

A MATEMATIKA KÖZGAZDASÁGI ALKALMAZÁSÁNAK EGY KLASSZIKUS MUNKÁJÁRÓL

L. V. KANTOROVICS: „A TERMELES SZERVEZÉSÉNEK ÉS TERVEZÉSÉNEK
MATEMATIKAI MÓDSZEREI” CÍMŰ KÖNYVÉNEK ISMERTETÉSE

Írta: BOD PÉTER

Ismeretes, hogy a lineáris programozás elméletét az irodalom HITCHCOCK és KOOPMANS nevéhez kapcsolja; 1941-ben, illetve 1945-ben megjelent cikkeik alapján, amelyekben — egymástól függetlenül — az ún. szállítási problémát vetették fel. Az irodalom tanúságai szerint ez az elmélet a legutóbbi évekig a kapitalista közgazdaságtudomány ösztönzésére fejlődött. Napjainkban mindinkább növekvő érdeklődés mutatkozik a programozási számításoknak a szocialista gazdaság feltételei közötti alkalmazása iránt. Ezért nem érdektelen talán bizonyos — eléggé feledésbe merült — tudománytörténeti tényekre rámutatni, amelyekből kiderül, hogy

1. a programozási számítások gondolata történelmileg elsőnek a szocialista tervgazdaság fejlődésének bizonyos szakaszában vetődött fel és így

2. legalábbis pontatlan az irodalomban elterjedt állásfoglalás a prioritás kérdésében.

Úgy gondoljuk, hogy ennek a ténynek nagy elvi jelentősége van és hangoztatni is kell nem utolsósorban azért, mert a matematikai módszerek közgazdasági alkalmazásával szemben nem oldódott fel még nálunk teljesen a múltbeli fenntartás.

Köztudomású, hogy a Szovjetunióban az első két ötéves terv idején feszített ütemű iparosítás folyt. A szovjet állam előtt ekkor az a történelmi feladat állott, hogy példátlanul rövid idő alatt saját erőből erős, korszerű nehézipart hozzon létre. Ezt követelte a nemzetközi helyzet, ezt követelte a szovjethatalom megvédésének az érdeke. Teljesen érthető, hogy ilyen feltételek között nem volt lehetőség a gazdaságossági szempontok jelentős mértékű érvényesítésére.

1938 táján azonban bizonyos fokig megváltozott a helyzet. Az iparosítás sikerei az első két ötéves tervben lehetővé tették, hogy a harmadik ötéves terv célkitűzései között fokozottabb hangsúlyt nyerjenek olyan módszerek, amelyek pótlólagos beruházások nélkül teszik lehetővé a termelés bővítését. Ilyen eszközök voltak mindenekelőtt a tervezés és az ipar szervezésének megjavítása.

Ezek között a körülmények között indult meg kutatómunka a Lenin-grádi Állami Egyetemen KANTOROVICS professzor vezetésével olyan matema-

तिकai módszerek kidolgozására, amelyek hathatós segítséget nyújtanak a tervező szervezeteknek, a szovjet népgazdaság előtt álló újabb hatalmas feladatok megoldásában.

A kutatás során kiderült, hogy ezek a gazdasági, tervezési problémák elsősorban olyan szélsőértékfeladatokhoz vezetnek, amelyek az analízis klaszszikus módszereivel általában nem oldhatók meg. A nehézségeket elsősorban a változók nagy száma, másodsorban az okozza, hogy a felállított modellekben gazdasági szempontból csak a nem negatív extrémumoknak van értelmük.

A kutatások eredményeként sikerült KANTOROVICS professzornak bizonyos gazdasági problémák olyan matematikai modelljeit megfogalmazni, amelyek a fenti problémákra vezetnek és sikerült e feladatok megoldására megfelelő — ebben az időben tisztára matematikai szempontból is említésre méltó — algoritmust adni.

Az eredményeket először a Leningrádi Állami Egyetem matematikai tan-székén vitatták meg, majd az egyetem rendezésében nyilvános kollokviumot szerveztek, amelyen nagy számban részt vettek az ipar felelős munkatársai is. A viták után látott napvilágot az egyetem kiadójának kiadásában 1939 őszén: L. V. KANTOROVICS „A termelés szervezésének és tervezésének matematikai módszerei” című könyve.

A könyv elsősorban közgazdászoknak szól. A matematikai elméleti megfontolásokat három függelék tartalmazza. A vizsgált tervezési és szervezési problémák főleg ipari és üzemgazdasági jellegűek, ami, ha figyelembe vesszük az akkori szovjet népgazdasági tervezési metodikát, teljesen érthető. Az akkori tervezési rendszerben az optimum problémák szükségképpen nem népgazdasági szinten, hanem ipari és vállalati szinten jelentkeztek, mint az adott népgazdasági terv legkedvezőbb teljesítésének, illetve maximális túlteljesítésének a problémái.

KANTOROVICS professzor könyvében három alapeladatot fogalmaz meg. Mind a három a gépi termelőberendezések bizonyos feltételek melletti optimális kihasználására ad választ. Azonban számos más probléma is megfogalmazható* ezeknek a kapacitás kihasználási modelleknek a segítségével.

Az első feladat a következő: n megmunkáló gépből álló géppark segítségével olyan teljes (komplett) szerelvényeket kell maximális mennyiségben termelni, amelyek mindegyike m különböző alkatrészből áll. Kérdés, hogyan kell ennek érdekében az m alkatrész gyártását a rendelkezésre álló gépekre elosztani. A feladat megoldásához ismeretesek az egyes gépeknek a különböző alkatrészekre vonatkozó teljesítményadatai: jelölje $\alpha_{i,k}$ az i -edik gépen a k -edik alkatrészről az egy műszak alatt előállítható alkatrészek darabszámát. (Ha az i -edik gépen a k -edik alkatrész nem munkálható meg, akkor $\alpha_{i,k} = 0$.)

Jelölje $h_{i,k}$ (a teljes műszak hányadában kifejezve) azt az egyelőre ismeretlen időt, amelyet az i -edik gépen a k -adik alkatrész megmunkálására fordítunk. Mivel a gépeket a teljes műszakban működtetni kell, ezért

$$\sum_{k=1}^m h_{i,k} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

és nyilván

$$h_{i,k} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m).$$

Ilyen feltételek mellett műszakonként a k -adik alkatrészből

$$Z_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,k} \cdot h_{i,k}$$

darabot gyárthatunk. Mivel azonban a terv szerint nem egyszerűen a legtöbb alkatrész gyártására kell törekedni, hanem maximális számú komplett szerelvényt kell előállítani — meg kell követelni, hogy műszakonként az összes alkatrészből azonos mennyiséget termeljenek, vagyis, hogy

$$Z_1 = Z_2 = \dots = Z_m$$

legyen. Ezeknek a Z számoknak a közös értéke jelzi a legyártott komplett szerelvények számát.

Az első alapfeladatot matematikailag tehát így lehet megfogalmazni:¹

Meghatározandók a $h_{i,k}$ számok ($i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m$) úgy, hogy a $\left(Z_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,k} \cdot h_{i,k} \right.$ jelölés mellett) a $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ mennyiségek egymással egyenlők legyenek és közös értékük legyen maximális az alábbi feltételek mellett:

$$\sum_{k=1}^m h_{i,k} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$h_{i,k} \geq 0.$$

¹ Kantorovics professzor könyvében nem tér ki az egyes gazdasági problémák megoldására javasolt modellek ki nem mondott feltételezéseinek az ismertetésére, illetve elemzésére. Mivel minden modell szükségképpen leegyszerűsítése a teljes valóságnak — az ilyen természetű feltételezések elkerülhetetlenek. Természetesen esetenként, konkrétan el kell bírálni, hogy ezek a feltevések, illetve egyszerűsítések milyen mértékben térnek el a gazdasági valóságtól és mennyiben befolyásolják a számított optimumok tényleges felhasználhatóságát. Az említett első alapfeladatnál pl. az a — ki nem mondott — feltételezés szerepel, hogy műszak közben idővesztés nélkül át lehet állni valamely adott gépen az egyik munkadarab megmunkálásáról a másikra. Hasonló feltételezés, hogy valamely gép teljesítménye egy bizonyos munkadarabból független attól, hogy milyen szériában termelik az illető darabot (kis vagy nagy sorozat) stb. Mivel a könyv bizonyos módszerek ismertetésére íródott és nem a konkrét problémák megoldása volt a feladata — a szerző eltekinthetett ilyen részletek megvilágításától. Azonban az explicit és implicit feltételezések gondos vizsgálatának a szükségességére minden közgazdasági alkalmazással kapcsolatban fontosnak tartjuk felhívni a figyelmet.

Pontosán ugyanerre a feladatra vezet, ha n számú gép segítségével egy adott fajta alkatrészen m számú különböző műveletet kell elvégezni és a rendelkezésre álló gépparkkal adott idő alatt maximális számban akarunk munkadarabokat teljesen megmunkálni (vagyis elvégezni rajtuk az összes szükséges műveletet). Ebben az esetben azonban $\alpha_{i,k}$ azt jelenti, hogy az i -edik gép hány munkadarabon képes egy műszak alatt a k -adik megmunkálási műveletet elvégezni; $h_{i,k}$ pedig az erre a műveletre fordított időt fejezi ki, szintén a teljes műszak hányadában.

Ha a fenti feladatot bizonyos pótlólagos feltételekkel kiegészítjük, eljutunk a *második alapfeladathoz*. Tegyük fel, hogy a fentiekben ismertetett termelési feladatot egy gyárnak úgy kell megoldania, hogy közben bizonyos, a termeléshez szükséges anyagi erőforrásokat csak előre meghatározott korláton belül vehet igénybe (pl. munkaerőt, elektromos energiát, valamilyen import anyagot stb.). Legyen mondjuk $C_{i,k}$ az i -edik gép energiafogyasztása műszakonként, ha a gép a k -adik alkatrészt gyártja és jelöljük C -vel az üzem rendelkezésére bocsátott és ennél a munkánál műszakonként túl nem léphető elektromos energia összmenyiségét. Ebben az esetben az első alapfeladatnál kitűzött optimumot az ott jelzett feltételeken kívül még a

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m C_{i,k} \cdot h_{i,k} \leq C$$

feltétel figyelembevételével kell meghatározni.

Előfordul a gyakorlatban olyan bonyolultabb kapacitáskihasználási feladat is, amikor ugyanazon a gépen egyidejűleg több alkatrész is megmunkálható. Ilyenkor a termelés megszervezésének nagyon sok kombinatív lehetősége van. Tegyük fel, hogy a termelést n különböző gépen r -féle módon lehet megszervezni és ismét m alkatrészből álló komplett szerelvényeket kell előállítani. Ha a termelést az l -edik módszer szerint szervezzük meg, akkor az i -edik gépen $\gamma_{i,k,l}$ ($k = 1, 2, \dots, m$) alkatrészt munkálhatunk meg műszakonként egyidejűleg. Az optimum feladat most így hangzik:

Meghatározandók a $h_{i,l}$ értékek ($i = 1, 2, \dots, n$; $l = 1, 2, \dots, r$) úgy, hogy ($Z_k = \sum_{i,l} \gamma_{i,k,l} \cdot h_{i,l}$ jelölés mellett) $Z_1 = Z_2 = \dots = Z_m$ közös értéke maximális legyen az alábbi feltételek mellett:

$$\sum_{l=1}^r h_{i,l} = 1,$$

$$h_{i,l} \geq 0.$$

Ez a könyvben ismertetett *harmadik alapfeladat*.

A bemutatott három alapfeladatra számos gyakorlati gazdasági probléma vezethető vissza. Nézzünk ezek közül néhányat.

n gépen m különböző terméket állítanak elő. Legyen az i -edik gép teljesítménye a k -adik termékből $\alpha_{i,k}^*$ darab naponta. A termelőberendezést úgy kell kihasználni, hogy maximális termékkibocsátást kapjunk, de az egyes termékek aránya előre meghatározott $p_1:p_2:\dots:p_m$ legyen. A feladat most úgy szól, hogy meghatározandók a $h_{i,k}$ számok úgy, hogy

$$\frac{\sum_{i=1}^n h_{i,1} \cdot \alpha_{i,1}^*}{p_1} = \frac{\sum_{i=1}^n h_{i,2} \cdot \alpha_{i,2}^*}{p_2} = \dots = \frac{\sum_{i=1}^n h_{i,m} \cdot \alpha_{i,m}^*}{p_m}$$

legyen és e hányadosok közös értéke legyen maximális az alábbi feltételekkel:

$$\sum_{k=1}^m h_{i,k} = 1, \\ h_{i,k} \geq 0.$$

Látható, hogy az $\alpha_{i,k} = \frac{1}{P_k} \alpha_{i,k}^*$ jelölés bevezetésével a probléma közvetlenül az első alapeladatba megy át. Ha ugyanebben a feladatban még bizonyos kikötéseket teszünk, egyes termelőeszközök felhasználási lehetőségeinek korlátozására, akkor a második alapelattal van dolgunk.

A harmadik alapelattal vezet az anyagkiszabási hulladék minimumra szorításának alábbi problémája.

Rendelkezésünkre áll n tétel anyag (pl. üveglapok, gerendák stb.), amiből adott méretű idomokat kell kiszabni úgy, hogy a különböző méretű idomok aránya előre meghatározott $p_1:p_2:\dots:p_m$ legyen. Arra törekszünk, hogy a rendelkezésre álló anyagból a lehető legtöbb „komplett szettet” szabhassuk le a legkisebb szabási hulladék mellett. Feltesszük, hogy a rendelkezésre álló anyag i -edik tétele q_i azonos méretű darabból áll. (Pl. meghatározott nagyságú üvegtáblák.) Minden tétel egységét többféle módon lehet felosztani. Az i -edik tétel l -edik módon való kiszabásánál az alábbi idomokat nyerjük: $\gamma_{i,1,l}$ első számú, $\gamma_{i,2,l}$ második számú, ..., $\gamma_{i,m,l}$ m -edik számú idomot (egyes $\gamma_{i,k,l}$ értékek zérusok is lehetnek). Jelöljük $h_{i,l}$ -el azt a számot, amely megmutatja, hogy az i anyagtételből hány egységet szabunk ki az

l -edik módon. Akkor (a $Z_k = \frac{\sum_{i,l} \gamma_{i,k,l} \cdot h_{i,l}}{p_k}$ jelölés mellett) keressük a $Z_1 = Z_2 = \dots = Z_m$ közös értékek lehetséges maximumát az alábbi feltételekkel:

$$\sum_{l=1}^r h_{i,l} = 1$$

és

$$h_{i,l} \geq 0; \quad \sum_l h_{i,l} = q_i.$$

Látható, hogy a változók megfelelő megválasztásakor ez a feladat a harmadik alapfeladatba megy át.

A bemutatott példák távolról sem merítik ki azoknak a gazdasági problémáknak a körét, amelyek a vázolt alapfeladatokra visszavezethetők. Ilyen jellegű problémák — hogy még néhányat felsoroljunk — a többféle módon feldolgozható vegyipari alapanyagok leggazdaságosabb hasznosítása, különböző fűtőértékű üzemanyagok leghatékonyabb elosztása ismert fűtőanyagfelhasználási adottságokkal rendelkező különböző tüzelőberendezések között, vetésterületek legelőnyösebb kihasználása, legkisebb költséget igénylő szállítások tervezése stb.

KANTOROVICS könyvében a bemutatott alapfeladatok megoldására, mint már említettük — algoritmust ad. A megoldási eljárást a „megoldó együtthatók” módszerének nevezi. Nézzünk erre egy példát.

Vizsgáljuk meg az első alapfeladat megoldásának a menetét abban a legegyszerűbb esetben, amikor n különböző gépen két alkatrészből álló szerelvényeket kell termelni. Keressük tehát azokat a $h_{i,1}$ és $h_{i,2}$ értékeket, amelyekre a

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{i,1} \cdot h_{i,1} = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,2} \cdot h_{i,2}$$

közös érték maximális azzal a feltétellel, hogy

$$h_{i,1} + h_{i,2} = 1 \quad \text{és}$$

$$h_{i,1}, \quad \text{valamint} \quad h_{i,2} \geq 0.$$

Tekintsük az $\frac{\alpha_{i,2}}{\alpha_{i,1}} = K_i$ hányadosokat minden i -re. Feltételezhetjük, hogy ezek az értékek növekvő sorrendben állnak (ami a gépek sorszámának megfelelő átszámozásával mindig elérhető), azaz, hogy

$$K_1 \leq K_2 \leq K_3 \leq \dots \leq K_n.$$

Világos, hogy ilyen körülmények között az alacsony sorszámú gépeken érdekes az első és a magasabb sorszámú gépeken a második alkatrészt gyártani. Tehát az alacsony sorszámú gépeken a

$$h_{i,1} = 1 \quad \text{és} \quad h_{i,2} = 0,$$

míg a magas sorszámú gépeken a

$$h_{i,1} = 0 \quad \text{és} \quad h_{i,2} = 1$$

megoldás lesz a kedvező. Azonban a feltételek szerint a két alkatrészből azonos darabszámot kell gyártani. Ennek érdekében a $0 < S < n$ számot úgy

választjuk meg, hogy

$$\sum_{i=1}^{s-1} \alpha_{i,1} < \sum_{i=s}^n \alpha_{i,2},$$

de

$$\sum_{i=1}^s \alpha_{i,1} \geq \sum_{i=s+1}^n \alpha_{i,2}.$$

Ez a két egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy az első $(s-1)$ gépen kevesebb első alkatrész készülne el, mint ahány második a többi gépen. Viszont az első S számú gépen már éppen annyi, vagy több első alkatrész készíthető, mint amennyi második alkatrészt a fennmaradó $(n-S)$ gép gyártani tud.

Ha S értékét így választjuk meg, akkor nyilván

$$h_{i,1} = 1; h_{i,2} = 0 \quad [i = 1, 2, \dots, (S-1)]$$

és

$$h_{i,1} = 0; h_{i,2} = 1 \quad [i = (S+1), (S+2), \dots, n].$$

Míg $h_{s,1}$ és $h_{s,2}$ értékeit az alábbi két egyenletből kell meghatározni:

$$h_{s,1} + h_{s,2} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{s-1} \alpha_{i,1} + h_{s,1} \cdot \alpha_{s,1} = \sum_{i=s+1}^n \alpha_{i,2} + h_{s,2} \cdot \alpha_{s,2}.$$

Alkalmazzuk ezeket a megfontolásokat egy konkrét példán. Tegyük fel, hogy három különböző forgácsológépen (esztergapad, revolverpad és automata) két különböző alkatrészből álló szerelvényt kell megmunkálni. A gépeknek az egyes alkatrészekre vonatkozó műszakteljesítményeit az alábbi táblázat foglalja össze. (Az adatok db/műszakban adottak.)

Alkatrész	Gép		
	Eszterga	Revolver	Automata
I	30	60	30
II	60	90	80

A szükséges arányok most így alakulnak:

$$\frac{60}{30} = 2; \quad \frac{90}{60} = 1,5 \quad \text{és} \quad \frac{80}{30} = \frac{8}{3}.$$

Növekvő sorrendbe rendezve:

$$\frac{2}{3} < 2 < \frac{8}{3}.$$

Ennek megfelelően átsorszámozzuk a gépeket:

1. revolverpad,
2. esztergapad,
3. automata.

A számításhoz szükséges $\alpha_{i,k}$ értékek tehát $\alpha_{11}=60$ $\alpha_{21}=30$ $\alpha_{31}=30$
 $\alpha_{1,2}=90$ $\alpha_{22}=60$ $\alpha_{32}=80$.
 $S=2$ értéket véve:

$$\sum_{i=1}^{S-1} \alpha_{i,1} = \alpha_{11} = 60 < \sum_{i=S}^n \alpha_{i,2} = \alpha_{22} + \alpha_{32} = 140$$

$$\sum_{i=1}^S \alpha_{i,1} = \alpha_{11} + \alpha_{21} = 90 > \sum_{i=S+1}^n \alpha_{i,2} = \alpha_{32} = 80.$$

Az optimális programot szolgáltató $h_{i,k}$ értékek közül azonnal felírhatjuk a következőket:

$$h_{1,1} = 1; \quad h_{3,1} = 0$$

$$h_{1,2} = 0; \quad h_{3,2} = 1,$$

míg $h_{2,1}$ és $h_{2,2}$ a

$$h_{2,1} + h_{2,2} = 1$$

$$60 + 30h_{2,1} = 80 + 60h_{2,2}$$

egyenletekből határozhatók meg.

Innen:

$$h_{2,1} = \frac{8}{9} \quad \text{és} \quad h_{2,2} = \frac{1}{9}.$$

A revolverpadon tehát teljes műszakban az első, az automatán csak a második alkatrészt kell gyártani; az esztergapad munkaidejét ezzel szemben meg kell osztani 8:1 arányban az első és a második alkatrész megmunkálása között.

A példán megfigyelhettük, hogy a megoldás lényege annak az S -nek megfelelő K_S arálynak a meghatározása, amelynek megfelelően a gépeket a kétféle termelési feladat között megosztjuk. Ha ez a

$$K_S = \frac{\alpha_{S,2}}{\alpha_{S,1}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

arány ismert, akkor kézben van a teljes megoldás. (λ_1 és λ_2 a példában szereplő két ún. „megoldóegyüttható”). Ugyanis azon i -kre, amelyekre

$$\frac{\alpha_{i,2}}{\alpha_{i,1}} < \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

vagy ami ugyanazt jelenti,

$$\lambda_1 \cdot \alpha_{i,1} > \lambda_2 \cdot \alpha_{i,2},$$

szükségképpen

$$h_{i,1} = 1 \quad \text{és} \quad h_{i,2} = 0.$$

Azon i -kre, amelyekre

$$\lambda_2 \cdot \alpha_{i,2} > \lambda_1 \cdot \alpha_{i,1}$$

$$h_{i,1} = 0 \quad \text{és} \quad h_{i,2} = 1$$

-t kell venni. Végül arra az i -re, amelyre

$$\lambda_1 \alpha_{i,1} = \lambda_2 \cdot \alpha_{i,2}$$

a megfelelő értékeket a

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{i,1} \cdot h_{i,1} = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,2} \cdot h_{i,2}$$

egyenlet alapján kell kiszámítani, figyelembe véve a $h_{i,1} + h_{i,2} = 1$ egyenlőséget is.

A kérdés mármost az, hogyan lehet a megoldást tetszőleges számú alkatrészről álló feladatra általánosítani. A szerző könyvében bebizonyítja, hogy ebben az esetben is visszavezethető az $m \cdot n$ darab ismeretlen $h_{i,k}$ szám meghatározása m darab $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ megoldóegyüttható megkeresésének a feladatára.

Mindenekelőtt könnyen meg lehet mutatni, hogy a vizsgált feladatot egy vele teljesen egyértelmű más megfogalmazásban is felvethetjük. Nevezetesen a legyártott komplett szerelvények számát nyilvánvalóan mindig azon alkatrész száma határozza meg, amelyből a legkevesebbet állítottak elő. Vagyis az optimumfeltétel helyett (ti. $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ közös értéke legyen maximális) azt is mondhatjuk, hogy maximalizálandó:

$$\min (Z_1, Z_2, \dots, Z_m).$$

Ezek után bevezetjük a megoldóegyütthatók fogalmát. A vizsgált feladatra vonatkoztatva, megoldóegyütthatónak nevezzük a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ($\lambda_k \geq 0$ és nem mind zérus) m számból álló számrendszert, ha minden i -re tekintjük a következő szorzatokat

$$\lambda_1 \cdot \alpha_{i,1}; \lambda_2 \cdot \alpha_{i,2}, \dots, \lambda_m \cdot \alpha_{i,m}$$

és t_i -vel jelölve ezek legnagyobbikát, úgy kapjuk az optimális programot szolgáltató $h_{i,k}$ értékeket, hogy

1. minden olyan k -ra $h_{i,k} = 0$, amelyre $\lambda_k \alpha_{i,k} < t_i$;

2. a többi $h_{i,k}$ -ra $\sum_{k=1}^m h_{i,k} = 1$ és $Z_1 = Z_2 = \dots = Z_m$.

Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy a megoldóegyütthatók ismeretében a feladatot megoldottuk. Ha a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ megoldóegyütthatókat tényleg megtaláltuk és a fenti módon meghatároztuk a $h_{i,k}^*$ számokat, akkor az ezek segítségével számított Z^* érték a lehető legnagyobb.

A $h_{i,k}^*$ számok rendszerére érvényes

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \right) Z^* &= \sum_{k=1}^m \lambda_k Z_k^* = \sum_{k=1}^m \lambda_k \sum_{i=1}^n \alpha_{i,k} \cdot h_{i,k}^* = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m (\lambda_k \cdot \alpha_{i,k}) h_{i,k}^* = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m t_i \cdot h_{i,k}^* = \sum_{i=1}^n t_i. \end{aligned}$$

Látható, hogy $\lambda_k \cdot \alpha_{i,k}$ helyett mindig t_i -t vettük. Ezt megtehetjük, mert ahol $\lambda_k \cdot \alpha_{i,k} < t_i$, ott $h_{i,k}^*$ amúgy is zérus.

Legyen mármost $h_{i,k}$ egy olyan tetszőleges számrendszer, amelyre

$$Z_1 = Z_2 = \dots = Z_m = Z.$$

Akkor

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \right) Z &= \sum_{k=1}^m \lambda_k Z_k = \sum_{k=1}^m \lambda_k \sum_{i=1}^n \alpha_{i,k} \cdot h_{i,k} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m (\lambda_k \cdot \alpha_{i,k}) h_{i,k} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m t_i \cdot h_{i,k} = \sum_{i=1}^n t_i. \end{aligned}$$

Ennek az egyenlőségnek és a fenti egyenletnek az egybevetése alapján

$$\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \right) Z \leq \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \right) Z^*,$$

illetve

$$Z \leq Z^*.$$

Vagyis a megoldóegyütthatók segítségével számított $h_{i,k}^*$ értékek tényleg az alapfeladat megoldását adták.

A feladat megoldása tehát abban áll lényegében, hogy meg kell határozni a megoldóegyütthatókat. Ez az alábbi szukcesszív módszerrel történhet. Nulladik közelítésként kiindulunk egy $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0$ véletlen számsorozatból. Képezzük a

$$\lambda_1^0 \cdot \alpha_{i,1}; \lambda_2^0 \cdot \alpha_{i,2}; \dots; \lambda_m^0 \cdot \alpha_{i,m}$$

szorzatokat és mindazon k indexekre, amelyekre a megfelelő szorzatok (rögzített i -t tekintve) nem maximálisak,

$$h_{i,k} = 0$$

-t veszünk.

Az ilyen véletlen számsorozatok esetében rendszerint egy maximális akad csak a szorzatok között, ezért adott i -re az összes $h_{i,k}$ -t zérussal egyenlőnek kell venni, kivéve egyet, amelynek az értéke ilyenformán szükségképpen: 1. Tehát a $h_{i,k}$ értékek egyértelműen meghatározottak, aminek következtében a Z_k értékek is meghatározott

$$Z_1^0, Z_2^0, \dots, Z_m^0$$

nagyságoknak adódnak. De nyilvánvaló, hogy ezek egymás között általában nem lesznek egyenlők. A további lépések során ezért a λ_k^0 értékeket úgy kell megváltoztatni, hogy a Z_k értékek egymással egyenlőekké váljanak.

Tudjuk, hogy az optimumot akkor érjük el, ha

$$\min(Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$$

maximális értéket vesz fel. Az előbb kapott $Z_1^0, Z_2^0, \dots, Z_m^0$ számok közül legyen Z_s^0 a legkisebb. Ha most minden λ_k^0 értékét változatlanul hagyjuk, de λ_s^0 -t megfelelően nagyobb számmal helyettesítjük, akkor a legtöbb esetben a $\lambda_s \cdot \alpha_{i,s}$ szorzatok minden i -re maximálisak lesznek a saját sorukban. Ezután $h_{i,s}$ -et egynek véve, Z_s^0 -nál nagyobb értéket kapunk Z_s -re. Ezáltal rendszerint a $\min(Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$ is nőtt.

A megoldóegyütthatók megkeresésének útja éppen abban van, hogy a véletlenül választott λ_k^0 értékek sorozatos megváltoztatása révén növeljük az elmaradó Z_k értékeket és így fokozatosan közelítjük meg a keresett extrémumot. Persze az egyes alacsony Z_k értékek növelése mellett lehetséges a kiugróan magas Z_k értékek csökkentése is. Nagyobb számú változó esetében azonban megfelelő rendszert kell ebben a számolásban követni, különben nincs biztosítva, hogy a programot minden lépéssel javítjuk és véges számú lépésben be is fejezzük.

A szerző az alábbi példán mutatja be az algoritmust. Három különböző kötöttségű talajból három különböző eszkávátor segítségével a legrövidebb idő alatt 20—20 000 m³ földet kell kitermelni. A gépek egyenletes termelési ütemét feltételezve — ez akkor lesz nyilvánvalóan a legkisebb, ha az óránkénti összteljesítmény maximális.

Az egyes gépeknek a különböző talajfajtákra vonatkozó óránkénti teljesítményét az alábbi táblázat foglalja össze (az adatok m³/órában)

Gép(i) \ Talaj(k)	A	B	C
I	105	107	64
II	56	66	38
III	56	83	53

A λ_k^0 számsorozat értékeinek célszerű a $\sum_{i=1}^n \alpha_{i,k}$ összeg reciprok értékével arányos mennyiséget választani:

$$\lambda_k^0 = \frac{P}{\sum_{i=1}^n \alpha_{i,k}},$$

ahol P tetszőleges szám. Legyen példánkban mondjuk $P=1000$. Így azt kapjuk, hogy

$$\lambda_1^0 = \frac{1000}{276} = 3,62; \quad \lambda_2^0 = \frac{1000}{160} = 6,25; \quad \lambda_3^0 = \frac{1000}{192} = 5,218.$$

Képezzük az $\alpha_{i,k}$ elemek és λ_k^0 szorzatát minden i -re. Vagyis a tábla sorát rendre szorozzuk λ_1^0 , λ_2^0 és λ_3^0 -val. Minden oszlopban (minden i -re) kiválasztjuk a legnagyobb elemet és aláhúzzuk. Ezekhez $h_{i,k}=1$ -t, a többihez $h_{i,k}=0$ -t rendelünk.

Ezután képezzük az $\alpha_{i,k} \cdot h_{i,k}$ szorzatokat és ezeket soronként összegezve, kiszámítjuk a Z_k értékeit. A nyert értékeket táblázatba foglaljuk:

Nulladik közelítés

$\lambda_k \cdot \alpha_{i,k}$			$\alpha_{i,k} \cdot h_{i,k}$			Z_k
<u>381</u>	388	231	105×1	107×0	64×0	105
349	412	237	56×0	66×0	30×0	0
292	<u>432</u>	<u>276</u>	56×0	83×1	53×1	136

A Z_k értékek közül Z_2 maradt el a legjobban. Ezért λ_2^0 -t megnöveljük. Ennek érdekében korrekciós együtthatót alkalmazunk. A második sorban megkeressük azt az elemet, amely viszonylag a legközelebb áll oszlopa maximális eleméhez. Ez ebben az esetben a 412. A korrekciós együtthatót úgy választjuk meg, hogy a korrigált λ_2^0 révén a 412 helyébe 432 kerüljön. Vagyis

$$\lambda_2^{(1)} : \lambda_2^0 = 432 : 412 = 1,05.$$

A $\lambda_k \cdot \alpha_{i,k}$ soraiban az első és a harmadik sort változatlanul leírjuk és a második sor minden elemét megszorozzuk a korrekciós együtthatóval. Így kapjuk az első közelítésben használandó $\lambda_k^{(1)} \cdot \alpha_{i,k}$ értékeket. A maximálisakat minden oszlopban ismét aláhúzzuk. Így most már közvetlenül felírhatjuk a $h_{2,2}$ és $h_{2,3}$ kivételével az összes $h_{i,k}$ számokat. Azok ugyanis mind vagy zérusok vagy egy az értékük. A $h_{2,2}$ és $h_{2,3}$ értékeit viszont módunkban áll úgy meghatározni, hogy

$$Z_2 = Z_3$$

legyen. Mivel $h_{2,2} + h_{2,3} = 1$, ezért $h_{2,3} = 1 - h_{2,2}$. A $Z_2 = Z_3$ feltétel:

$$66 \cdot h_{2,2} = 83(1 - h_{2,2}) + 53,$$

vagyis

$$h_{2,2} = 0,915$$

$$h_{2,3} = 0,085.$$

Az eredményeket ismét táblázatba foglaljuk.

Első közelítés

$\lambda_k \cdot \alpha_{i,k}$			$\alpha_{i,k} \cdot h_{i,k}$			Z_k
<u>381</u>	388	231	105×1	107×1	64×0	105
365	<u>432</u>	249	56×0	$66 \times 0,915$	38×0	60,2
292	<u>432</u>	<u>276</u>	56×0	$83 \times 0,085$	53×1	60,2

Látható, hogy $Z_1 \neq Z_2 = Z_3$. Tehát vagy Z_2 -t, illetve Z_3 -at kell növelnünk, vagy Z_1 -t kell csökkenteni. Most az utóbbi a célszerű.

Ennek érdekében $\lambda_1^{(1)}$ -re egynél kisebb korrekciós együtthatót kell bevezetni, mégpedig olyat, hogy a korrigált $\lambda_1^{(1)}$ alkalmazása révén az első sor maximális eleme egybeessék saját oszlopa hozzá legközelebb eső elemével. Ezért

$$\lambda_1^{(2)} : \lambda_1^{(1)} = 365 : 381 = 0,958.$$

Ezzel a korrekciós együtthatóval megszorozzuk az első sor elemeit és a második, harmadik sor elemeit változatlanul leírjuk. Aláhúzzuk minden oszlopban a legnagyobb elemeket. Az első és a második oszlopban kettőt-kettőt találunk. Ennek megfelelően négy $h_{i,k}$ értékét kell összefüggések alapján meghatározni; míg a többi azonnal felírható. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$h_{1,1} = x \quad \text{és} \quad h_{2,2} = y.$$

Akkor

$$h_{1,2} = 1 - x \quad \text{és} \quad h_{2,3} = 1 - y.$$

x -t és y -t úgy határozzuk meg, hogy

$$Z_1 = Z_2 = Z_3$$

legyen.

$$Z_1 = 105x; \quad Z_2 = 56(1-x) + 66y \quad \text{és} \quad Z_3 = 83(1-y) + 53.$$

Innen

$$105x = 56(1-x) + 66y = 83(1-y) + 53 = Z$$

$$x = \frac{1}{105} Z; \quad y = \frac{136}{83} - \frac{1}{83} Z.$$

Behelyettesítve ezeket a középső egyenletbe:

$$164,2 - 0,532Z - 0,795Z = Z,$$

ahonnan is

$$Z = 70,8 \quad \text{és} \quad x = 0,67; \quad y = 0,785.$$

Megkaptuk a második közelítés $h_{i,k}$ értékeit. Ezek egyben az optimális megoldást is megmutatják, mint ahogy ez a következő táblából kitűnik.

Második közelítés

$\lambda_k \cdot \alpha_{i,k}$			$\alpha_{i,k} \cdot h_{i,k}$			Z_k
<u>365</u>	<u>372</u>	<u>222</u>	$105 \times 0,67$	107×0	64×0	70,8
<u>365</u>	<u>432</u>	<u>249</u>	$56 \times 0,33$	$66 \times 0,785$	38×0	70,8
<u>292</u>	<u>432</u>	<u>276</u>	56×0	$83 \times 0,215$	53×1	70,8

A nyert $Z = 70,8 \text{ m}^3/\text{óra}$ maximális óraterjesztményt jelent azzal a feltétellel, hogy mindhárom fajta talajból egyenlő mennyiséget kell kitermelni. Mivel minden talajfajtából $20\,000 \text{ m}^3$ fejtendő, az egész munka elvégzésének legrövidebb lehetséges ideje

$$20\,000 : 70,8 = 282$$

óra. Az iteráció utolsó lépésénél talált $h_{i,k}$ értékeket 282-vel szorozva megkapjuk, hány órát kell az egyes gépeknek a különböző talajokon dolgozniuk. Ezt foglalja össze a következő tábla.

Talaj \ Gép			
	A	B	C
I	190	—	—
II	92	222	—
III	—	60	282
	282	282	282

KANTOROVICS ezután felhívja a figyelmet arra, hogy bizonyos esetekben előállhatnak a megoldás során olyan bonyodalmak, amelyek az algoritmus vázolt útjának bizonyos módosítását kívánják. Majd megmutatja, hogy a megoldóegyütthatók segítségével a második és harmadik alapeladat is tárgyalható.

A könyv második függelékében egy konkrét vállalat optimális kapacitáskihasználási számításai olvashatók teljes részletességgel. Ezt a számítást a szerző módszere alapján A. I. JUGYIN végezte el.

Végül a harmadik függelékben KANTOROVICS két bizonyítást is ad arra vonatkozóan, hogy az algoritmus alkalmazása során feltételezett megoldóegyütthatók minden esetben valóban léteznek is. Az első bizonyítás analitikus úton, a másik geometriai módszerekkel igazolja a megoldóegyütthatók létezését.

Az alábbiakban bemutatjuk a geometriai megfontolásokon alapuló bizonyítást. Tekintsük az összes lehetséges $\{h_{i,k}\}$ számból álló rendszereket, ame-

lyekre $h_{i,k} \geq 0$ és $\sum_{k=1}^m h_{i,k} = 1$. Minden $h_{i,k}$ számrendszer alapján meghatározhatók a megfelelő $Z_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,k} \cdot h_{i,k}$ értékek. Az összes lehetséges $\{h_{i,k}\}$ rendszerhez tartozó $(Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$ értékrendszerek — mint az m dimenziós euklidesi tér pontjai — egy meghatározott konvex halmazt alkotnak (K).

Tekintsük ezután azon pontok halmazát, amelyekre $Z_1 \geq C$; $Z_2 \geq C, \dots$, $Z_m \geq C$, vagy ami ugyanaz, tekintsük a

$$\min(Z_1, Z_2, \dots, Z_m) \geq C$$

feltételt kielégítő pontok konvex halmazát $|H_C|$.

Jelöljük C^* -gal a $Z_1 = Z_2 = \dots = Z_m$ maximális értékének a $\min(Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$ maximális értékével megegyező közös extrémumát. Akkor a K halmaz minden pontjára

$$\min(Z_1, Z_2, \dots, Z_m) \leq C^*.$$

A K halmaznak tehát nincs H_{C^*} -gal közös belső pontja, mivel ez utóbbi minden belső pontjára

$$\min(Z_1, Z_2, \dots, Z_m) \geq C^*.$$

Így K és H_{C^*} csak közös határpontokkal rendelkeznek, ezek egyike a

$$(C^*, C^*, \dots, C^*)$$

pont lesz.

MINKOVSZKI tétele alapján azonban ezen a ponton átfektethető egy olyan sík, amely elválasztja egymástól a két konvex halmazt. Ennek a síknak az egyenlete

$$\lambda_1^* Z_1 + \lambda_2^* Z_2 + \dots + \lambda_m^* Z_m = C^*$$

alakú, ahol

$$\lambda_1^* + \lambda_2^* + \dots + \lambda_m^* = 1.$$

A C^* tartomány alakjából közvetlenül nyilvánvaló, hogy $\lambda_k^* \geq 0$. Bebizonyítható mármint, hogy az elválasztó sík egyenletében szereplő együtthatók a megoldóegyütthatók.

Legyen ugyanis $\{h_{i,k}^*\}$ a $Z_1 = Z_2 = \dots = Z_m$ egyenlőségnek megfelelő számrendszer. Jelöljük t_i -vel a

$$\lambda_1^* \cdot \alpha_{i,1}; \lambda_2^* \cdot \alpha_{i,2}; \dots; \lambda_m^* \cdot \alpha_{i,m}$$

szorzatok közül a legnagyobbat.

Mivel a K halmaz az elválasztó sík egyik oldalán fekszik, ezért minden $(Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$ pontjára

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k^* Z_k \leq C^*,$$

vagy ami ugyanaz, tetszőleges megengedett $\{h_{i,k}\}$ -kra

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k^* \sum_{i=1}^n \alpha_{i,k} \cdot h_{i,k} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m (\lambda_k^* \cdot \alpha_{i,k}) h_{i,k} \leq C^*.$$

Ha speciálisan $h_{i,k} = 1$ -t választunk azon k -kra, amelyekre $\lambda_k^* \cdot \alpha_{i,k} = t_i$, akkor

$$\sum_{i=1}^n t_i \leq C^*.$$

Másrészt

$$C^* = \sum_{k=1}^m \lambda_k^* Z_k^* = \sum_{k=1}^m \lambda_k^* \sum_{i=1}^n \alpha_{i,k} \cdot h_{i,k}^* = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m (\lambda_k^* \cdot \alpha_{i,k}) h_{i,k}^* \leq \sum_{i=1}^n t_i \sum_{k=1}^m h_{i,k}^* = \sum_{i=1}^n t_i.$$

Ebben a második egyenlőtlenségben az egyenlőség akkor áll fenn, ha minden $\lambda_k^* \cdot \alpha_{i,k} < t_i$ esetben $h_{i,k}^* = 0$ -t veszünk. Mivel fentebb azt láttuk, hogy

$$\sum_{i=1}^n t_i \leq C^*, \text{ ezért az egyenlőségnek fenn is kell állnia.}$$

Vagyis azt találtuk, hogy azon $h_{i,k} = h_{i,k}^*$ számokra, amelyek nem maximális szorzatoknak felelnek meg, fennáll a zérussal való egyenlőség feltétele; míg a többiekre a $Z_1 = Z_2 = \dots = Z_m$ feltétel. Ezzel azonban sikerült az első alapfeladat vonatkozásában tetszőleges esetre is bebizonyítani a megoldóegységesség létezését.

KANTOROVICS könyve 20 évvel ezelőtt jelent meg. Igaz, hogy megjelenése után a matematikai módszerek közgazdasági alkalmazása és a további kutatás e téren hosszú ideig nem fejlődött kielégítően a szocialista gazdaság viszonyai között. Csak az utóbbi években kezdődött ezen a területen öröndetes változás. Az aggályok és kétségek azonban még ma sem tűntek el teljesen a matematikai módszerekkel szemben. Sokan ragaszkodnak a régi módszerekhez és húzódoznak az újtól. Már csak ezért is érdemes — befejezésül — teljes fordításban közölni Kantorovics professzor 1939-ben leírt érveit, amelyek közül nem egy ma is meggyőzően hat:

„Válasz néhány elvi ellenvetésre

Mint már rámutattunk, teljesen valószínűnek tartjuk, hogy egyik vagy másik általunk elemzett példa (és lehet, hogy egész kérdéskörök is) a gyakorlati szakemberek részéről ellenvetésbe ütközik. Lehetségesnek tartjuk, hogy egyes esetekben ezek az ellenvetések annyira megalapozottak lehetnek, hogy el kell állnunk az alkalmazás valamelyik területétől. Azonban — ilyen speciális, részleges ellenvetések mellett, találkozunk kellett (a gazdasági szakemberek többségének szerfölött kedvező véleménye mellett) egyesek részéről

olyan általános ellenvetésekkel, amelyek lényegében tagadták a matematikai módszerek alkalmazásának a lehetőségét műszaki-gazdasági problémák megoldására a szervezés és tervezés területén. Éppen ezeket az általános ellenvetéseket akarom itt megvizsgálni.

Ezek közül az első a következőkben áll. A különböző konkrét gyakorlati feladatoknál a viszonyok olyan bonyolultak, hogy lehetetlen az összefüggéseket matematikailag figyelembe venni és a kapott egyenleteket úgy sem lehet megoldani.

Ezzel kapcsolatban két megjegyzést tehetünk. Először is — mint erre már felhívtuk a figyelmet — a bemutatott módszer igen hatásos és hajlékony: azaz lehetővé teszi a megoldást elég bonyolult helyzetekben, figyelembe lehet venni egy sor kiegészítő feltételt is, az alkalmazás során különböző változatok lehetségesek (úgyhogy mindig ki lehet választani az alkalmazás legkedvezőbb módszerét).

Másodszor, ha némelyik gyakorlati tényező nincs is figyelembe véve — akkor a legelőnyösebb megoldás megtalálása után korrekciót lehet alkalmazni és ennek során számba lehet venni az elhanyagolt tényezőt is. Ez annál inkább lehetséges, mert az adott módszer a legelőnyösebb variáns meghatározásával egyidejűleg megmutatja, hogy mely variánsok adnak a legkedvezőbbhöz közelfekvő megoldást és ezért a korrekciók alkalmazásánál lehetőség van egy kis eltérésre a legelőnyösebb megoldástól a gyakorlati végrehajthatóság érdekében.

Meg kell még mondani, hogy az idézett ellenvetést ugyanilyen joggal ki lehetne jelenteni az elméleti — speciálisan — matematikai módszerek műszaki kérdésekre való alkalmazására is. Köztudomású azonban, hogy milyen nagyra értékelik a műszaki szakemberek a jelenségeket még csak közelítőleg leíró matematikai formulákat. Az ilyen formulák szerfölött értékes iránytűként szolgálnak mind a kísérleteknél, mind a számításoknál és a műszaki tervezésben. Annál inkább értékesnek kell lennie egy olyan módszernek, amely lehetővé teszi bonyolult helyzetben egész sor feltétel egyidejű figyelembevételét.

A második ellenvetés az, hogy a módszer alkalmazásához nagyszámú különböző adat szükséges (pl. $\alpha_{i,k}$ -k az első alapeladatban stb.), azonban lehetséges, hogy ilyenek nem állnak rendelkezésre és akkor a módszer alkalmazhatatlan.

Erre azt kell válaszolni, hogy a számításhoz szükséges adatok (kihasználási normák különböző gépekre és berendezésekre, a rendelkezésre álló anyagok mennyisége, fajlagos felhasználási adatai stb.) elengedhetetlenek mindenféle más célra is — normázás, bérezés, anyagfelhasználás ellenőrzése, elszámolások stb. — és meg kell lenniük minden ésszerűen dolgozó üzem-

ben. Röviden szólva, ezek ugyanolyan mértékben szükségesek bármilyen terv összeállításához, mint a legjobb tervnek a módszerünkkel történő kiszámításához és ezért az üzemnek ezekkel az adatokkal rendelkeznie kell.

Mégis bizonyos esetekben előfordulhat, hogy ilyen adatok nincsenek; pl. egy építkezéshez anyagnak kell beérkeznie — hogy milyen anyagnak, azt nem tudják — de mindenesetre azt még aznap munkába kell venni. Esetleg nem azokat az anyagokat küldték, amelyeket betervezték stb. Természetesen abban a néhány üzemben, ahol ilyen primitív fokon áll a gazdasági vezetés színvonala — mindenféle tervezés és még kevésbé a leggazdaságosabb módon való tervezés lehetetlen. Azonban, ha módszereink felhasználásának az óhaja valamiféle ösztönzést szolgáltat az ilyen hozzánemértő vezetés felszámolásához, akkor ez csak bizonyíték a módszerek javára.

A harmadik ellenvetés abban áll, hogy a kiinduló adatok egy sor esetben kétségesek és csak rendkívül közelítően ismeretesek (pl. különböző kultúrák hozama, talajok hidromechanikus megmunkálásához szükséges vízmenyiség, és más szükséges adat némely felidézett példában), ezért az ezen adatokon alapuló számítás hibásnak bizonyulhat.

Itt mindenekelőtt meg kell mondani, hogy ugyanazon adatokat kell használni a tervnek mindenféle más módszerrel történő kiválasztásánál és nincsen ok azt gondolni, hogy ezek kétségesége és pontatlansága nagyobb negatív szerepet játszik az optimális terv szempontjából, mint valamilyen véletlen alapon kiválasztott terv szempontjából.

Mindazonáltal nem zárjuk ki annak a lehetőségét, hogy ilyen esetekben a tervnek a módszerünkkel kiszámított optimális variánsa a hibás adatok eredményeképpen szintén hibásnak bizonyulhat.

Feltesszük azonban, hogy nagyszámú alkalmazás esetén a legmegfelelőbb variáns kiválasztására még ilyen kétséges adatok esetében is módszerünk valószínűleg pozitív eredményt adhat. Ezt a gondolatot a következő egyszerű példával világítjuk meg. Ha két tojás közül kiválasztjuk a nagyobbikat — akkor ez a kiválasztás kedvezőtlen lehet — mert esetleg a nagyobbik tojás romlott. Ha azonban egy ládából 1000 tojás közül kiválasztjuk az 500 legnagyobbat, akkor erősen valószínűtlen, hogy a kiválasztásnak ez a módja előnytelen lenne.

A negyedik ellenvetés abban áll, hogy a szokványos tervvariánsokhoz képest az optimális nem jelent viszonylag nagy megtakarítást, sok esetben mindössze 4—5 %-ot.

Ezzel kapcsolatban meg kell azonban mondani, hogy az optimális variáns alkalmazása semmiféle többletkiadást nem igényel a szokványos variánsokkal szemben, a teljesen jelentéktelen számítási költségeken kívül. Másodszor, a módszer alkalmazása nemcsak egyetlen véletlen kérdésben várható,

hanem sokban; sőt, lehetséges, hogy a népgazdaság ágainak többségében és ilyen esetben nemcsak 1 %, de a századrész minden tizedrésze is óriási összegeket jelent.

Az ötödik ellenvetés abban rejlik, hogy egy sor esetben a módszer alkalmazása különböző szervezési jellegű akadályok miatt látszik alkalmazhatatlannak. Olyan akadályokról van itt szó, amelyek a terv, a költségvetés stb. elfogadásának fennálló jogszabályaival kapcsolatosak: például, ha bizonyos anyagokat vagy berendezéseket egyszer már meghatározott módon a terv keretei között elosztottak az üzemek között, akkor ezt az elosztást az adott tervidőszak folyamán nem lehet megváltoztatni.

Ez az ellenvetés természetesen nem lényeges. Ha általánosan elfogadottá válik, hogy az optimális tervvariánsok alkalmazása a népgazdaság számára lényeges előnyökkel jár, akkor ennek érdekében bizonyos változtatásokra lesz szükség a költségvetések, tervezetek és tervek elfogadásának jelenleg érvényes rendjében. Nem kétséges, hogy ezeket a szükséges változtatásokat végre is fogják hajtani."

(Beérkezett: 1959. X. 20.)

*A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete*