modulusból áll. Ez a helyzet pl. akkor, ha R zérógyűrű $(R^2=(0))$. Ha ugyanis valamely G egyszerű R-modulusra $GR=G$ állna fenn, akkor ebből

$$G=GR=(GR)R=GR^2=0$$

adódna, ami nem lehetséges.

A radikál egyik legfontosabb tulajdonságát fejezi ki a következő tétel:

5. TÉTEL. *Bármely R gyűrűre $R/\mathfrak{R}(R)$ radikálmentes gyűrű.*

Bizonyítás. Legyen $G \in \mathscr{C}(R)$. A G R-modulust a

$$g\bar{r} \stackrel{\text{def}}{=} gr \qquad (g \in G;\ r \in R;\ \bar{r}=r+\mathfrak{R}(R)) \tag{3}$$

definícióval egy $R/\mathfrak{R}(R)$-modulussá tesszük. A $g\bar{r}$ elem azért van egyértelműen meghatározva, mert $\mathfrak{R}(R) \subseteq (0: G)$. A (3) definíció alapján világos, hogy G-nek bármely $R/\mathfrak{R}(R)$-részmodulusa egyben R-részmodulus is. Következésképpen G egyszerű $R/\mathfrak{R}(R)$-modulus. Legyen most $G\bar{r}=0$ minden $\mathscr{C}(R)$-beli G-re. Ekkor $r \in \mathfrak{R}(R)$, azaz $\bar{r}=\bar{0}$. Ebből következik, hogy az $R/\mathfrak{R}(R)$ faktorgyűrű radikálmentes.

6. TÉTEL. *Az R gyűrű $\mathfrak{R}(R)$ radikálja tartalmazza az R összes nilpotens jobbideálját.*

Bizonyítás. Legyen A nilpotens jobbideál R-ben és $k>1$ az A nilpotenciafoka, azaz a legkisebb természetes szám, amelyre $A^k=(0)$. Ha minden $G \in \mathscr{C}(R)$-re $GA=0$ teljesül, akkor A a radikál definíciója miatt $\mathfrak{R}(R)$-ben van. Tegyük fel most, hogy valamely G egyszerű R-modulusra $GA=G$. Ekkor $GA^{k-1}=G$, de $GA^k=0$. Ezt figyelembe véve

$$0=GA^k=(GA)A^{k-1}=GA^{k-1}=G$$

adódik, ami nyilvánvalóan ellentmondást jelent. Tehát ez a második eset nem léphet fel, s így $A \subseteq \mathfrak{R}(R)$.

A radikál fontos „belső" jellemzését adja a következő tétel:

7. TÉTEL. *Egy R gyűrű radikálja az R összes primitív ideáljának metszete.*

Ez a tétel tulajdonképpen a radikál definíciójának egyszerű átfogalmazása a primitív ideál fogalmának segítségével. A teljesség kedvéért azonban még szükséges megjegyeznünk, hogy ha R-nek nincs primitív ideálja, akkor az összes primitív ideál metszetén az egész R gyűrűt értjük. Másrészt ebben az esetben bármely egyszerű R-modulus triviális, tehát R radikálgyűrű. Így a tétel állítása akkor is igaz marad, ha R-nek nincs primitív ideálja.

8. TÉTEL. *Egy R gyűrű akkor és csak akkor izomorf primitív gyűrűk szubdirekt összegével, ha radikálmentes.*

Bizonyítás. Legyen először R radikálmentes gyűrű. Ekkor léteznek olyan $A_\nu(\subseteq R)$ primitív ideálok, amelyeknek metszete zérus:

$$\bigcap_\nu A_\nu = (0).$$

Az $S_\nu \overset{\text{def}}{=} R/A_\nu$ faktorgyűrűk primitív gyűrűk. A lemma szerint R izomorf az S_ν primitív gyűrűk valamely szubdirekt összegével.

Megfordítva tegyük fel, hogy R az S_ν $(\nu\in\Gamma)$ primitív gyűrűk valamely szubdirekt összege. A lemma szerint az S_ν gyűrűk mindegyike izomorf az R gyűrű valamely A_ν ideálja szerinti faktorgyűrűjével:

$$S_\nu \cong R/A_\nu \qquad (\nu\in\Gamma),$$

továbbá fennáll

$$\bigcap_{\nu\in\Gamma} A_\nu = (0).$$

Az 1. tétel szerint az A_ν ideálok primitívek. Következésképp az R gyűrű radikálmentes.

Minthogy bármely kommutatív primitív gyűrű test, az előző tételből azonnal adódik a

9. TÉTEL. *Kommutatív gyűrű akkor és csak akkor izomorf testek szubdirekt összegével, ha radikálmentes.*

5. §. A körművelet

Legyen e az E gyűrű valamely eleme. Az

$$x-ex \qquad (x\in R)$$

alakú elemek halmaza az R gyűrű egy J jobbideálját alkotja. Ez a jobbideál akkor és csak akkor esik egybe R-rel, ha $e\in J$. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy e *jobb-kvázi-reguláris* (rövidítve: j. k. r.). Más szavakkal: az R gyűrű e eleme akkor és csak akkor j. k. r., ha R-ben van olyan e' elem, hogy

$$e+e'-ee'=0$$

teljesül. Az e' elemet az e *jobb-kvázi-inverzének* hívjuk. Ha van R-ben olyan e'' elem, hogy

$$e+e''-e''e=0$$

teljesül, akkor azt mondjuk, hogy e *bal-kvázi-reguláris* (rövidítve: b. k. r.) és e'' az e *bal-kvázi-inverze*. Ha e egyidejűleg j. k. r. és b. k. r., akkor *kvázi-regulárisnak* (rövidítve: k. r.) hívjuk.

Tetszőleges R gyűrűben bevezethetünk egy új műveletet, amelyet *körműveletnek* nevezünk, a következőképpen:

$$a \circ b \overset{\text{def}}{=} a+b-ab \qquad (a, b \in R).$$

Az R gyűrű elemei erre a körműveletre nézve félcsoportot alkotnak, minthogy bármilyen R-beli a, b, c elemekre

$$(a \circ b) \circ c = (a+b-ab) \circ c = a+b+c-ab-ac-bc+abc =$$
$$= a \circ (b+c-bc) = a \circ (b \circ c).$$

Az R gyűrű 0 eleme a körműveletre nézve egységelem:

$$0 \circ a = a \circ 0 = a \quad \text{minden} \quad a (\in R)\text{-ra.}$$

Ha R egységelemes gyűrű és egységeleme 1, akkor minden $a(\in R)$-ra

$$1 \circ a = a \circ 1 = 1.$$

A körművelet segítségével könnyen kifejezhetjük a kváziregularitást. Az

$$e \circ e' = 0$$

egyenlet teljesülése azt jelenti, hogy e j. k. r., e' b. k. r., továbbá e' az e-nek jobb-kvázi-inverze, e az e'-nek bal-kvázi-inverze.

10. TÉTEL. *Az R gyűrű k. r. elemei a körműveletre nézve csoportot alkotnak.*

E tétel bizonyításához szükségünk van a következő segédtételre:

SEGÉDTÉTEL. *Egy x k. r. elem jobb-kvázi-inverzei és bal-kvázi-inverzei egybeesnek és ez az egyértelműen meghatározott kvázi-inverz szintén k. r.*

Bizonyítás. Legyen $x(\in R)$ k. r. elem. Ekkor van olyan R-beli y és z elem, hogy

$$x \circ y = 0 \quad \text{és} \quad z \circ x = 0.$$

Ebből következik

$$z = z \circ 0 = z \circ (x \circ y) = (z \circ x) \circ y = 0 \circ y = y,$$

továbbá, hogy a $z = y$ elem k. r. Ezzel a segédtételt bebizonyítottuk.

Minthogy a körművelet asszociatív, a 10. tétel bizonyításához az imént bizonyított segédtétel alapján már csak azt kell megmutatni, hogy $a \circ b$ k. r., ha a és b is k. r.

Legyen $a \circ a' = a' \circ a = 0$ $(a, a' \in R)$ és $b \circ b' = b' \circ b = 0$ $(b, b' \in R)$. Ekkor

$$(a \circ b) \circ (b' \circ a') = a \circ (b \circ b') \circ a' = (a \circ 0) \circ a' = a \circ a' = 0$$

és hasonlóan

$$(b' \circ a') \circ (a \circ b) = 0,$$

q. e. d.

Az R gyűrű egy A jobbideálját (balideálját) kvázi-regulárisnak (rövidítve: k. r.) nevezzük, ha A minden eleme j. k. r. (b. k. r.).

11. TÉTEL. *Az R gyűrű bármely nil-jobbideálja (nil-balideálja) k. r.*

Bizonyítás. Legyen a az R valamely nilpotens eleme, amelyre

$$a^n = 0 \quad (n \text{ természetes szám})$$

teljesül. Ekkor

$$a \circ b = b \circ a = 0,$$

ahol

$$b \stackrel{\text{def}}{=} -a - a^2 - a^3 - \ldots - a^{n-1}.$$

Tehát minden nilpotens elem k. r.

6. §. A radikál néhány jellemzése

Mielőtt megfogalmaznánk egy olyan tételt, amely a radikál néhány jellemzését adja, bevezetünk egy fogalmat, amely a csoportok Frattini-féle részcsoportjával mutat hasonlóságot.

Legyen S az R gyűrű valamely részhalmaza. Ha $(S)_j = R$, akkor azt mondjuk, hogy S az R gyűrű egy jobbgenerátorrendszere. Jelölje $\Phi_j(R)$ az R összes olyan x elemeinek halmazát, amelyekre sx bármely $s(\in R)$ esetén törölhető az R bármely jobbgenerátorrendszeréből, azaz

$$R = (A, sx)_j \qquad (A \subseteqq R;\ s \in R)$$

-ből mindig $R = (A)_j$ következik. — $(S)_b$-vel jelölve az S által generált balideált, hasonlóan definiáljuk a $\Phi_b(R)$ halmazt. Könnyű belátni közvetlenül is, hogy $\Phi_j(R)$ és $\Phi_b(R)$ ideálok R-ben. Ez a tény azonban az alábbi, a radikál számos jellemzését magába foglaló tétel triviális következményeként is adódik.

12. TÉTEL. *Legyen R tetszőleges gyűrű. Az $\mathfrak{R}(R)$ radikál és az R alábbi részhalmazai egybeesnek:*

(a) *az R összes olyan jobbideáljainak H egyesítése, amelyek a körműveletre nézve csoportot alkotnak;*

(b) *az R összes k. r. jobbideáljainak Q egyesítése;*

(c) *az összes olyan $x(\in R)$ elemek Q_1 halmaza, amelyekre xr minden $r(\in R)$ esetén j. k. r.;*

(d) *az összes olyan $x(\in R)$ elemek Q_2 halmaza, amelyekre az rxs szorzat minden $r, s(\in R)$ esetén j. k. r.;*

(e) *az összes olyan $x(\in R)$ elemek Q_3 halmaza, amelyekre az rxs szorzat minden $r, s(\in R)$ esetén k. r.;*

(f) *$\Phi_j(R)$;*

(g) *az R összes olyan M maximális jobbideáljainak N metszete, amelyekhez $x \notin M$ $(x \in R)$ esetén mindig van olyan $r(\in R)$, hogy $rx \notin M$;*

(h) *az R összes moduláris maximális jobbideáljainak N' metszete;*

(i) *az R összes olyan x elemeinek D halmaza, amelyekre az Rx balideál benne van R minden maximális jobbideáljában;*

(j) *az R összes primitív jobbideáljainak P metszete.*

KÖVETKEZMÉNY. *Ha az* (a), ..., (j) *tulajdonságokkal definiált halmazok mindegyikéhez megalkotjuk a „duális halmazt" oly módon, hogy a szereplő „jobb-" ill. „balfogalmakat" mindenütt a megfelelő „bal-" ill. „jobbfogalmakkal" helyettesítjük, akkor az így nyert halmazok is egybeesnek az* $\mathfrak{R}(R)$ *radikállal.*

Bizonyítás. A következmény azonnal adódik a tételből, mert a Q_3 halmaz a fenti értelemben „önduális".

A 7. tétel értelmében $\mathfrak{R}(R)=P$. Így csak azt kell bizonyítanunk, hogy az R gyűrű (a), ..., (j) által definiált részhalmazai egybeesnek.

1. $H\subseteqq Q$: R minden olyan jobbideálja, amely a körműveletre nézve csoport, k. r. jobbideál, következésképp $H\subseteqq Q$.

2. $Q\subseteqq Q_1$: Q minden x eleme az R valamely k. r. jobbideáljában van, tehát az xr szorzat minden $r(\in R)$-re j. k. r.

3. $Q_1\subseteqq Q_2$: Legyen $x\in Q_1$. Ekkor minden $r, s(\in R)$ elemre az xsr elem j. k. r., tehát van olyan $y(\in R)$, hogy

$$xsr+y-xsry=0.$$

Ekkor

$$rxs+(ryxs-rxs)-rxs(ryxs-rxs)=r(xsr+y-xsry)xs=0,$$

azaz az rxs szorzat is j. k. r. elem.

4. $Q_2\subseteqq Q_3$: Legyen $x\in Q_2$; $r, s\in R$. Minthogy az rxs szorzat j. k. r., van az R gyűrűben olyan y elem, amelyre

$$rxs+y-rxsy=0$$

érvényes. Ebből

$$y=rxsy-rxs=rx(sy-s)$$

adódik, ami azt mutatja, hogy y nemcsak b. k. r., hanem j. k. r. is. A segédtétel szerint rxs az y kvázi-inverze és rxs szintén k. r. elem.

5. $Q_3\subseteqq \Phi_j(R)$: Legyen $x\in R$ és $x\notin \Phi_j(R)$. Megmutatjuk, hogy $x\notin Q_3$. Az R gyűrűnek van olyan s eleme és B részhalmaza, hogy

$$(sx, B)_j=R \quad \text{és} \quad sx\notin (B)_j.$$

A KURATOWSKI—ZORN-féle lemma alapján R-nek van olyan jobbideálja, amely maximális a

$$B\subseteqq M, \qquad sx\notin M$$

tulajdonságokra nézve. Minthogy minden R-beli $z\notin M$ elemre

$$sx\in (z, M)_j$$

érvényes,

$$(sx, B)_j\subseteqq (z, M)_j\subseteqq R=(sx, B)_j,$$

tehát

$$(z, M)_j=R,$$

azaz M R-nek maximális jobbideálja. Az R/M faktormodulus egyszerű és $\bar{s}x\neq\bar{0}$ miatt irreducibilis. Van tehát olyan $r(\in R)$ elem, hogy

$$\bar{s}xr=\bar{s}\neq\bar{0} \qquad (\bar{0}=M). \tag{4}$$

Tegyük fel, hogy $x \in Q_3$. Ekkor van olyan $y(\in R)$, hogy

$$xrxr + y - xrxry = 0.$$

Ekkor

$$(\bar{s}xr)xr = \bar{s}xr = \bar{s}$$

és

$$(\bar{s}xr)xr = \bar{s}(xrxry - y) = \bar{s}y - \bar{s}y = \bar{0},$$

azaz $\bar{s} = \bar{0}$. Ez azonban (4) miatt nem lehetséges. Az $(xr)xr$ elem tehát nem j. k. r., s így $x \notin Q_3$.

6. $\Phi_j(R) \subseteqq N$: Legyen $x \in R$ és $x \notin N$. Megmutatjuk, hogy $x \notin \Phi_j(R)$. Az R gyűrűnek van olyan M maximális jobbideálja, hogy $x \notin M$ és valamilyen $r(\in R)$-re $rx \notin M$. Az M jobbideál maximalitásából következik, hogy

$$(M, rx)_j = R.$$

Az $\langle M, rx \rangle$ halmaz azonban az R gyűrű olyan jobbgenerátorrendszere, amelyből az rx elem nem törölhető. Tehát $x \notin \Phi_j(R)$.

7. $N \subseteqq N'$: Legyen B az R gyűrű egy moduláris maximális jobbideálja és e balegységelem mod B. Ha $x \notin B$, akkor $ex \notin B$. Következésképp $N \subseteqq N'$.

8. $N' \subseteqq D$: Ha $x \in R$ és $x \notin D$, akkor van olyan M maximális jobbideál, hogy valamilyen $r(\in R)$ elemre $rx \notin M$. Az R/M faktormodulus egyszerű és $\bar{r}x \neq \bar{0}$ miatt szigorúan ciklikus. A $B = (\bar{0} : \bar{r})$ moduláris jobbideál (lásd a 3. tételt) szintén maximális és $x \notin B$. Ebből következik, hogy $x \notin N'$.

9. $D \subseteqq P$: Legyen $x \in R$ és $x \notin P$. Ekkor az R gyűrűnek van olyan I primitív ideálja, amely nem tartalmazza x-et. A 4. tétel szerint létezik egy M (moduláris) maximális jobbideál, amelyre $I = (M : R)$. Az $x \notin I$ relációból következik $Rx \subsetneqq M$, következésképp $x \notin D$.

10. $P \subseteqq H$: Elég megmutatnunk, hogy P minden eleme k. r., ebből ugyanis már következik, hogy P a körműveletre nézve csoport. Tegyük fel, hogy bizonyítandó állításunkkal ellentétben $x(\in P)$ nem k. r. Ekkor

$$x \notin \{y - xy \mid y \in R\}.$$

Legyen M az R gyűrű olyan jobbideálja, amely az

$$\{y - xy \mid y \in R\} \subseteqq M \quad \text{és} \quad x \notin M$$

tulajdonságokra nézve maximális (KURATOWSKI—ZORN lemmája alapján ilyen M létezik). Most megmutatjuk, hogy M az R maximális jobbideálja. Legyen $z \in R$ és $z \notin M$. Ekkor

$$x \in (M, z)_j.$$

Ebből tetszőleges $y(\in R)$ elemre

$$y = (y - xy) + xy \in (M, z)_j,$$

azaz

$$R = (M, z)_j$$

következik. M tehát maximális jobbideál R-ben. A $G = R/M$ modulus egyszerű, sőt irreducibilis R-modulus. Valóban, $x^2 - x \in M$-ből és $x \notin M$-ből következik $x^2 \notin M$, tehát $\bar{x}x \neq \bar{0}$ $(\bar{x}, \bar{0} \in G)$. Az $I = (0 : G)$ ideál ezek szerint primitív és $x \notin I$.

Ezáltal ellentmondásba kerültünk azzal a feltevésünkkel, hogy $x \in P$. Következésképp P minden x eleme j. k. r., tehát van olyan $x'(\in R)$, hogy

$$x + x' - xx' = 0.$$

Ebből $x' \in P$ következik, tehát x' k. r. A segédtétel alapján adódik, hogy x szintén k. r.

Ezzel a 12. tétel bizonyítását befejeztük.

Érdemes a tétel néhány következményét megemlíteni.

1. KÖVETKEZMÉNY. *Egy R gyűrűre ekvivalensek a következő feltételek:*

(I) *R radikálgyűrű;*

(II) *R minden eleme k. r.;*

(III) *R-nek nincs moduláris maximális jobbideálja (balideálja);*

(IV) *R-nek nincs primitív ideálja.*

Minthogy egy halmaz részhalmazai üres rendszerének metszetén magát az egész halmazt értjük, állításunk nyilvánvalóan igaz.

2. KÖVETKEZMÉNY. *Egy balegységelemes (jobbegységelemes) gyűrű radikálja a gyűrű összes maximális jobbideáljának (balideáljának) metszete. Egy gyűrű balegységeleme (jobbegységeleme) tehát soha sincs a radikálban.*

Ez az állítás azonnal adódik az $\mathfrak{R}(R) = N'$ egyenlőségből, minthogy balegységelemes (jobbegységelemes) gyűrű bármely jobbideálja (balideálja) moduláris.

3. KÖVETKEZMÉNY. *Egy R gyűrű radikálja tartalmazza az R összes nil-jobbideálját és nil-balideálját.*

Ez az állítás a 11. tétel és az $\mathfrak{R}(R) = Q$ egyenlőség következménye.

4. KÖVETKEZMÉNY. *Egy R kommutatív gyűrű radikálja az R összes olyan A maximális ideáljának metszete, amelyre $x^2 \in A$-ból $x \in A$ következik.*

Bizonyítás. Az R kommutatív gyűrű A ideálja akkor és csak akkor primitív, ha az R/A faktorgyűrű primitív, tehát test. Viszont könnyű belátni, hogy R/A akkor és csak akkor test, ha A az R maximális ideálja és $x^2 \in A$-ból $x \in A$ következik. Ezek után az $\mathfrak{R}(R) = P$ egyenlőségből az állítás azonnal adódik.

Példaként határozzuk meg a K test feletti formális hatványsorok $K[[x]]$ gyűrűjének a radikálját. $K[[x]]$ egységelemes kommutatív gyűrű, s mint jól ismert, egyetlen maximális ideálja van: (x). Így a 12. tétel 2. következménye szerint $\mathfrak{R}(K[[x]]) = (x)$.

Lássunk egy további példát! Legyen R az összes $\frac{2x}{2y+1}$ alakú racionális számok gyűrűje, ahol x és y egész számok, továbbá $2x$ és $2y+1$ relatív prímek. R kommutatív radikálgyűrű, mert minden eleme q. r.:

$$\frac{2x}{2y+1} \circ \frac{-2x}{2(-x+y)+1} = 0.$$

E példa külön érdekessége, hogy R egyetlen eleme sem nilpotens.

7. §. Artin-gyűrűk radikálja

Az előzőkben bebizonyítottuk, hogy egy R gyűrű radikálja az R összes nilpotens jobbideálját, sőt nil-jobbideálját (balideálját) tartalmazza. Most azt mutatjuk meg, hogy ha R Artin-gyűrű, akkor $\mathfrak{R}(R)$ maga is nilpotens, s ebből következőleg Artin-gyűrű esetében „nilpotens" és „nil" ugyanazt jelenti.

13. TÉTEL. *Bármely Artin-gyűrű radikálja nilpotens.*

Bizonyítás. Legyen R Artin-gyűrű és tekintsük az $\mathfrak{R}(R)$, $(\mathfrak{R}(R))^2$, $(\mathfrak{R}(R))^3$, ... ideálok nem növekvő

$$\mathfrak{R}(R) \supseteqq (\mathfrak{R}(R))^2 \supseteqq (\mathfrak{R}(R))^3 \supseteqq \dots$$

láncát. Mivel R Artin-gyűrű, van olyan m természetes szám, hogy

$$(\mathfrak{R}(R))^m = (\mathfrak{R}(R))^{m+1} = \dots = (\mathfrak{R}(R))^{2m}.$$

Jelöljük $(\mathfrak{R}(R))^m$-et Q-val. Ekkor

$$Q^2 = Q.$$

Ha $Q=(0)$, akkor a bizonyítás már készen is van. Tegyük fel, hogy $Q \neq (0)$, s tekintsük az R összes olyan J jobbideáljának $\mathfrak{M}$ halmazát, amelyre

$$JQ = J \neq (0)$$

teljesül. Minthogy $Q^2 = Q$ miatt $\mathfrak{M}$ nem üres, és R Artin-gyűrű, $\mathfrak{M}$-nek van minimális eleme, mondjuk A, amelyre tehát

$$AQ = A \neq (0) \tag{5}$$

teljesül. Jelöljük A_0-val az A összes olyan a elemeinek halmazát, amelyekre $aQ=(0)$. Minthogy Q kétoldali ideál, az A_0 jobbideál R-ben. Legyen y az A-nak olyan eleme, mely nem eleme A_0-nak. Ekkor

$$(yQ)Q = yQ^2 = yQ \neq (0).$$

Az A jobbideál definíciója és az $yQ \subseteqq A$ reláció alapján azonnal adódik, hogy $yQ=A$. Tekintsük most az A/A_0 R-modulust. Ez (5) miatt legalább kételemű, s mivel minden $y \in A$, $y \notin A_0$ elemre $yQ=A$, az A/A_0 modulus egyszerű, sőt irreducibilis. Ugyancsak (5)-ből következik, hogy

$$(A/A_0)Q = A/A_0 \quad (\neq \bar{0}),$$

ami $Q \subseteqq \mathfrak{R}(R)$ miatt ellentmondásban van a radikál definíciójával. Tehát szükségképpen $Q=(0)$, azaz $\mathfrak{R}(R)$ valóban nilpotens.

KÖVETKEZMÉNY. *Egy Artin-gyűrű bármely nil-jobbideálja (nil-balideálja) nilpotens.*

8. § Algebrák radikálja

Legyen R egységelemes kommutatív gyűrű és A egy R-algebra. Az A algebra valamely R-jobbideálját *modulárisnak* nevezzük, ha az mint az A gyűrű jobbideálja moduláris. Az *A algebra radikálján* az A összes moduláris maximális R-jobbideáljának metszetét értjük. (Ha A-nak nincs moduláris maximális R-jobbideálja, akkor A radikálja maga A.)

14. TÉTEL. *Az A R-algebra radikálja egybeesik az A-nak mint gyűrűnek radikáljával.*

Bizonyítás. Elegendő azt megmutatnunk, hogy A minden M moduláris maximális jobbideálja R-jobbideál, azaz, hogy $MR \subseteq M$. Tegyük fel, hogy valamely $\lambda(\in R)$ és $x \in M$ elemre

$$x\lambda \notin M$$

és hogy e mod M balegységelem. Ekkor alkalmas $m(\in M)$ és $a(\in A)$ elemekre

$$e = m + (x\lambda)a = m + x(a\lambda) \in M,$$

amiből $M = A$ következik. Ez azonban ellentmondásban van M definíciójával. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

KÖVETKEZMÉNY. *Egy K test feletti véges rangú A algebra radikálja nilpotens.* A-nak mint végesdimenziós J-vektortérnek van kompozíciósora, így A K-jobbideáljaira nézve kielégíti a minimumkövetelményt. A következmény állítása ekkor hasonlóan bizonyítható, mint a 13. tétel.

9. §. A féligegyszerű gyűrűk egy jellemzése

Egy radikálmentes Artin-gyűrűt *féligegyszerű gyűrűnek* nevezünk. A féligegyszerű gyűrűket számos nevezetes tulajdonság tünteti ki az összes asszociatív gyűrűk kategóriájában. Többek között érvényes a következő tétel:

Egy gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha van balegységeleme és véges sok minimális jobbideáljának direkt összege (NOETHER [8]).

Ha egy R gyűrű radikálmentes, akkor — mint láttuk — az összes moduláris maximális jobbideáljainak metszete a (0) ideál. Ha R ezen felül még Artin-gyűrű is, akkor a jobbideálokra vonatkozó minimumkövetelmény miatt nyilvánvalóan kiválasztható R-nek *véges* sok olyan moduláris maximális jobbideálja, amelyek metszete zérus. Megmutatjuk, hogy ez a feltétel nemcsak szükséges, hanem elegendő is ahhoz, hogy R féligegyszerű gyűrű legyen. Legyen R olyan gyűrű, amelyben véges sok moduláris maximális jobbideál metszete a zérusideál. Ekkor a 2. tétel 3. következménye szerint R-nek van balegységeleme. Másrészt felhasználva azt a tételt, hogy ha egy gyűrűben véges sok maximális jobbideál metszete (0), akkor a gyűrű véges sok minimális jobbideál direkt összege (KERTÉSZ [6], 5. tétel), azt kapjuk, hogy R véges sok minimális jobbideál direkt összege. Mármost a féligegyszerű gyűrűk NOETHER-féle jellemzéséből következik, hogy R féligegyszerű. Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

15. TÉTEL. *Egy gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha van véges sok olyan moduláris maximális jobbideálja, amelyek metszete zérus.*

IRODALOMJEGYZÉK

[1] ARTIN, E.: Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, *Abh. Hamburg* **5** (1927), 251—260.
[2] BERGMAN, G. M.: A ring primitive on the right but not on the left, *Proc. Amer. Math. Soc.* **15** (1964), 473—475; Erratum, *Proc. Amer. Math. Soc.* **15** (1964), 1000.
[3] BOURBAKI, N.: Éléments de mathématique, I. Partie, Livre II: Algèbre, *Paris*, 1947.
[4] JACOBSON, N.: The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, *Amer. J. Math.* **67** (1945), 300—320.
[5] JACOBSON, N.: Structure of rings, (Coll. Publ.) *Providence*, 1956.
[6] KERTÉSZ, A.: Féligegyszerű gyűrűk mint operátortartományok, *MTA Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **5** (1955), 149—186.
[7] KERTÉSZ, A.: A characterization of the Jacobson radical, *Proc. Amer. Math. Soc.* **14** (1963), 595—597.
[8] NOETHER, E.: Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie, *Math. Z.* **30** (1929), 641—692.
[9] RÉDEI, L.: Algebra I., *Budapest*, 1954.

(Beérkezett: 1966. VII. 27.)