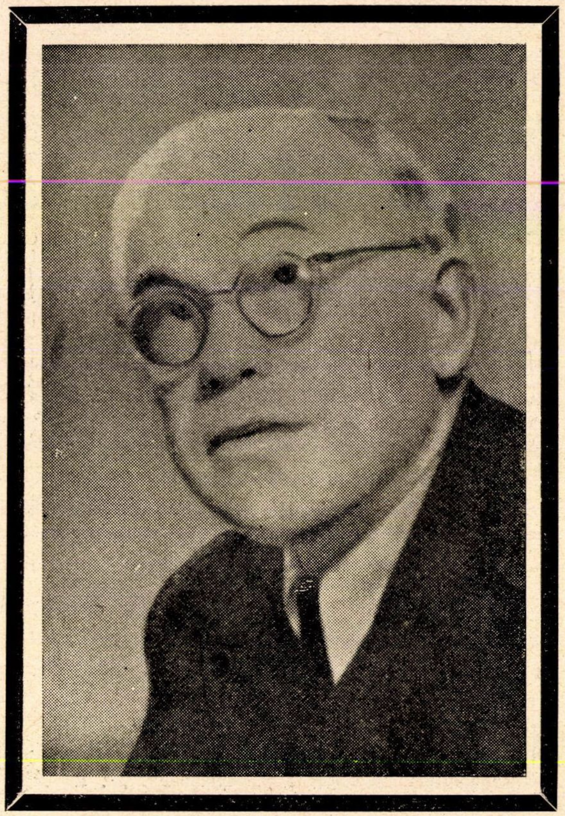

FEJÉR LIPÓT

1880—1959

A francia tudományos akadémia heti értesítője, a híres „Comptes rendus hebdomodaires des séances de l'Académie des Sciences" (röviden Comptes-Rendus), az 1900. december 10-i ülésről szóló füzetében korszakalkotó cikket közölt „*Sur les fonctions bornées et intégrables*" cím alatt, amely RIEMANN, CANTOR és DU BOIS-REYMOND munkái után a trigonometrikus sorok elméletében új utat tört. Megalapította közelebbről a FOURIER-féle sorok szummábilitási elméletét az akkor már jóideje megrekedt konvergencia-elmélettel szemben. A FOURIER-sort egyszerűen a számtani közepek módszerével szummálta, s ezzel mintegy megadta a létjogosultságot HÖLDER és CESÀRO szummáló eljárásának. A cikk szerzője FEJÉR LIPÓT, a budapesti egyetem negyedéves matematika-fizika szakos hallgatója volt. Még nem töltötte be 21-ik évét ekkor, midőn élete legnagyobb felfedezésével lépett a matematikus világ elé.

Pécsett született, 1880. február 9-én. Szülei, WEISZ SAMU kiskereskedő és felesége GOLDBERGER VIKTÓRIA németül beszéltek otthon, s így ő is németül kezdett el beszélni, bár később a magyar lett az igazi és imádott anyanyelve. A német beszéddel kapcsolatos a következő megható kis történet, amelyet könnyezve mesélt el nekem. Kisgyerek korában diftériába esett s a betegség oly súlyosra fordult, hogy már lemondtak róla. Egy este az orvos azzal ment el, hogy a kisfiú nem éri meg a reggelt. A kétségbeesett szülők ott sírtak az ágya mellett, midőn egyszerre a kis beteg megszólalt: „Weint Ihr nicht, der liebe Gott wird schon helfen". Valóban, a betegség megfordult és a kis „Toldi" (mert selypítve így mondta a Poldi nevet) életben maradt.

Nagyon eleven gyerek volt. Kedves humorral mesélte, hogy kisiskolás korában egyszer a hittanórán annyira rakoncátlankodott, hogy a hittanár haragjában fejéhez vágta a hittankönyvet. „De szerencsére csak Mózes Öt Könyve volt", tette hozzá pajzánul. A reáliskola alsóbb osztályaiban a számtanból instruktort fogadtak mellé, s csak miután „felszabadult a tízes számrendszer alól", lett jó matematikussá. Azután is olyan rosszul tanult, hogy tanárai tanácsára apja egy időre kivette az iskolából és befogta a kiskereskedésbe. Mint jóízűen mesélte, itt igen ügyesen tudott *egy* kézmozdulattal levágni megfelelő darabot a vég vászonból vagy szövetből. És esténként, üzletzáráskor ő vitte be a segéddel az „Auslagot". Később mégis visszakerült a reáliskolába. Az akkoriban nemrég megindult Középiskolai Matematikai Lapoknak állandó munkatársa volt s már itt megmutatta oroszlánkörmeit. Az érettségin franciából meg akarták buktatni, jóllehet ő volt az egyetlen az osztályból, aki e nyelvet használta is, amennyiben írogatott francia elemi matematikai lapba. De végre jobb belátásra jutottak és „beírtak hármasokat".

Érettségi után, 1897. őszén felkerült Budapestre s szülei kívánságára a műegyetemre iratkozott be. Az akkori Mathematikai és Physikai Társulat IV. tanulóversenyén feltűnt azzal, hogy az egyik feladat megoldásában többet bizonyított be a megkívántnál, de csak II. díjat nyert. Tanulmányait azután hamarosan az egyetemen folytatta, mint tanárjelölt. Itt azonban csak a szakvizsgát tette le, a tanári oklevelet nem szerezte meg. Elhatározó befolyással volt életére, hogy mint harmadéves, az 1899/1900 tanévet Berlinben végezte. Itt talált magára, mint mondotta, figyelmét a FOURIER-sorok kötötték le. Különösen H. A. SCHWARZ professzor volt rá nagy hatással. Ezt mindjárt kezdetben meghódította a talpponti háromszög minimum-tulajdonságának szellemes új bizonyításával, amelynek előnyét SCHWARZ maga is kiemelte a magáéval szemben. Meleg barátságot kötött E. SCHMIDTtel és különösen C. CARATHÉODORYval. Mint kedves epizódot mondta el, hogy első találkozásukkor SCHWARZ szemináriumában CARATHÉODORY éppen akkor lépett a terembe, midőn a professzor FEJÉR említett bizonyítását dicsérte.

Berlinből hazatérvén, 1900. nyárutóján jutott nagy felfedezésére. Miután A. PRINGSHEIMtől értesült, hogy a tétel új, dolgozatát beküldte a Comptes-

Rendus számára. Ez volt a fent idézett cikk, amely 1900. december 10-én került bemutatásra a párizsi tudományos akadémiában. Ezzel megkezdődött (eltekintve a Mat. és Fiz. Lapokba írt legelső cikkétől) felfedezésekben gazdag munkássága, amelynek főbb pontjait az alábbiakban ismertetem.

Tanulmányom, amelynek célja valamilyen képet adni Fejér eredményeiről a teljességre törekvés igénye nélkül, a következő tárgykörök szerint tagozódik:

1. A FOURIER-sor szummábilitása; szummálható trigonometrikus sorok.

2. A folytonos függvény FOURIER-sorának különböző szingularitásai; konjugált trigonometrikus sorok.

3. A függvény szakadásának meghatározása FOURIER-féle sorából.

4. A LAPLACE-sor szummábilitása.

5. Algebrai egyenletek gyökeinek helyzete; hézagos hatványsorok.

6. Korlátos hatványsorok.

7. A hatványsornak a konvergencia-körön való viselkedése; aszimptotikus értékek meghatározása.

8. Komplex interpoláció.

9. Általánosított LEGENDRE-polinomok; trigonometrikus sorok és hatványsorok többszörösen monoton együtthatósorozattal.

10. A FOURIER-sor magasabbrendű közepeinek diszkussziója.

11. Harmonikus és trigonometrikus polinomok.

12. Valós interpoláció és közelítő kvadratúra.

Az egyes tárgykörökön belül sem törekszem teljességre. Csak főbb dolgozatait idézem s azokból célomnak megfelelően ragadok ki egyes tételeket.

FEJÉR munkái hatásának nyomon követése külön tanulmányt igényelne. Itt csak a közvetlenül kapcsolódó irodalomra terjeszkedem ki különböző mértékben, aszerint, amint azt fontosnak tartom, ill. tudásom vagy a hely megengedi.

*

1. A bevezetőben említett rövid, de alapvető kis Comptes-Rendus cikket egész cikksorozat követte ugyanarról a tárgyról, annak mind bővebb kifejtését adva. Ehhez tartozott FEJÉR híres doktori értekezése: *Vizsgálatok a Fourier-féle sorok köréből,* Mat. és Fiz. Lapok, 11 (1902), 49—68 és 97—123. Betetőzése volt e cikksorozatnak a világhírű *Untersuchungen über Fouriersche Reihen,* Math. Annalen, 58 (1904), 51—69, amelyben klasszikus tömörséggel adja elő vizsgálatainak eredményeit, de lényegesen tovább is jut, mint disszertációjában. Már az utóbbiban bebizonyította alaptételét, amely FEJÉR *tétele* név alatt szerepel az irodalomban s már régen átment a tankönyvekbe:

Ha $f(x)$ a 2π szerint periodikus és a $0 \leqq x \leqq 2\pi$ intervallumban RIEMANN *szerint integrálható korlátos vagy nem korlátos függvény, akkor* FOURIER-*sora*[1]

$$s_0(x), s_1(x), \ldots, s_n(x), \ldots$$

részletösszegeinek számtani közepeire $n \to +\infty$ esetén

$$S_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_{n-1}(x)}{n} \to \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

minden olyan x helyen, ahol $f(x)$ folytonos vagy elsőfajú szakadása van, vagyis ahol az $f(x+0)$ és $f(x-0)$ jobb-, ill. baloldali határérték létezik és véges.

Amíg tehát maguk a részletösszegek valamely x helyen divergálhatnak még mindenütt folytonos függvény esetén is, amint azt már P. DU BOIS-REYMOND megmutatta, addig a részletösszegek számtani közepei minden folytonossági helyen a függvényértékhez, elsőfajú szakadási helyen a jobb- és baloldali határérték számtani közepéhez tartanak. Röviden kifejezve: *a* FOURIER-*sor valamely x folytonossági vagy elsőfajú szakadási helyen $(C, 1)$-szummábilis*[2] *és szummája $f(x)$, ill. $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$*. Ez volt FEJÉR nagy felfedezése, amelyet korlátos függvény esetére már az 1900. évi Comptes-Rendus cikkben közölt. E meglepően egyszerű tétel bebizonyításával FEJÉR felismerte, hogy a FOURIER-sor konvergenciájának kérdésénél sokkal egyszerűbb természetű e sor szummábilitásának kérdése. Tétele alapvető jelentőségre emelkedett, az újabb vizsgálatok egész sorának vált forrásává, a konvergens FOURIER-sor elméletét is átalakította. Ezek alapján FEJÉRt kell a FOURIER-sor modern

[1] A 2π szerint periodikus és a $(0, 2\pi)$ számközben integrálható $f(x)$ függvény FOURIER-sorának azt az

$$a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \cdots$$

trigonometrikus sort nevezzük, amelynek együtthatói

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ezeket a függvény FOURIER-*állandóinak* vagy FOURIER-*együtthatóinak* mondjuk.

[2] Valamely

$$c_0 + c_1 + \cdots + c_n + \cdots$$

végtelen sort E. CESÀRO után $(C, 1)$-*szummábilisnek* mondunk, ha az $s_0, s_1, \ldots$ részletösszegek számtani közepei véges határértékhez tartanak; ezt a

$$S = \lim \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n}$$

határértéket a sor *szummájának* nevezzük.

szummábilitási elmélete megalapítójának tekintenünk, mert bár az ún. POISSON-féle, valamint a RIEMANN-félének nevezett szummáló eljárás lényegében sokkal régebbi keletű, ezeket csak később fogták fel mint ilyeneket s maguk e szerzők még nem alkalmazták tudatosan.

A szóban forgó közepeknek, amelyeket *a* FOURIER-*sor* FEJÉR-*féle közepeinek* szokás nevezni, még az a figyelemre méltó tulajdonságuk van, hogy *korlátos függvény esetén ugyanazon m és M korlátok közé esnek, mint maga a függvény:*

$$m \leqq S_n(x) \leqq M \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

Ez egyszerűen következett a $S_n(x)$ számtani középnek FEJÉR által nyert

$$S_n(x)=\frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\frac{x}{2}}^{\pi-\frac{x}{2}} f(x+2\beta)\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta=\frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x+2\beta)\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 d\beta$$

integrálalakjából, amely FEJÉR-*féle integrálban*[3] a híres FEJÉR-*féle mag* $\left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 \geqq 0$. Ezt az integrált viszont az

$$\frac{1}{2}+\cos\vartheta+\cdots+\cos(n-1)\vartheta+\cdots$$

cosinus-sor

$$\sigma_{n-1}=\frac{1}{2}+\cos\vartheta+\cdots+\cos(n-1)\vartheta \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

részletösszegeinek számtani közepeit kifejező

$$\frac{\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-1}}{n}=\frac{1}{2n}\,\frac{1-\cos n\vartheta}{1-\cos\vartheta}=\frac{1}{2n}\left(\frac{\sin n\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\right)^2$$

képletből nyerte FEJÉR. E számtani közép nem-negatív volta egész tárgyalásában alapvető szerepet játszik, s ma az analistáktól állandóan használt alaptény.

Fontos kiegészítése az alaptételnek FEJÉR *approximáció-tétele*:

$S_n(x)\to f(x)$ *egyenletesen áll fenn minden olyan* (a, b) *zárt intervallumban, amelynek helyein* $f(x)$ *kivétel nélkül (az a helyen balról is, a b helyen jobbról is) folytonos.*

[3] Ma szokásosabb alakja

$$S_n(x)=\frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x+2t)+f(x-2t)]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt.$$

Vö. H. LEBESGUE, i. h.[11] 252 és 274.

Ezzel FEJÉR új, egyszerű bebizonyítását adta WEIERSTRASS második approximáció-tételének, amely tétel értelmében 2π szerint periodikus folytonos függvény trigonometrikus polinommal tetszőleges pontossággal egyenletesen megközelíthető. Ezen approximáció-tétele alapján sikerült FEJÉRnek a POISSON-féle integráltétel sorelméleti bizonyítása is, amelyet a matematikusok előtte sokáig hiába kerestek. Éppen ez a probléma terelte FEJÉRt arra az útra (H. A. SCHWARZ berlini előadásai nyomán), amely azután felfedezéséhez vezetett.

Ebben az Annalen-cikkben eddigi eredményein túlmenően már az általános trigonometrikus sorok szummáció-elméletét is megindította FEJÉR. A trigonometrikus sorba való fejtés egyértelműségére vonatkozó CANTOR-tétellel kapcsolatban felvetette a kérdést, hogy ha a trigonometrikus sor szummája mindenütt 0, következik-e ebből, miszerint az együtthatói is mind zérusok? Ezt függőben hagyta, de mintegy előkészítette az e kérdésre adandó feleletet, bebizonyítván RIEMANN ismert tételének következő analogonját:

Legyen

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

olyan trigonometrikus sor, amelyben $\frac{a_n}{n^2}$ *és* $\frac{b_n}{n^2}$ *korlátosak, és képezzük négyszeri tagonkénti integrációval a*

$$F(x)=\frac{a_0x^4}{24}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^4} \tag{2}$$

egyenletesen konvergens sort. Ha az (1) *sor valamely* x *helyen* $(C, 1)$*-szummábilis és szummája* $f(x)$, *akkor ott a* (2) *függvény általánosított negyedik differenciálhányadosa*

$$\lim_{h=+0}\frac{F(x+2h)-4F(x+h)+6F(x)-4F(x-h)+F(x-2h)}{h^4}=f(x).\ ^4$$

E tételt vette alapul RIESZ MARCELL a szummábilis trigonometrikus sorokra vonatkozó vizsgálatainál doktori értekezésében[5], ill. későbbi Annalen-cikkében[6], s ugyanitt mint RIEMANN *tételének kész analogonját* idézi FEJÉRnek ezt a téte-

[4] FEJÉR dolgozatában a $h=2t$ jelölést használja.

[5] RIESZ MARCELL, Összegezhető trigonometrikus sorok és összegezhető hatványsorok. *Mat. és Fiz. Lapok,* 19 (1910), 1—56, spec. 3, 9. E dolgozat mint doktori értekezés 1908-ban jelent meg.

[6] M. RIESZ, Über summierbare trigonometrische Reihen. *Math. Annalen,* 71 (1911), 54—75, spec. 55, 59.

lét. E. HILBbel együtt írt enciklopédia-cikkében[7] is megemlíti e tételt egy jegyzetben.

A matematikus világ gyorsan reagált FEJÉR felfedezésére. É. BOREL a divergens sorokról írt könyvének 1901. évi első kiadásában[8] megemlíti röviden jegyzet formájában FEJÉR 1900-ban írt Comptes-Rendus-cikkét, 1903-ban A. HURWITZ[9] már a FEJÉR-féle közepek felhasználásával bizonyítja be a PARSEVAL-tételt korlátos és RIEMANN szerint integrálható függvényekre, H. LEBESGUE[10] pedig 1905. évi Annalen-cikkében többek között lényegesen általánosítja is FEJÉR tételét, s a trigonometrikus sorokról írt és 1906-ban megjelent könyve[11] 50. §-ában külön tárgyalja a FEJÉR-féle szummáló eljárást. P. FATOU[12] ugyanakkor megjelent híres doktori értekezése részben szintén FEJÉR vizsgálataira támaszkodott. Amint FEJÉR elbeszéléséből tudom, É. BOREL nem sokkal az 1904. évi Annalen-cikk megjelenése után levélben értesítette, hogy „vizsgálatait előadta hallgatóinak s meg van győződve, miszerint FEJÉR összes eredményei rövidesen klasszikusakká fognak válni." Ez valóban be is következett. FEJÉR tételével, annak különböző irányú általánosításával és élesítésével nagy irodalom foglalkozott. CH.-J. DE LA VALLÉ POUSSIN[13] 1912-ben analízis-tankönyvének 2. kiadásában már közölte a LEBESGUE-féle általánosítás egyik bizonyítását, és FEJÉR tételének folyományaként is bemutatta a FOURIER-sor konvergenciájára vonatkozó DIRICHLET—JORDAN-tételt, a szummábilis sorokra vonatkozó HARDY—LANDAU-tétel felhasználásával. LEBESGUE tételének egy különösen egyszerű és rövid bizonyítását maga FEJÉR közölte későbbi dolgozatában: *Über die arithmetischen Mittel erster Ordnung der Fourierreihe,* Nachrichten der Ges. der Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1925, 13—17. Ez az általánosabb FEJÉR—LEBESGUE-tétel (így szeretném nevezni) a következő:

Ha a 2π szerint periodikus integrálható $f(x)$ függvényre nézve valamely x helyen létezik a

$$\lim_{h=+0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)dt = \lim_{h=+0} \frac{1}{h} \int_0^h \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} dt = f$$

[7] E. HILB—M. RIESZ, Neuere Untersuchungen über trigonometrische Reihen. *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften etc.*, II C 10, spec. 1218, [116] jegyzet.

[8] É. BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*, Paris 1901, spec. 88.

[9] A. HURWITZ, Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen. *Math. Annalen*, 57 (1903), 425—446, vagy *Mathematische Werke von Adolf Hurwitz I*, Basel 1932, 555—576, spec. §4.

[10] H. LEBESGUE, Recherches sur la convergence des séries de Fourier. *Math. Annalen*, 61 (1905), 251—280, spec. 274.

[11] H. LEBESGUE, *Leçons sur les séries trigonométriques*, Paris 1906.

[12] P. FATOU, Séries trigonométriques et séries de Taylor. *Acta Mathematica*, 30 (1906), 335—400.

[13] *Ch.-J. de la Vallée Poussin, Cours d'analyse infinitésimale*, 2[e] ed., Louvain 1912, t. II, p. 162—163.

integrálközépérték s ez egyben abszolút közép, vagyis

$$\lim_{h \to +0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t)-f|\,dt = 0,$$

akkor $f(x)$ FOURIER-sorának szeleteire

$$\frac{s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_{n-1}(x)}{n} \to f.$$

(Itt az integrálhatóság természetesen a LEBESGUE-féle értelemben veendő.)

1909-ben RIESZ MARCELL[14] egyelőre bizonyítás nélkül közölte FEJÉR tételének azt a nagymérvű általánosítását, hogy 2π periódusú és a $(0, 2\pi)$ számközben LEBESGUE szerint integrálható $f(x)$ függvény FOURIER-sorának bármely $k>0$ rendű CESÀRO-közepei[15] is a $\lim\limits_{h=+0} \frac{f(x+h)+f(x-h)}{2}$ értékhez tartanak, hacsak e határérték létezik az x helyen. Ezt azután tőle függetlenül S. CHAPMAN[16] is felfedezte és be is bizonyította. A későbbi bizonyítások közül talán a legegyszerűbb az, amelyet maga RIESZ MARCELL[17] közölt. 1913-ban G. H. HARDY[18] hasonlóképp általánosította a fenti FEJÉR—LEBESGUE tételt. Ugyanabban az évben ő és J. E. LITTLEWOOD[19] lényegesen élesítették FEJÉR

[14] M. RIESZ, Sur les séries de Dirichlet et les séries entières, *Comptes-Rendus,* 149 (1909), 309—312.

[15] Valamely

$$u_0+u_1+\cdots+u_n+\cdots$$

végtelen sor valós $k>-1$ rendszámú CESÀRO-közepei

$$\frac{C_n^{(k)}u_0+C_{n-1}^{(k)}u_1+\cdots+C_0^{(k)}u_n}{C_n^{(k)}} \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

ahol

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = C_0^{(k)}+C_1^{(k)}x+\cdots+C_n^{(k)}x^n+\cdots.$$

Vagyis az n indexnek megfelelő k-adrendű CESÀRO-közép az x^n együtthatója a CAUCHY-féle szorzással nyert $\frac{1}{(1-x)^{k+1}}\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ sorban, osztva x^n-nek az $\frac{1}{(1-x)^{k+1}}$ hatványsorából vett együtthatójával.

[16] S. CHAPMAN, On non-integral orders of summability of series and integrals. *Proceedings of the London Math. Soc.,* (2) 9 (1910 11), 369—409, spec. 390—396.

[17] M. RIESZ, Sur la sommation des séries de Fourier. *Szegedi Acta,* 1 (1922/23), 104—113, spec. 108—113.

[18] G. H. HARDY, On the summability of Fourier's series. *Proceedings of the London Math. Soc.,* (2) 12 (1913), 365—372.

[19] G. H. HARDY et J. E. LITTLEWOOD, Sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable. *Comptes-Rendus,* 156 (1913), 1307—1309.

tételét, bebizonyítván a FOURIER-sor *erős szummábilitását* is a $(0, 2\pi)$ intervallumban négyzetével együtt LEBESGUE szerint integrálható 2π periódusú függvény esetére, sőt megmutatták, hogy ha $f(x)$ ilyen függvény, akkor minden olyan x helyen, ahol létezik az

$$s(x) = \lim_{h=+0} \frac{f(x+h)+f(x-h)}{2}$$

határérték, a függvény FOURIER-sorának $s_0(x), s_1(x), \ldots$ szeleteire $n \to +\infty$ esetén

$$\frac{[s(x)-s_0(x)]^2+[s(x)-s_1(x)]^2+\cdots+[s(x)-s_{n-1}(x)]^2}{n} \to 0.$$

Ebből a CAUCHY-féle egyenlőtlenség alkalmazásával már következik, hogy egyben

$$\frac{|s(x)-s_0(x)|+|s(x)-s_1(x)|+\cdots+|s(x)-s_{n-1}(x)|}{n} \to 0,$$

ami éppen az erős szummábilitást jelenti. Ez maga után vonja, hogy

$$\frac{[s(x)-s_0(x)]+[s(x)-s_1(x)]+\cdots+[s(x)-s_{n-1}(x)]}{n} \to 0$$

vagyis a részletösszegek számtani közepei $s(x)$-hez tartanak, tehát FEJÉR tétele valóban folyománya ez élesebb HARDY—LITTLEWOOD-tételnek. E két szerző vázlatosan közölt bizonyítását utánuk FEKETE MIHÁLY[20] írta le részletesen s egyben azzal a kiegészítéssel, hogy a fenti limesrelációk egyenletesen állanak fenn minden olyan intervallum belső subintervallumában, amelyben a függvény folytonos. Maga FEJÉR két bizonyítást is közölt a HARDY—LITTLEWOOD-tételre egy későbbi dolgozatában: *Zur Summabilitätstheorie der Fourierschen und Laplaceschen Reihen,* Proceedings of the Cambridge Phil. Soc., 34 (1938), 503—509, spec. 506—509. Különben a tételt T. CARLEMAN[21] és mások tovább általánosították.

A FOURIER-sor tagonkénti differenciálására vonatkozó FEJÉR-féle eredményt, amelyet az említett Annalen-cikkben találunk (Math. Annalen, 58 (1904), 61—62), W. H. YOUNG[22] általánosította, bebizonyítván, hogy $f(x)$ FOURIER-sorának derivált sora $(C, 1)$-szummábilis és szummája $f'(x)$ minden olyan x

[20] FEKETE MIHÁLY, Vizsgálatok a Fourier-sorokról. *Mat. és Term. Értesitő,* 34 (1916), 759—786, spec. 3. §, 774—783.

[21] T. CARLEMAN, A theorem concerning Fourier series, *Proceedings of the London Math. Soc.,* (2) 21 (1923), 483—492.

[22] W. H. YOUNG, On the convergence of the derived series of Fourier series. *Proceedings of the London Math. Soc.,* (2) 17 (1916), 195—236, spec. 219.

helyen, ahol e derivált folytonos. Ezt FEJÉR maga csak szakaszonként folytonos derivált esetére bizonyította be.

2. Hosszabb cikksorozatban foglalkozott FEJÉR a folytonos függvény FOURIER-sorának szingularitásaival. E sorozatot betetőző terjedelmes dolgozata: *Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues*, Annales de l'École Normale Supérieure, 28 (1911), 64—103, amely megelőzően magyarul is megjelent (Mat. és Term. Értesítő, 28 (1910), 550—592). P. DU BOIS—REYMOND és az őt követők komplikáltabb módszereit túlhaladva, FEJÉR *szolgáltatott e cikkeiben először egyszerű példákat olyan folytonos függvényre, amelynek* FOURIER-*sora valamely helyen divergens.* Sőt P. DU BOIS—REYMOND próbálkozása után, amelynek elégtelenségére L. NEDER[23] mutatott rá, *elsőként adott példát olyan folytonos függvényre, amelynek a* FOURIER-*sora mindenütt sűrű helyeken divergens*, vagyis amelynél a „DU BOIS—REYMOND-*féle szingularitás*" mindenütt sűrű helyeken lép fel. Ugyancsak *egyszerű példával szolgált olyan folytonos függvényre, amelynek* FOURIER-*sora a* „LEBESGUE-*féle szingularitást*" *mutatja, vagyis mindenütt konvergens ugyan, de valamely helynek környezetében nem egyenletesen konvergens.* Ezeket az elnevezéseket is ő hozta be. Egyszerű példával igazolta továbbá A. PRINGSHEIM[24] *sejtését, amely szerint létezik olyan 2π periódusú folytonos függvény, amelynek Fourier-sora valamely helyen divergens és egyben a konjugált trigonometrikus sor*[25] *szintén egy 2π szerint periodikus folytonos függvénynek a* FOURIER-*sora.* Ez más szóval azt jelenti, hogy *van olyan hatványsor, amely az egységkörön belül konvergens és egy, a zárt egységkörben folytonos függvénynek a* MACLAURIN-*sora, de a kerület valamely pontjában divergens.* Ezt PRINGSHEIM—FEJÉR-*féle szingularitásnak* lehetne nevezni.

[23] L. NEDER, Über stetige Funktionen mit überall dicht divergierender Fourierreihe. *Jahresbericht der deutschen Math.-Ver.*, 30 (1921), 153—155.

[24] A. PRINGSHEIM, Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise, *Sitzungsberichte der math.-phys. Kl. der K. Bayer. Akad. der Wiss.*, 30 (1900), 98; továbbá ugyanattól, Über die Divergenz gewisser Potenzreihen an der Konvergenzgrenze, uo. 31 (1901), 513.

[25] Valamely

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

trigonometrikus sor *konjugált sorának* a

$$c + \sum_{n=1}^{\infty}(-b_n \cos nx + a_n \sin nx)$$

sort (vagy ennek (—1)-szeresét) nevezzük, ahol c tetszőleges valós állandó. Ezek az $(a_0 - ib_0) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - ib_n)z^n$ hatványsor valós és képzetes részét képezik az egységkör $z = e^{ix}$ pontjaiban, ha $-b_0 = c$ jelöléssel élünk.

Egészen új volt FEJÉR példáiban, hogy ő (legalább az idézett cikkben) nem közvetlenül a függvényt definiálta, amelynek FOURIER-sora e szingularitások valamelyikét mutatja, hanem egyenesen azt a FOURIER-féle sort adta meg, amelynél az illető szingularitás fellép. Példáit egy sajátszerűen definiált számsorozat segítségével szerkesztette. E sorozat definíciója a következő: *képezzük az*

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{2}, 1, -1, -\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{1}{n-1}, -\frac{1}{n}$$

számcsoportot az

$$n = 2^{1^3}, 2^{2^3}, \ldots, 2^{\nu^3}, \ldots$$

értékekre s a ν-edik csoport számait ν^2-tel mind elosztván, írjuk az így keletkező számcsoportokat rendre egymás mellé; az így előálló számsorozat legyen

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots.$$

Mármost pl. *a* DU BOIS—REYMOND*-féle szingularitást mutatja az*

$$\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \cos 2x + \cdots + \alpha_k \cos kx + \cdots$$

cosinus-sor az $x = 0$ helyen. Vagyis ez egy folytonos és 2π szerint periodikus függvény FOURIER-sora, amely azonban az $x = 0$ helyen divergens. E példa azért is nevezetes, mert *e soron* FEJÉR *verifikálni tudta a* FOURIER-*sor szummábilitására vonatkozó alaptételét* (1. pont). Elődeinek példáin ez még nem sikerült neki. *A* LEBESGUE*-féle szingularitást mutatja az*

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin 2x + \cdots + \alpha_k \sin kx + \cdots$$

sinus-sor az $x = 0$ helyen. Ez tehát ismét egy 2π periódusú folytonos függvény FOURIER-sora, de bár mindenütt konvergens, az $x = 0$ hely környezetében nem egyenletesen konvergens.

Ugyanebben a dolgozatban FEJÉR azt a figyelemre méltó tételt is bebizonyította, hogy *ha valamely 2π periódusú és a $0 \leqq x \leqq 2\pi$ számközben korlátos és* RIEMANN *szerint integrálható $f(x)$ függvény Fourier-állandóira*

$$|a_n| \leqq \frac{A}{n}, \qquad |b_n| \leqq \frac{B}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

s M és m jelentik $f(x)$ felső és alsó határát, akkor $f(x)$ Fourier-sorának $s_n(x)$ szeleteire

$$m - (A + B) \leqq s_n(x) \leqq M + (A + B) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ez esetben tehát a FOURIER-sor szeletei egyenletesen korlátosak. FEJÉR kiemelte, hogy *ez a $(0, 2\pi)$ számközben korlátos variációjú függvény* FOURIER-*sorára mindig fennáll*, minthogy ekkor a fenti feltétel teljesül.

E munkáiban is az egyszerű tételek és módszerek mesterének bizonyul, akárcsak a FOURIER-sor szummábilitására vonatkozó dolgozataiban. A szóban forgó példák szerkesztésére szolgáló rendkívül eredeti módszerének nagy sikerét mutatja, hogy azt DE LA VALLÉE POUSSIN általánosabb formában már 1912-ben felvette idézett könyvének 2. kiadásába[26]. E cikksorozatból kiemelkedő másik nagy dolgozata: *Lebesguesche Konstanten und divergente Fourier-reihen*, Journal für die reine und angewandte Math., 138 (1910), 22—53, amely szintén megjelent magyarul (Mat. és Term. Értesítő, 28 (1910), 143—179). A LEBESGUE-*féle állandók*, amelyeket FEJÉR nevezett el így ebben a munkájában, a

$$\varrho_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

számok. Ha $f(x)$ olyan 2π periódusú és a $(0, 2\pi)$ számközben RIEMANN szerint integrálható függvény, amelyre $|f(x)| \leqq 1$, akkor FOURIER-sorának $s_n(x)$ szeletére $|s_n(x)| \leqq \varrho_n$ és az egyenlőség alkalmasan választott függvénynél be is következik. H. LEBESGUE[27] kimutatta, hogy $\varrho_n \to +\infty$ s ennek alapján bizonyította be a divergens, ill. nem egyenletesen konvergens FOURIER-sorral bíró folytonos függvények létezését. FEJÉR a most említett dolgozatban e LEBESGUE-féle állandók egyszerűbb tárgyalása mellett ezeknek aszimptotikus kifejezését is megadta, bebizonyítván, hogy *a* ϱ_n LEBESGUE-*állandó*

$$\varrho_n = \frac{4}{\pi^2} \log n + c_0 + \varepsilon_n, \quad \textit{ahol} \quad \varepsilon_n \to 0$$

és c_0 *bizonyos fix érték.* Ennek alapján ki tudta mutatni, hogy bizonyos indextől kezdve ϱ_n növekedik. Sejtését, amely szerint ez kezdettől fogva fennáll, T. H. GRONWALL[28] bizonyította be, felhasználva FEJÉRnek a fentebb említett 1911. évi dolgozat függelékében közölt azt a rendkívül érdekes eredményét, hogy *a* ϱ_n LEBESGUE-*féle állandó explicit alakja*

$$\varrho_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} \operatorname{tg} \frac{\nu\pi}{2n+1}.$$

[26] CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN, i. m. [13], 166—169.

[27] H. LEBESGUE, Sur la divergence et la convergence non-uniforme des séries de Fourier. *Comptes-Rendus*, 141 (1905), 875—877, továbbá ugyanattól i. m. [11], 84 89, és Sur les intégrales singulières, *Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse,* (3) 1 (1909), 25—117, spec. art. 33, 48.

[28] T. H. GRONWALL, Über die Lebesgueschen Konstanten bei den Fourierschen Reihen. *Math. Annalen,* 72 (1912), 244—261; továbbá ugyanattól, On Lebesgue's constants in the theory of Fourier series, *Annals of Math.* (2) 15 (1914), 125—128.

Később SZEGŐ GÁBOR[29] mutatta ki egyszerűbben ϱ_n monoton növekedését, s egyben bebizonyította GRONWALLnak azt a sejtését, hogy a $\varrho_1-\varrho_0, \varrho_2-\varrho_1, \ldots$ pozitív számok sorozata — mai kifejezéssel élve — totálisan monoton.

E cikksorozatot kiegészíti még a konjugált trigonometrikus sorokról írt dolgozata: *Über konjugierte trigonometrische Reihen,* Journal für die reine und angewandte Math., 144 (1914), 48—56, amely ugyancsak megjelent magyarul is (Mat. és Term. Értesítő, 32 (1914), 85—93). Ebben főeredményként megmutatja, hogy *ha az egységkörön belül konvergens hatványsor egy a zárt egységkörben folytonos függvénynek a* MACLAURIN-*sora, akkor a kör kerületén vett valós és képzetes része csak egyszerre lehet egyenletesen konvergens.* Ebből folyólag *a* DU BOIS—REYMOND-*féle szingularitásnak az egyik komponensben való fellépése szükségképpen a* LEBESGUE-*féle szingularitást vonja maga után a másikban, ha az konvergens.* Ezzel FEJÉR kiderítette, miszerint nem volt véletlen, hogy a folytonos függvény FOURIER-sorának szingularitásairól írt fenti dolgozatában a kétféle szingularitást egyazon konjugált sorpár sorain tudta kimutatni. A most szóban forgó dolgozatban bebizonyítja még azt a mélyebben fekvő tételt is, hogy *egyenletesen konvergens trigonometrikus sor konjugált sora majdnem mindenütt konvergens*[30]. Ez az ismert RIESZ—FISCHER-tétel felhasználásával következett a dolgozat eredményeiből annak alapján, hogy LEBESGUE szerint integrálható függvény FOURIER-sora majdnem mindenütt $(C, 1)$-szummábilis.

3. DIRICHLET klasszikus tételének kiegészítését tartalmazza FEJÉR következő dolgozata: *Über die Bestimmung des Sprunges der Funktion aus ihrer Fourierreihe,* Journal für die reine und angewandte Math., 142 (1913), 165—188 (magyarul Mat. és Term. Értesítő, 31 (1913), 385—415). Itt azt a kérdést veti fel, hogy amíg a DIRICHLET-féle feltételeknek eleget tevő függvény FOURIER-sora valamely x_0 szakadási helyen az $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ számtani közepet állítja elő, mint a részletösszegek határértékét, hogyan lehet egyszerű határátmenettel a FOURIER-sorból az $f(x_0+0)$ és $f(x_0-0)$ értékeket különkülön meghatározni? Arra a csodálnivaló eredményre jut, hogy *az*

$$\int_z^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = 0$$

[29] G. SZEGŐ, Über die Lebesgueschen Konstanten bei den Fourierschen Reihen. *Math. Zeitschrift,* 9 (1921), 163—166.

[30] Vagyis a divergencia-pontok halmazának LEBESGUE-féle mértéke 0. Ez utóbbi azt jelenti, hogy bármely $\varepsilon>0$ mellett lefedhető a halmaz olyan intervallum-sorozattal, amelynek összhosszúsága $<\varepsilon$.

transzcendens egyenlet valamelyik pozitív gyökét g-vel jelölve, a FOURIER-*sor* $s_n(x)$ *szeletére* $n \to +\infty$ *esetén*

$$s_n\left(x_0+\frac{g}{n}\right) \to f(x_0+0), \quad s_n\left(x_0-\frac{g}{n}\right) \to f(x_0-0),$$

hacsak $f(x)$ *eleget tesz a* DIRICHLET*-féle feltételeknek és az* x_0 *helyen szakadása van.* Továbbá, hogy *ugyanazon feltételek mellett*

$$s_n\left(x_0+\frac{\beta}{n^\alpha}\right) \to f(x_0+0), \quad s_n\left(x_0-\frac{\beta}{n^\alpha}\right) \to f(x_0-0)$$

valahányszor $0<\alpha<1$ *és* $\beta>0$.

Később CSILLAG PÁL[31] bebizonyította, más módszerrel pedig SIDON SIMON[32], hogy általánosabban a $(0, 2\pi)$ számközben korlátos variációjú $f(x)$ függvény esetén

$$\lim_{n=+\infty} \pi \frac{\sum_{k=1}^{n} k(b_k \cos kx - a_k \sin kx)}{n} = f(x+0) - f(x-0),$$

ahol

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \qquad (k=1, 2, 3, \ldots),$$

vagyis a függvény FOURIER-állandói. Ezt maga FEJÉR csak szűkebb feltételek mellett mutatta ki. E „szakadás" ismeretében a jobb- és baloldali határérték külön-külön is meghatározható, minthogy számtani közepüket a DIRICHLET—JORDAN-tétel megadja. A FEJÉR által felvetett kérdésre még sokkal általánosabb feltételek mellett azután LUKÁCS FERENC[33] adott igen tetszetős választ, bebizonyítván, hogy ha $f(x)$ a $(0, 2\pi)$ számközben LEBESGUE szerint integrálható 2π periódusú függvény és az x helyen létezik a

$$D_x = \lim_{h=+0} [f(x+h) - f(x-h)]$$

határérték, akkor

$$\frac{D_x}{\pi} = \lim_{n=+\infty} \frac{s_n^*(x)}{\log n},$$

31 CSILLAG PÁL, Korlátos ingadozású függvények Fourier-féle állandóiról. *Mat. és Fiz. Lapok*, 27 (1918), 301—308.

32 SIDON SIMON, A függvény ugrásának meghatározása a függvény Fourier-féle sorából. *Mat. és Fiz. Lapok*, 27 (1918), 309—311.

33 F. LUKÁCS, Über die Bestimmung des Sprunges einer Funktion aus ihrer Fourierreihe. *Journal für die reine und angewandte Math.*, 150 (1920), 107—112.

ahol $s_n^*(x)$ az $f(x)$ FOURIER-sorához tartozó $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n \cos nx - a_n \sin nx)$ konjugált sor n-edik szelete.

4. FEJÉR 1908-ban a LAPLACE-féle sorok elméletében is új utat tört, a szummábilitást illető vizsgálatait a FOURIER-sorokról ezekre a sorokra vitte át. Az 1908. február 3-i füzetben megjelent Comptes-Rendus cikke után, ugyanezen év április 6-án került bemutatásra az Akadémiában részletes dolgozata: *A Laplace-féle sorokról,* Mat. és Term. Ért., 26 (1908), 323—373, amelynek német átdolgozása: *Über die Laplacesche Reihe,* Math. Annalen, 67 (1909), 76—109. E munkája szintén remekmű, méltó társa az 1904. évi Annalen-cikknek. Lényegét annak a felismerése képezi, hogy a LEGENDRE-polinomokkal[34] képezett

$$(P) \qquad P_0(\cos\gamma) + 3P_1(\cos\gamma) + \cdots + (2n+1)P_n(\cos\gamma) + \cdots$$

sor nem egyéb, mint a

$$(L) \qquad P_0(\cos\gamma) + P_1(\cos\gamma) + \cdots + P_n(\cos\gamma) + \cdots$$

és

$$(C) \qquad 2\left(\frac{1}{2} + \cos\gamma + \cdots + \cos n\gamma + \cdots\right)$$

sorok CAUCHY-féle szorzata, továbbá e két sor közül a (L) sornak a 0-adrendű összegei (a közönséges részletösszegei), a (C) sornak viszont az 1-edrendű összegei (a részletösszegek összegei) nem-negatívok. Ez utóbbi elemi tény, mint tudjuk, már a FOURIER-sorra vonatkozó vizsgálataiban is alapvető szerepet játszott (1. pont, 107. old.); az előbbit a FEJÉR-*féle*

$$P_0(\cos\gamma) + P_1(\cos\gamma) + \cdots + P_n(\cos\gamma) = \frac{2}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi} \frac{\left(\sin(n+1)\frac{t}{2}\right)^2}{\sin\frac{t}{2}\sqrt{2(\cos\gamma - \cos t)}}\,dt$$

[34] A LEGENDRE-polinomok az

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = 1 + P_1(x)z + \cdots + P_n(x)z^n + \cdots$$

hatványsorban szereplő együtthatók, amelyeknek explicit alakja

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n} =$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot\ldots(2n-1)}{n!}\left\{x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\right\}.$$

A 0-adfokú LEGENDRE-polinom $P_0(x) \equiv 1$.

integrál-alak mutatta, amelyet ő a LEGENDRE-polinomok MEHLER-féle integrálalakjából nyert. E felismerés alapján már be tudta bizonyítani, hogy *a (P) sor másodrendű* HÖLDER-*féle közepei (a részletösszegek közepeinek a számtani közepei) nem-negatívok és a* $0<\gamma\leqq\pi$ *intervallumban 0-hoz tartanak, mégpedig ennek minden* (ε, π) *részintervallumában egyenletesen.* Ennek birtokában azután könnyen volt bebizonyítható a dolgozat főeredménye:

A S egységgömbön korlátos és RIEMANN *szerint integrálható* $f(\vartheta, \lambda)$ *függvény* LAPLACE-*sorának*[35] *másodrendű* HÖLDER-*féle közepei minden folytonossági helyen az* $f(\vartheta, \lambda)$ *függvényértékhez tartanak. Ha* $f(\vartheta, \lambda)$ *az egész S gömbön folytonos, akkor e közepek egyenletesen tartanak a függvényhez. Ha pedig* $f(\vartheta, \lambda)$ *a gömbnek csak valamely T részén folytonos, akkor az egyenletes konvergencia minden olyan* T^* *résztartományban fennáll, amely a gömbfelületen T belsejébe esik.*

[35] A S egységgömbön a ϑ sarktávolság és λ földrajzi hosszúság függvényeként megadott $f(\vartheta, \lambda)$ függvény LAPLACE-sora a neki formálisan megfelelő

$$f(\vartheta,\lambda)\sim\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S)} f(\vartheta',\lambda')\,dS'+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{4\pi}\iint\limits_{(S)} f(\vartheta',\lambda')P_n(\cos\gamma)\,dS'$$

sor, ahol γ a változó (ϑ', λ') gömbi pontnak a (ϑ, λ)-tól való gömbi távolsága, tehát

$$\cos\gamma=\cos\vartheta\cos\vartheta'+\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\lambda-\lambda'),$$

és dS' az egységgömb felületeleme. Ebben az

$$f(\vartheta,\lambda)\sim Y_0(\vartheta,\lambda)+Y_1(\vartheta,\lambda)+\cdots+Y_n(\vartheta,\lambda)+\cdots$$

kétváltozós függvénysorban a tagok LAPLACE-*féle gömbfüggvények*, vagyis $Y_n(\vartheta, \lambda)$ az

$$x=\sin\vartheta\cos\lambda,\quad y=\sin\vartheta\sin\lambda,\quad z=\cos\vartheta$$

derékszögű koordinátákban n-edfokú homogén és a

$$\frac{\partial^2 Y_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Y_n}{\partial z^2}=0$$

térbeli LAPLACE-*egyenletet* kielégítő háromváltozós polinom, amilyen maga $P_n(\cos\gamma)$ rögzített (ϑ', λ') mellett. E tagok előállítása formálisan történik, nevezetesen $P_n(\cos\gamma)$-val való végigszorzással s azután ϑ, λ szerint való tagonkénti integrálással a gömbfüggvények ortogonalitási tulajdonsága alapján, amelynek értelmében

$$\iint\limits_{(S)} Y_n(\vartheta,\lambda)\,P_\nu(\cos\gamma)\,dS=\begin{cases}0, & \text{ha } \nu\neq n\\ \dfrac{4\pi}{2n+1}\,Y_n(\vartheta',\lambda'), & \text{ha } \nu=n.\end{cases}$$

Ha végül ϑ', λ' helyébe rendre ϑ, λ tétetik és viszont, ily módon előáll

$$Y_n(\vartheta,\lambda)=\frac{2n+1}{4\pi}\iint\limits_{(S)} f(\vartheta',\lambda')P_n(\cos\gamma)\,dS'.$$

A szóban forgó másodrendű közepeknek, amelyeket *a* LAPLACE-*sor* FEJÉR-*féle közepeinek* nevezhetnénk, még az a figyelemre méltó tulajdonságuk van, hogy *ugyanazon m és M korlátok közé esnek, mint maga az* $f(\vartheta, \lambda)$ *függvény*, vagyis e tekintetben úgy viselkednek, mint a FOURIER-sor FEJÉR-féle közepei. Nem-korlátos függvény esetén a LAPLACE-sornál a szummábilitás szempontjából is kedvezőtlenebb a helyzet, mint a FOURIER-sornál. Amíg ugyanis az utóbbinál FEJÉR tétele nem-korlátos függvényre is igaz, hacsak a függvény RIEMANN szerint integrálható, addig a LAPLACE-sornál a fenti tétel érvényességéhez fel kell tennünk a függvény abszolút integrálhatóságát.

Ez a dolgozat is, éppen úgy, mint a FOURIER-sor szummábilitására vonatkozó, a vizsgálatok egész sorát indította meg, a LAPLACE-sor újabb irodalmának kiindulópontja lett. Ez részben talán annak is volt köszönhető, hogy dolgozata végén FEJÉR több kérdést vetett fel, amelyek még jobban felkeltették a matematikusok érdeklődését.

HAAR ALFRÉD[36] konstruált olyan folytonos függvényt, amelynek LEGENDRE-sora[37] valamely helyen divergens, s ezzel igenlő választ adott FEJÉRnek arra az első kérdésére, hogy létezik-e olyan, az egész egységgömbön folytonos függvény, amelynek LAPLACE-sora valahol divergens?

FEJÉRnek arra a második kérdésére, hogy van-e olyan, az egységgömbön folytonos függvény, amelynél a LAPLACE-sor elsőrendű közepei valahol divergálnak, véglegesen T. H. GRONWALL[38] adta meg a tagadó választ. Neveze-

[36] A. HAAR, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (Erste Mitteilung). *Math. Annalen*, 69 (1910), 331—371, spec. §3, 345—348. E dolgozat mint doktori értekezés 1909-ben jelent meg Göttingenben.

[37] A LEGENDRE-sor a LAPLACE-sornak [35] az a speciális esete, midőn a függvény csak a ϑ sarktávolságtól függ, mondjuk $f(\vartheta, \lambda) = \varphi(\cos\vartheta)$. Ez esetben az ismert

$$\int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma)\, d\lambda' = 2\pi P_n(\cos\vartheta) P_n(\cos\vartheta')$$

reláció alapján a LAPLACE-sor

$$\varphi(\cos\vartheta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} \varphi(\cos\vartheta') P_n(\cos\vartheta') \sin\vartheta'\, d\vartheta'\right) P_n(\cos\vartheta),$$

amely pedig az $x = \cos\vartheta$ helyettesítéssel a

$$\varphi(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} \varphi(x) P_n(x)\, dx\right) P_n(x)$$

sorba megy át. Ezt szokás a $-1 \leq x \leq 1$ számközben integrálható $\varphi(x)$ függvény LEGENDRE-sorának nevezni.

[38] T. H. GRONWALL, Über die Laplacesche Reihe. *Math. Annalen*, 74 (1913), 213—270. spec. 251—254.

tesen bebizonyította, hogy az egységgömbön abszolút integrálható függvény LAPLACE-sorának már az elsőrendű közepei is minden folytonossági helyen a függvényhez konvergálnak, s az egész gömbön folytonos függvény esetén ugyanott egyenletes konvergencia áll fenn. LUKÁCS FERENC[39] doktori disszertációjában, amely a szerző halála után némi rövidítéssel és módosítással németül is megjelent[40] SZEGŐ GÁBOR fordításában, egyszerű és rövid új bizonyítását adta GRONWALL tételének, s ugyanott új példával szolgált olyan folytonos függvényre, amelynek LAPLACE-sora valamely helyen divergens. Még egyszerűbben bizonyította be GRONWALL tételét maga FEJÉR egy későbbi dolgozatában: *Über die Summabilität der Laplaceschen Reihe durch Arithmetische Mittel*, Math. Zeitschrift, 24 (1925) 267—284. Ugyanitt általánosította GRONWALL tételét LEBESGUE szellemében, mégpedig nemcsak az elsőrendű közepekre, hanem általánosabban a $k > \frac{1}{2}$ rendű közepekre vonatkozólag is. E dolgozatát kiegészíti: *Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome*, uo. 285—298, ahol is a felhasznált egyenlőtlenségeknek elemi, komplex integrálást nem igénylő bebizonyítását adja.

Ezekkel kapcsolatban említem egyik igen fontos dolgozatát: *Über gewisse durch die Fouriersche und Laplacesche Reihe definierten Mittelkurven und Mittelflächen*, Rendiconti di Palermo, 38 (1914), 79—97 (magyarul Mat. és Term. Értesítő, 32 (1914), 462—486). Ebben többek között más, elemibb bizonyítását adta annak az alapvető ténynek, hogy *a fenti (L) sor részletösszegei nem-negatívok*. Itt nem használta fel a MEHLER-féle integrált, hanem a FOURIER-sor elsőrendű közepeire vonatkozó fenti egyenlőtlenségére (107. old.) támaszkodott. Ismét más elemi bizonyítással szolgált egy későbbi cikkében: *Über Positivität von Summen, die nach trigonometrischen oder Legendreschen Funktionen fortschreiten*, Szegedi Acta, 2 (1925), 75—86, spec. 83—84. Ily módon a szóban forgó összegek nem-negatív voltára három egyszerű bizonyítást is publikált. Különben utóbbi cikkének egyik jegyzetében (i. h. 84) a MEHLER-féle integrálnak igen egyszerű előállítását adta, s ezzel is hozzájárult a LAPLACE-sorra vonatkozó vizsgálatainak egyszerűbbé tételéhez.

5. Eddigi dolgozatai mellett, amelyekben új utakat is tört, ugyancsak az egyszerű tételek és módszerek mestereként lép elénk az algebrai egyenletek gyökeinek helyzetével foglalkozó cikkeiben, amelyek közül a legfőbb: *Über die Wurzel vom kleinsten absoluten Betrage einer algebraischen Gleichung*, Math. Annalen, 65 (1908), 413—423 (magyarul Mat. és Fiz. Lapok, 17 (1908),

[39] LUKÁCS FERENC, A Laplace-sorról. *Mat. és Fiz. Lapok*, 23 (1914), 356—357.
[40] F. LUKÁCS, Über die Laplacesche Reihe. *Math. Zeitschrift*, 14 (1922), 250—262.

308—324). Ebben E. LANDAU[41] egy kérdésével kapcsolatban FEJÉR igen eredeti gondolatmenettel, amely azt a GAUSStól eredő tételt használja fel, hogy valamely $f(z)$ polinom gyökeit tartalmazó legkisebb konvex sokszög egyben az $f'(z)$ összes gyökeit is tartalmazza, bebizonyítja a következő tételt:

Valamely $(k+1)$*-tagú*

$$a_0+a_1z^{\nu_1}+a_2z^{\nu_2}+\cdots+a_kz^{\nu_k}=0$$
$$(1\leqq \nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_k;\quad a_0\neq 0,\ a_1\neq 0)$$

egyenletnek mindig van gyöke a

$$|z|\leqq\left[\frac{\nu_2\nu_3\ldots\nu_k}{(\nu_2-\nu_1)(\nu_3-\nu_1)\cdots(\nu_k-\nu_1)}\right]^{\frac{1}{\nu_1}}\cdot\left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{\nu_1}}$$

körben.

Ebben az az érdekes, hogy a megadott kör sugara független az $a_2, a_3, \ldots, a_k$ együtthatóktól. E tételből már folyik, hogy *a szóban forgó egyenletnek van gyöke a*

$$|z|\leqq\binom{\nu_1+k-1}{k-1}^{\frac{1}{\nu_1}}\left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{\nu_1}}$$

körben. Ennek sugara már csak a ν_1, k, a_0, a_1 értékektől függ. Ez utóbbi tételt O. PERRON[42] felvette algebrai tankönyvének II. kötetébe. A $\nu_1=1$ esetben a tétel azt mondja, hogy *minden* $(k+1)$*-tagú*

$$a_0+a_1z+a_2z^{\nu_2}+\cdots+a_kz^{\nu_k}=0$$
$$(1<\nu_2<\cdots<\nu_k;\quad a_0\neq 0,\ a_1\neq 0)$$

egyenletnek van gyöke a

$$|z|\leqq k\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$$

körben. Kisebb sugarú körben ez általánosságban nem érvényes. E tételt $k=2$ esetére (trinom egyenletre) már E. LANDAU[43] bebizonyította, a $k=3$ esetben azonban csak nagyobb sugarú kört tudott megadni a gyök számára.[44]

E dolgozatban FEJÉR érdekes függvénytani következtetésre is jut, nevezetesen a fenti első tétel alkalmazásával kimutatja a következőt:

[41] E. LANDAU, Sur quelques généralisations du theorème de M. Picard. *Annales de l'École Normale Supérieure,* 24 (1907), 179—201.

[42] O. PERRON, *Algebra I—II,* Berlin und Leipzig 1927, spec. II. §6, Satz 35.

[43] E. LANDAU, Über den Picardschen Satz. *Viertelsjahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich,* Jahrg. 51 (1906), 252—318, spec. §16.

[44] E. LANDAU, i. h. [41].

ha valemely mindenütt konvergens

$$a_0 + a_1 z^{\nu_1} + a_2 z^{\nu_2} + \cdots + a_k z^{\nu_k} + \cdots$$

$$(a_1 \neq 0, \quad 1 \leqq \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_k < \cdots)$$

hatványsor hézagai olyanok, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_k}$ *sor konvergens, akkor e hatványsor nem bír* PICARD*-féle kivételes értékkel, vagyis minden komplex értéket felvesz.* Ezzel az eredménnyel elsőként létesített kapcsolatot a hézagos hatványsorok elmélete és a PICARD-féle problémakör között. Ebben az irányban később lényegesen tovább jutott M. BIERNACKI,[45] majd pedig PÓLYA GYÖRGY.[46]

6. A komplex függvénytan területén a korlátos hatványsorok elmélete is fontos eredményeket köszön FEJÉRnek. Abból a már említett 1910. évi eredményéből (112. old.), amely szerint a zárt egységkörben folytonos és azon belül reguláris függvény MACLAURIN-sora a kerület valamely pontjában divergens lehet, mégpedig úgy, hogy a részletösszegei nem korlátosak, nyilván következik, miszerint *egy az egységkör belsejében korlátos hatványsor szeleteinek nem kell e körön belül korlátosoknak lenniök.* Erre valamivel később más bizonyítást is adott egy LANDAUhoz intézett levélben, aki ez utóbbit vette fel a függvénytan újabb eredményeiről írt könyvébe.[47] E. LANDAU[48] azután megmutatta, hogy ha az

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots \qquad (|z| < 1)$$

hatványsorra $|f(z)| \leqq 1$, akkor az n indexű $s_n(z)$ szelet abszolút értékére $|s_n(z)| \leqq G_n$, ahol

$$G_n = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \quad 2\nu} \right)^2$$

s az egyenlőség alkalmasan választott $f(z)$ függvénynél be is következik. FEJÉRnek a már említett 1914. évi palermói dolgozatában (120. old.) foglalt egyik eredménye szerint sokkal egyszerűbb a helyzet a részletösszegek számtani közepeinél, nevezetesen

45 M. BIERNACKI, Sur les équations algébriques contenant des paramètres. *Thèse,* Paris 1928.

46 G. PÓLYA, Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, *Math. Zeitschrift,* 29 (1929), 549—640, spec. 639.

47 E. LANDAU, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie.* 2. Aufl., Berlin 1929, §3, 29—31.

48 E. LANDAU, Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe (Zweite Mitteilung). *Archiv der Math. und Phys.,* (3) 21 (1913), 250—255.

az $|f(z)| \leqq 1$ $(|z|<1)$ *esetben a hatványsor szeleteinek számtani közepeire is*

$$\left|\frac{s_0(z)+s_1(z)+\cdots+s_n(z)}{n+1}\right| \leqq 1 \qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

Ebben az irányban tovább jutott I. SCHUR,[49] aki kimutatta, hogy ugyanez a szeletek abszolút értékére, sőt azok négyzetére is érvényes. SZÁSZ OTTÓ[50] pedig oly általános tételt bizonyított be, amelynek mind ez a FEJÉR-féle, mind a fenti LANDAU-féle egyenlőtlenség speciális esete. Maga FEJÉR a már szintén említett 1925. évi szegedi cikkében (120. old.) megmutatta, hogy

az $|f(z)| \leqq 1$ $(|z|<1)$ *feltételnek eleget tevő hatványsor szeleteire*

$$|s_n(z)| \leqq 1, \quad \text{ha} \quad |z| \leqq \frac{1}{2},$$

de ez valamely $|z| \leqq \frac{1}{2}+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ *körben általánosságban nem érvényes.*

Erre a tételre E. LANDAU[51] szolgált még egyszerűbb bizonyítással, felhasználva a számtani közepekre vonatkozó előbbi FEJÉR-féle egyenlőtlenséget. Egyben megjegyezte, hogy FEJÉR e tétele speciális esete W. ROGOSINSKI[52] egy valamivel előbbi tételének. Érdekes megállapítást közölt hamarosan maga FEJÉR egy fontos dolgozatában: *Über die Koeffizientensumme einer beschränkten und schlichten Potenzreihe,* Acta Mathematica, 49 (1926), 183—190. Ebben megmutatja, miszerint

van olyan K pozitív állandó, hogy az egységkör belsejében egyrétű és az $|f(z)| \leqq 1$ *feltételnek megfelelő hatványsor szeleteire* $|s_n(z)| \leqq K$ $(|z|<1)$.

Ez állandóra FEJÉR az $1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ értéket kapta, amely azonban nem a legkisebb ilyen korlát. Tovább jutott SZEGŐ GÁBOR,[53] akinek sikerült valamivel kisebb állandót kapnia, s ugyanő $n=2$ esetére meghatározta az $|s_2(z)|$ felső határát a szóban forgó hatványsorok osztályánál.

[49] I. SCHUR, Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind (Zweite Mitteilung). *Journal für die reine und angewandte Math.,* 148 (1918), 122—145, spec. § 11.

[50] O. SZÁSZ, Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe. *Math. Zeitschrift,* 1 (1918), 163—183, spec. § 1. Satz I.

[51] E. LANDAU, Über einen Fejérschen Satz. *Nachrichten von der Ges. der Wiss. zu Göttingen, Math.—Phys. Kl.,* Jahrg. 1925, 22.

[52] W. ROGOSINSKI, Über Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten. *Math. Zeitschrift,* 17 (1923), 260—276, spec. 271, Satz II, 5.

[53] G. SZEGŐ, Zur Theorie der schlichten Abbildungen. *Math. Annalen,* 100 (1928), 188—211, spec. 204—211.

7. Meglepően egyszerű tételeket bizonyított be FEJÉR a hatványsornak a konvergencia-kör kerületén való viselkedésére vonatkozólag. E tárgykör kiterjedt irodalmát nagymértékben gazdagító dolgozata: *Über die Konvergenz der Potenzreihe an der Konvergenzgrenze in Fällen der konformen Abbildung auf die schlichte Ebene,* Schwarz-Festschrift, Berlin 1914, 42—53. Ennek alapját a híres HARDY—LANDAU tétellel rokon következő tétele képezi:

ha a komplex tagú $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *sor az aritmetikai közepek módszerével szummálható és* $\sum_{n=1}^{\infty} n|u_n|^2$ *konvergens, akkor e* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *sor is konvergens.*

A tétel bizonyításából az is látható, hogy *ha a sor tagjai bizonyos intervallumban adott* $u_n(x)$ *függvények, akkor* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ *egyenletes szummábilitása és* $\sum_{n=1}^{\infty} n|u_n(x)|^2$ *egyenletes konvergenciája maga után vonja a* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ *sor egyenletes konvergenciáját.* Ennek és a 2π periódusú folytonos függvény FOURIER-sora egyenletes szummábilitására vonatkozó tételének felhasználásával FEJÉR bebizonyítja a következő tételt:

ha az egységkörön belül konvergens hatványsor ugyanott egyrétű s az előállított függvény a zárt $|z| \leqq 1$ *körlapon folytonos, akkor a hatványsor a kerületen egyenletesen konvergens.*

E tételnek nyomban érdekes alkalmazását adta PÁL GYULA[54] a FOURIER-sorok elméletében. Tételét később H. BOHR[55] élesítette, ugyancsak az előbbi tétel felhasználásával, bebizonyítván, hogy valamely 2π periódusú folytonos $f(x)$ függvényhez mindig található olyan $g(u)$, amely a $0 \leqq u \leqq 2\pi$ számközben folyvást növekedik $g(0)=0$ értéktől a $g(2\pi)=2\pi$ értékig, s amely mellett a $h(u)=f(g(u))$ függvény FOURIER-sora az egész $0 \leqq u \leqq 2\pi$ intervallumban egyenletesen konvergens. PÁL GYULA az egyenletes konvergenciát csak belső subintervallumra tudta biztosítani. FEJÉR tételét E. LANDAU[56] általánosította.

A fenti tételből OSGOOD sejtésképp kimondott s utána CARATHÉODORY, KOEBE és mások által bebizonyított tétele alapján, amely a határpontok megfelelkezésére vonatkozik,[57] FEJÉR levonja dolgozatában azt a szép következtetést, hogy *ha a hatványsor a konvergencia-kör belsejét* JORDAN-*görbe belsejére képezi le egyrétűen, akkor a kör kerületén egyenletesen konvergens.*

[54] J. PÁL, Sur les transformations de fonctions qui font converger leurs séries de Fourier. *Comptes-Rendus,* 158 (1914), 101.

[55] H. BOHR, Über einen Satz von J. Pál, *Szegedi Acta,* 7 (1934—35), 129—135.

[56] E. LANDAU, i. h.[47] § 13, 65—67.

[57] Vö. *Encyklopädie der Math. Wiss. etc.,* II B, 56.

A folytonos függvény FOURIER-sora szingularitásainak tárgyalásánál követett módszerét a hatványsorra kiterjesztő dolgozata: *Über Potenzreihen, deren Summe im abgeschlossenen Konvergenzkreise überall stetig ist,* Sitzungsberichte der K. Bayer. Akad. der Wiss., Math.-phys. Kl., Jahrg. 1917, 33—50. Ebben FEJÉR *elsőként állított elő olyan hatványsort, amely a konvergenciakör kerületén mindenütt konvergens, de annak valamely pontja környezetében a kerületen nem egyenletesen konvergens, s amelynél az előállított függvény a zárt körlapon folytonos.* Ez megfelel a folytonos függvény FOURIER-sora LEBESGUE-féle szingularitásának [a DU BOIS-REYMOND-félének megfelelő szingularitás létezését a hatványsornál még 1910-ben kimutatta, mint már láttuk (112. old.)]. Amint cikkének egy jegyzetében elmondja, H. BOHR 1910-ben felvetette előtte olyan hatványsor keresésének problémáját, amely a konvergencia-kör kerületén egyenletesen konvergens (tehát a zárt körben folytonos függvényt állít elő), de a kerület egyetlen pontjában sem abszolút konvergens. Ennek nyomán FEJÉR sejtése az volt, hogy a

$$\sqrt{1-z}\,e^{\frac{1}{z-1}} = e_0 + e_1 z + \cdots + e_n z^n + \cdots$$

hatványsor (amelynek konvergencia-köre az egységkör) ilyen tulajdonságú. E FEJÉR-féle sejtést RIESZ MARCELL nyomban igazolta is, olvashatjuk tovább a jegyzetben. *Ez volt az első példa olyan, a zárt egységkörben folytonos s azon belül reguláris függvényre, amelynek* MACLAURIN-*sora a kerületen egyenletesen konvergens, de nem abszolút konvergens a kerület egyetlen pontjában sem,* amint H. BOHR kívánta. Később ugyancsak RIESZ MARCELL és G. H. HARDY[58] konstruáltak ilyen hatványsorokat. Maga FEJÉR is ad további példát ilyen hatványsorra ebben a dolgozatában.

A fenti hatványsor speciális esete az

$$(F) \qquad \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{(1-z)^{\varrho}} = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

hatványsornak, ahol ϱ valamely valós szám s $(1-z)^{\varrho}$ a hatvány főértékét jelenti a $|z| < 1$ körben, vagyis

$$(1-z)^{\varrho} = e^{\varrho \log^{*}(1-z)} = e^{-\varrho\left(z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^n}{n}+\cdots\right)}.$$

E hatványsorral foglalkozik FEJÉR akadémiai székfoglaló értekezésében, amelyet 1908-ban levelező taggá történt megválasztása után mutatott be: *Asymptotikus értékek meghatározásáról,* Mat. és Term. Értesítő 27 (1909), 1—33. Ennek csak rövid francia kivonata jelent meg (Comptes-Rendus, 1908. nov.

[58] G. H. HARDY, A Theorem concerning Taylor's series. *Quarterly Journal of Math.,* 44 (1913), 147—160, spec. 157—160; továbbá E. LANDAU, i. h.[47] § 14, 68—69.

30.), s ennek ellenére nagy hatást váltott ki külföldön. Ez talán annak is volt az eredménye, hogy később O. PERRON[59] új bizonyítással szolgált FEJÉR itteni tételére, majd általánosította is azt.[60] E tétel a következő:

az (F) hatványsorban bármely valós ϱ mellett

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi e}} \frac{1}{n^{\frac{3}{4}-\frac{\varrho}{2}}} \left\{ \sin\left[2\sqrt{n} + \left(\frac{3}{4} - \frac{\varrho}{2}\right)\pi\right] + \frac{\lambda(n)}{n^{\frac{1}{4}}} \right\},$$

ahol

$$|\lambda(n)| < G (= \text{const})$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ez lényegileg a LAGUERRE-polinomokra[61] vonatkozó aszimptotikus formula. A módszer, amelyet FEJÉR alkalmazott, lényegében már B. RIEMANN[62] habilitációs értekezésében szerepel, de neki azt teljesen szilárd alapokra kellett helyeznie, hogy egészen szigorúan bizonyíthassa be ezt a tételét.

8. Ugyancsak komplex függvénytani tárgyú kiemelkedő dolgozata: *Interpolation und konforme Abbildung*, Nachrichten von der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1918, 319—331. Ebben egy lényegileg

59 O. PERRON, Über das infinitäre Verhalten der Koeffizienten einer gewissen Potenzreihe. *Archiv der Math. und Phys.*, (3) 22 (1914), 329—340.

60 O. PERRON, Über das Verhalten einer ausgearteten hypergeometrischen Reihe bei unbegrenzten Wachstum eines Parameters. *Journal für die reine und angewandte Math.*, 151 (1921), 63—78, spec. 78.

61 Az $\alpha > -1$ parameternek megfelelő $L_n^{(\alpha)}(x)$ LAGUERRE-polinomok generátor-sora

$$\frac{e^{\frac{xz}{z-1}}}{(1-z)^{\alpha+1}} = L_0^{(\alpha)}(x) + L_1^{(\alpha)}(x)z + \cdots + L_n^{(\alpha)}(x)z^n + \cdots.$$

Explicit alakban

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-\nu} \frac{(-x)^\nu}{\nu!}.$$

Az aszimptotikus formula a LANDAU-féle O szimbólumot használva

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{\pi}\, x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}} \frac{\cos\left[2\sqrt{nx} - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi\right]}{n^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}} + O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right) \qquad (x > 0),$$

ahol is tehát a $O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right)$ maradéktag $n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}$-del osztva korlátos, midőn $n \to +\infty$.

62 B. RIEMANN, Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe. *Bernhard Riemann's gesammelte math. Werke etc.*, Leipzig 1876, 213—250, spec. § 13, 246—248.

C. RUNGE[63] által felvetett problémának adja klasszikusan szép megoldását. E probléma a következő:

Legyen C megadott JORDAN-görbe az x komplex változó síkjában. Vegyünk fel a görbén valamely pontcsoport-sorozatot, amelyben az n-edik pontcsoport n pontból áll: $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Ha az $f(x)$ függvény a C görbén értelmezve van, ehhez és az n-edik pontcsoporthoz meghatározhatjuk azt az egyetlen legföljebb $(n-1)$-edfokú $L_n(x)$ racionális egész függvényt (LAGRANGE-féle interpolációs polinomot), amelyre

$$L_n(x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}) \qquad (k=1, 2, \ldots, n)..$$

Kérdés, választható-e a C görbén a pontcsoport-sorozat egyszer s mindenkorra úgy, hogy valahányszor $f(x)$ a C görbén belül és azon rajta reguláris függvény, e zárt tartományban $L_n(x) \to f(x)$ egyenletesen fennálljon? E feladatot a kör speciális esetében C. RUNGE[64] meg is oldotta, n-edik pontcsoportnak a körbe beírt szabályos n-szög szögpontjait választván. FEJÉR valóban zseniális módon általánosította a megoldást tetszőleges C JORDAN-görbe esetére, nevezetesen bebizonyította a következő tételt:

Legyenek a C görbén az $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ pontok úgy választva, hogy C külsejének valamely K kör külsejére való és ∞-t a ∞-be átvivő egyrétű konformis leképezésénél e pontok a határpontok megfelelkezése folytán a K körbe beírt szabályos n-szög szögpontjaiba menjenek át. Akkor bármely, a C görbén belül és azon rajta reguláris $f(x)$ függvény esetén, az n-edik pontcsoport és ez $f(x)$ által meghatározott $L_n(x)$ LAGRANGE-*féle interpolációs polinomra e zárt tartományban $L_n(x) \to f(x)$ egyenletesen áll fenn.*

Ez a dolgozata is nagy hatást váltott ki az irodalomban. Erre nézve utalok J. L. WALSH[65] könyvére. Érdemes kiemelni, hogy később FEKETE MIHÁLY[66] a konformis leképezés felhasználása nélkül, teljesen elemi úton határozott meg minden JORDAN-görbén a kívánt tulajdonsággal bíró pontcsoport-sorozatot. KALMÁR LÁSZLÓ[67] viszont doktori értekezésében a konformis leképezés segédeszközét használva, FEJÉR e dolgozata nyomán megadta a szükséges és elegendő feltételét is annak, hogy valamely pontcsoport-sorozat az adott görbén a szóban forgó tulajdonságú legyen, s ezzel egyenesen meg-

63 C. RUNGE, *Theorie und Praxis der Reihen*, Leipzig 1904, spec. 137.

64 C. RUNGE, i. h. 63, 136—137.

65 J. L. WALSH, *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain.* American Math. Soc. Colloquium Publications, 20 (1935).

66 M. FEKETE, Über Interpolation. *Zeitschrift für angewandte Math. und Mech.*, 6 (1926), 410—413.

67 KALMÁR LÁSZLÓ, Az interpolációról. *Mat. és Fiz. Lapok*, 33 (1926), 120—149.

határozta a keresett pontcsoport-sorozatok összességét. E feltétel az, hogy a C görbén választott pontcsoport-sorozatnak az említett konformis leképezésnél a K körön „egyenletes eloszlású" pontcsoport-sorozat feleljen meg, vagyis ha a kör valamely σ hosszúságú ívére ν_n számú pont esik az n-edik pontcsoportból, akkor $n \to +\infty$ esetén mindig $\frac{\nu_n}{n} \to \frac{\sigma}{2r\pi}$ álljon fenn, ahol r a kör sugara.

9. A LAPLACE-sorról írt újabb dolgozatával kapcsolatban már említett *„Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome"* c. munkájában (120. old.) FEJÉR új utat is nyitott, amennyiben messzemenően általánosította a LEGENDRE-polinomok fogalmát és megkezdte ez általánosabb polinomok elméletét. Ez az általánosítás következőképp történt. Legyen (esetleg csak formálisan)

$$F(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n + \cdots$$

valós együtthatós hatványsor. A z komplex változó helyébe először $re^{i\vartheta}$, azután $re^{-i\vartheta}$ tétetvén, a két hatványsor CAUCHY-féle szorzata

$$F(re^{i\vartheta})F(re^{-i\vartheta}) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\vartheta) r^n,$$

ahol

$$P_n(\cos\vartheta) = 2\alpha_0\alpha_n \cos n\vartheta + 2\alpha_1\alpha_{n-1}\cos(n-2)\vartheta + \cdots + \begin{cases} 2\alpha_\nu\alpha_{\nu+1}\cos\vartheta, & \text{ha } n = 2\nu+1 \\ \alpha_\nu^2, & \text{ha } n = 2\nu. \end{cases}$$

Ez n-edrendű cosinus-polinom s így az $x = \cos\vartheta$ változóban n-edfokú racionális egész függvény. Az így értelmezett

$$P_0(\cos\vartheta), P_1(\cos\vartheta), \ldots, P_n(\cos\vartheta), \ldots$$

polinomokat nevezi FEJÉR a fenti hatványsor (vagy annak együtthatósorozata) LEGENDRE-polinomjainak. Ezek a FEJÉR-*féle általánosított* LEGENDRE-*polinomok,* amint SZEGŐ GÁBOR[68] nevezi őket. A közönséges LEGENDRE-polinomokat kapjuk, midőn a hatványsor

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots\ 2n} z^n.$$

Ez általánosított LEGENDRE-polinomokat FEJÉR a szóban forgó dolgozatban az esetben vizsgálta, midőn a $F(z)$ hatványsor együtthatói monoton fogyó

[68] G. SZEGŐ, *Orthogonal Polynomials.* American Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. 23, New York 1959, 134.

nem-negatív számok. Többek között kimutatta, hogy *ez általánosított* LEGENDRE-*polinomokra az* $\alpha_n \geqq \alpha_{n+1} \geqq 0$ $(n=0,1,2,\ldots)$ *esetben*

$$|P_n(\cos\vartheta)-P_{n+2}(\cos\vartheta)| \leqq K\alpha_{[n/2]} \qquad (K=\text{const}),$$

ami egy STIELTJES-féle egyenlőtlenségnek nagymérvű általánosítása s érvényes pl. az $(1-z)^{-\varrho}$ hatványsorának megfelelő ún. *ultraszferikus polinomokra,* ha $0<\varrho\leqq 1$. SZEGŐ GÁBOR[69] mindjárt követte FEJÉRt ezen az úton, s lényegesen tovább is jutott, a $P_n(x)$ polinom gyökeit is vizsgálva és a LAPLACE-féle aszimptotikus formulát is általánosítva ezekre a polinomokra. Maga FEJÉR akkor jutott mélyebbre e polinomok elméletében, midőn azokat *totálisan monoton* $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\ldots$ sorozat[70] mellett vizsgálta. Idevágó dolgozata: *Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge und ihre Legendre-Polynome,* Proceedings of the Cambridge Phil. Soc., 31 (1935) 307—316. Ebben többek között bebizonyította a következő tételt, amellyel a közönséges LEGENDRE-polinom gyökeire vonatkozó MARKOV—STIELTJES-féle becslést kiterjesztette az ő általánosított LEGENDRE-polinomjaira:

ha az $\alpha_0,\alpha_1,\ldots$ *sorozat totálisan monoton (eltekintve az* $1,0,0,\ldots$ *és* $1,1,1,\ldots$ *esetektől), akkor az ehhez tartozó* $P_n(\cos\vartheta)$ *általánosított* LEGENDRE-*polinomnak a* $0<\vartheta<\frac{\pi}{2}$ *számközbe eső* ϑ_k *gyökeire* ($n\geqq 2$ *esetén)*

$$\frac{k-\frac{1}{2}}{n}\pi < \vartheta_k < \frac{k}{n+1}\pi \qquad \left(k=1,2,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]\right).$$

Megjegyzendő, hogy FEJÉR bizonyítása új még a közönséges LEGENDRE-polinomok esetében is. Különben ez utóbbi polinomok élesebb SZEGŐ-féle becslését[71] a STIELTJES-féle integrálalak alapján bizonyította be FEJÉR egy

[69] G. SZEGŐ, Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Fejér über die Legendreschen Polynome. *Math. Zeitschrift,* 25 (1926), 172—187.

[70] Valamely $\{\alpha_n\}$ számsorozatot *k-szorosan monotonnak* mondunk, ha

$$\alpha_n\geqq 0,\ \Delta^1\alpha_n\geqq 0,\ \Delta^2\alpha_n\geqq 0,\ldots,\ \Delta^k\alpha_n\geqq 0,$$

ahol $\Delta^\nu\alpha_n$ az α_n „ν-edik differenciája", vagyis

$$\Delta^\nu\alpha_n=\alpha_n-\binom{\nu}{1}\alpha_{n+1}+\binom{\nu}{2}\alpha_{n+2}-\cdots+(-1)^\nu\binom{\nu}{\nu}\alpha_{n+\nu}$$

$$(n=0,1,2,\ldots;\ \nu=1,2,\ldots,k).$$

Totálisan monoton $\{\alpha_n\}$ sorozatról beszélünk, midőn

$$\alpha_n\geqq 0,\ \Delta^\nu\alpha_n\geqq 0 \qquad (\nu=1,2,3,\ldots).$$

Az $\alpha_n=0$ $(n=0,1,2,\ldots)$ esetet kizárjuk.

[71] G. SZEGŐ, Inequalities for the zeros of Legendre polynomials and related fonctions. *Transactions of the American Math. Soc.,* 39 (1936), 1—17, spec. 8, form. (3).

másik dolgozatában: *Bestimmung von Grenzen für die Nullstellen des Legendreschen Polynoms aus der Stieltjesschen Integraldarstellung desselben,* Monatshefte für Math. und Phys., 43 (1936), 193—209. Ugyanezen cikkben a STIELTJES-félének a LAPLACE- és a MEHLER-féle integrálalakkal együtt egyszerű előállítását adta. Ugyanitt találjuk a közönséges $P_n(\cos\vartheta)$ LEGENDRE-polinom HEINE-féle sinus-sor alakjának[72] egyszerű és szigorú előállítását.

A többszörösen monoton együtthatósorozattal bíró trigonometrikus sorok és hatványsorok elméletét megindító nagy dolgozata: *Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge,* Transactions of the American Math. Soc., 39 (1936), 18—59. Ebben újra mint az egyszerű tételek és módszerek mestere tündököl, a többszörösen monoton sorozatok E. JACOBSTAHL[73] által kezdeményezett és már szépen kiépült elméletét újabb diadalhoz juttatja. SZEGŐ GÁBOR[74] egy eredeti következtetésmódjának felhasználásával (amely különben a FEJÉR-mag nem-negatív voltán alapszik) többek között bebizonyítja a következő tételt:

ha $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ *háromszorosan monoton* 0-*sorozat, akkor a*

$$c_0 \sin(n+1)\vartheta + c_1 \sin(n+3)\vartheta + \cdots$$

sinus-sornak 0 *és* π *között legalább* n *zérushelye van* $\left(\frac{\pi}{2}\text{-re szimmetrikusan}\right)$, *mégpedig* 0 *és* $\frac{\pi}{2}$ *között* ($n \geqq 2$ *esetén*) *vannak oly* $t_1, t_2, \ldots, t_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ *gyökök, amelyekre*

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n} < t_k < k\frac{\pi}{n+1} \qquad \left(k=1,2,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]\right).$$

Ezt a közönséges $P_n(\cos\vartheta)$ LEGENDRE-polinomot előállító HEINE-féle sinussorra alkalmazva (amelyről egyszerűen meg tudja mutatni, hogy együtthatósorozata totálisan monoton), e polinom gyökeinek MARKOV—STIELTJES-féle határolását nyeri. Különben a LEGENDRE-polinomra vonatkozó LAPLACE-féle

[72] Ez a Heine-féle sinus-sor a közönséges $P_n(\cos\vartheta)$ LEGENDRE-polinom számára

$$P_n(\cos\vartheta) = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+n}}\,\frac{\sin(n+2\nu+1)\vartheta}{2n+2\nu+1},$$

ahol

$$\alpha_0 = 1,\quad \alpha_m = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots (2m-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots 2m} \qquad (m=1,2,3,\ldots).$$

[73] E. JACOBSTAHL, Mittelwertbildung und Reihentransformation, *Math. Zeitschrift,* 6 (1920), 110—117, spec. § 3, 108—117.

[74] G. SZEGŐ, i. h. [71].

aszimptotikus formulának is elemi bizonyítását adja a HEINE-féle sinus-sor alapján. Hatványsorokra vonatkozó egyik tétele így hangzik: *ha az*

$$f(z)=c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots$$

hatványsorban a $c_1, c_2, \ldots$ *együtthatósorozat négyszeresen monoton, akkor e hatványsor a* $|z|<1$ *körbelsőben konvergens és egyrétű.*

SZEGŐ GÁBOR ezen az úton is követte FEJÉRt, érdekes kölcsönhatásban állottak egymással, s FEJÉR egész cikksorozatot írt a tárgyról. SZEGŐvel közös cikke: *Über die monotone Konvergenz von Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge,* Prace Matematyczno Fiziczne, 44 (1935), 15—25, amelyben az 1. és 4. § FEJÉR, a 2. és 3. § SZEGŐ munkája. Itt SZEGŐ pl. megmutatja, hogy már kétszeresen monoton sorozatra igaz egy tétel, amelyet FEJÉR csak háromszorosan monoton sorozatra bizonyított be, nevezetesen a következő:

ha az

$$f(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n+\cdots$$

hatványsorban a $c_0, c_1, \ldots$ *együtthatósorozat kétszeresen monoton, akkor az egységkör belsejében e hatványsor* $s_0(z), s_1(z), \ldots$ *szeleteire*

$$|f(z)|\geqq|f(z)-s_0(z)|\geqq\cdots\geqq|f(z)-s_n(z)|\geqq\cdots$$

(FEJÉR—SZEGŐ-tétel.) Ez egyszeresen monoton együtthatósorozat mellett (mikor is a hatványsor az egységkör belsejében mindenesetre konvergens) általánosságban már nem érvényes. Ez egyenlőtlenségek fennállását FEJÉR úgy fejezte ki, hogy *az* $s_n(z)$ *részletösszeg monoton konvergál a sor* $f(z)$ *összegéhez.* E rendkívül érdekes tényt előtte, úgy látszik, még az $(1-z)^{-\varrho}$ binomiális soránál sem vették észre, amelynek együttható sorozata $0\leqq\varrho\leqq1$ esetén totálisan monoton. Az $|f(z)|\geqq|f(z)-s_n(z)|$ egyenlőtlenségből nyilván következik, hogy

$$|s_n(z)|\leqq 2|f(z)|,$$

tehát kétszeresen monoton együtthatósorozat mellett a hatványsor szeleteire ez is fennáll. Ez a FEJÉR-féle becslés azért figyelemre méltó, mert a hatványsor szeleteinek abszolút értékét a z helyen magán fellépő $f(z)$ függvényérték abszolút értékével határolja, nem pedig pl. az $|f(z)|$-nek a $|z|=\text{const}$ körön vett maximumával, amint általában szokásos.

10. A folytonos függvény FOURIER-sorának szingularitásaira vonatkozó vizsgálataival kapcsolatban, FEJÉR még 1910-ben kifejezte egy LANDAUhoz írott levélben azt a sejtését, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ sinus-sor szeletei 0 és π

között mind pozitívok, vagyis

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} > 0, \text{ ha } 0 < x < \pi$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Annyit be tudott bizonyítani, hogy e $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu}$ sinus-polinom a $(0, \pi)$ számközben a $\frac{\pi}{n+1}$ helyen veszi fel legnagyobb értékét, s e maximumok az n növesztésénél folyvást növekednek és az $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx > \frac{\pi}{2}$ értékhez tartanak (miért is a szóban forgó sor, mint a $\frac{\pi - x}{2}$ $(0 < x < 2\pi)$ függvény FOURIER-sora mutatja az ún. GIBBS-féle jelenséget). Sejtését D. JACKSON[75] és T. H. GRONWALL[76] egymástól függetlenül hamarosan be is bizonyították. Azután még többen foglalkoztak e teljesen elemi tény bizonyításával, köztük TURÁN PÁL,[77] aki a fenti sinus-polinom érdekes komplex integrálalakját állította elő, amelyből a pozitivitás evidenciába lép, s ugyanő[78] általánosítások mellett élesítette is a tételt, pozitív minoránst adva e sinus-polinom számára. A legközvetlenebb és legelemibb bizonyítással maga FEJÉR szolgált, lásd: *Einige Sätze, die sich auf das Vorzeichen einer ganzen rationalen Funktion beziehen; nebst Anwendungen etc.*, Monatshefte für Math. und Phys., 35 (1928), 305—344, spec. 339—342. E bizonyítást megfelelő előadásban középiskolai tanulók is megérthetik. E speciális elemi tétel felhasználásával később L. KOSCHMIEDER[79] bebizonyította azt az általános tételt, hogy egy a $0 < x < \pi$ számközben pozitív és felülről nem-konkáv függvény FOURIER-féle sinus-sorának részletösszegei mind pozitívok ebben az intervallumban. Ez volt az első ilyen típusú általános tétel, amelyet a mondott tulajdonságú függvény sinus-sorára bebi-

[75] D. JACKSON, Über eine trigonometrische Summe, *Rendiconti di Palermo,* 32 (1911), 257—262.

[76] T. H. GRONWALL, Über die Gibbssche Erscheinung und die trigonometrischen Summen $\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \cdots + \frac{1}{n} \sin nx$. *Math. Annalen,* 72 (1912), 228—243, spec. 229—231.

[77] P. TURÁN, Über die Partialsummen der Fourierreihe. *Journal of the London Math. Soc.*, 13 (1938), 278—282.

[78] P. TURÁN, On a trigonometrical sum. *Annales de la Société Polonaise de Math.*, 25 (1952) 155—161.

[79] L. KOSCHMIEDER, Vorzeicheneigenschaften der Abschnitte einiger physikalisch bedeutsamer Reihen. *Monatshefte für Math. und Phys.*, 39 (1932), 321—344.

zonyították. Maga FEJÉR lényegesen tovább jutott, megmutatva az ismételt középképzés „kiegyenlítő hatását" a következő tétellel:

Ha az $f(x)$ függvény a $0<x<\pi$ számközben pozitív és felülről konvex (nem-konkáv), akkor FOURIER*-féle sinus-sorának k-adrendű* CESÀRO*-középeit*[80] $S_n^{(k)}(x)$*-szel jelölve (mikor is* $S_n^{(0)}(x)$ *a közönséges részletösszeg), a* KOSCHMIEDER-féle $S_n^{(0)}(x)>0$ *egyenlőtlenségen kívül*

$$0<S_n^{(k)}(x)\leqq f(x)$$
$$(n,k=1,2,3,\ldots;\ 0<x<\pi)$$

és a harmadrendű $S_n^{(3)}(x)$ *középek már szintén konvexek ebben a szakaszban. E konvexitás a 0-, 1-, 2-edrendű középekre általánosságban nem érvényes. De ha a függvény még az* $f(\pi-x)=f(x)$ *szimmetria tulajdonsággal is bír, akkor már a másodrendű* $S_n^{(2)}(x)$ *középek konvexek a* $0<x<\pi$ *számközben.*

Ez irányú vizsgálatait FEJÉR több dolgozatban tette közzé, részben csak bizonyításvázlatokkal. Ezek egyike: *Neue Eigenschaften der Mittelwerte bei den Fourierreihen,* Journal of the London Math. Soc., 8 (1933), 53—62. Ebben részletesen be van bizonyítva a következő két tétel, amelyek e vizsgálatok alapját képezik:

I. *A* $\sum_{n=0}^{\infty} n\sin n\vartheta$ *sinus-sor 3-adrendű* $S_n^{(3)}(x)$ CESÀRO*-középei pozitívok a* $0<\vartheta<\pi$ *számközben.*

II. *A* $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\sin(2n-1)\vartheta$ *sinus-sor 2-edrendű* $S_n^{(2)}(x)$ CESÀRO*-középei pozitívok a* $0<\vartheta<\pi$ *intervallumban, kivéve, ha* $n=2\nu$, $\vartheta=\frac{\pi}{2}$. (E tételek a HÖLDER-féle középekre is érvényesek.)

[80] Nem-negatív egész k-ra az

$$u_0+u_1+\cdots+u_n+\cdots$$

végtelen sor k-adrendű CESÀRO-középei

$$S_n^{(k)}=\frac{s_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}}\qquad(k=0,1,2,\ldots),$$

ahol

$$s_n^{(0)}=\sum_{\nu=0}^{n}u_\nu,\quad s_n^{(k)}=\sum_{\nu=0}^{n}s_\nu^{(k-1)}.$$

A HÖLDER-féle közepek egyszerűen $H_n^{(0)}=s_n^{(0)}$ és

$$H_n^{(k)}=\frac{H_0^{(k-1)}+H_1^{(k-1)}+\cdots+H_n^{(k-1)}}{n+1}\qquad(k=1,2,3,\ldots).$$

FEJÉR előbbi tételével kapcsolatban TURÁN PÁL[81] a 0-adrendű közepekre vagyis a közönséges részletösszegekre is adott majoránst, bebizonyítván, hogy $S_n^{(0)}(x) \leqq 2f(x)$. Az általános esetet FEJÉR módszerével vezette vissza a $\frac{\pi - x}{2}$ és $\frac{x}{2}$ függvények speciális esetére.

11. FEJÉRnek azt az egyik jellemző vonását, hogy a bonyolult és magasabb régiókban mozgó vizsgálatokból le tudta szűrni az egyszerűt és az elemit, különösen mutatják azok a cikkei, amelyeket a harmonikus, ill. trigonometrikus és racionális polinomokról írt. Első ilyen nagyobb dolgozata: *Über trigonometrische Polynome*, Journal für die reine und angewandte Math. 146 (1915), 53—82. A végtelen harmonikus kifejtések helyett a harmonikus és a trigonometrikus polinomokat vizsgálva, trigonometrikus polinomokra pl. bebizonyítja ebben a dolgozatban a következő elemi tételt:

Ha a legföljebb n-edrendű

$$a_0 + a_1 \cos \vartheta + b_1 \sin \vartheta + \cdots + a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta$$

trigonometrikus polinom legnagyobb és legkisebb értéke M és μ, akkor a $M - a_0$ és $a_0 - \mu$ nem-negatív számokra

$$M - a_0 \leqq n(a_0 - \mu), \quad a_0 - \mu \leqq n(M - a_0).$$

Itt az egyenlőségi jel az egyik vagy a másik egyenlőtlenségben csak az esetben érvényes, midőn a trigonometrikus polinom

$$\gamma + \alpha[n \cos(\vartheta - \beta) + (n-1)\cos 2(\vartheta - \beta) + \cdots + \cos n(\vartheta - \beta)]$$

ahol α, β és γ tetszőleges valós állandók.

A szóban forgó egyenlőtlenségek más szóval azt jelentik, hogy a trigonometrikus polinom abszolút tagjára

$$\mu + \frac{M - \mu}{n+1} \leqq a_0 \leqq M - \frac{M - \mu}{n+1}.$$

Ez ekvivalens azzal a síkbeli potenciálelméleti tétellel, hogy *ha $u(x, y)$ legföljebb n-edfokú harmonikus polinom (vagyis kielégíti a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ síkbeli Laplace-egyenletet) és valamely (x_0, y_0) középpontú körön a legnagyobb és legkisebb értéke M és μ, akkor*

$$\mu + \frac{M - \mu}{n+1} \leqq u(x_0, y_0) \leqq M - \frac{M - \mu}{n+1}.$$

[81] P. TURÁN, i. h. [77].

Egyenlőség valamelyik oldalon csak az esetben áll fenn, midőn $u(x, y)$ a valós része valamely

$$\gamma+\alpha\{n[w\cdot(z-c)]+(n-1)[w\cdot(z-c)]^2+\cdots+[w\cdot(z-c)]^n\}$$

komplex polinomnak, ahol γ és α tetszőleges valós, w és c tetszés szerinti komplex állandók. Ez harmonikus polinomokra való élesítése a $\mu \leqq u(x_0, y_0) \leqq M$ egyenlőtlenségnek, amely a körön belül és azon rajta reguláris $u(x, y)$ harmonikus függvényre mindig fennáll.

E tételre FEJÉR megelőzően már két bizonyítást is közölt (Comptes-Rendus 157 (1913), 506 és 571), a szóban forgó dolgozatban alapul szolgált neki 1910. évi következő sejtése, amelyet általánosságban RIESZ FRIGYES, majd más módszerrel EGERVÁRY JENŐ bizonyított be:

a nem-negatív $\tau(\vartheta)$ trigonometrikus polinomok összességét a

$$\tau(\vartheta)=|\gamma(z)|^2_{z=e^{i\vartheta}}$$

képlet állítja elő, ahol $\gamma(z)$ tetszőleges komplex polinom (FEJÉR—RIESZ-tétel).

Dolgozatában FEJÉR a RIESZ FRIGYEStől származó bizonyítást közli némi módosítással és részletesen. E sejtésre O. TOEPLITZ[82] egy munkája vezette, ahol is szerepel az

$$\frac{n+1}{2}+n\cos\vartheta+(n-1)\cos 2\vartheta+\cdots+\cos n\vartheta=$$
$$=\frac{1}{2}|1+z+\cdots+z^n|^2_{z=e^{i\vartheta}}$$

képlet. A fenti általános képlet más szóval a legföljebb n-edrendű nem-negatív trigonometrikus polinomok együtthatóinak egy parameteres előállítását jelenti, amelyben $2n+2$ valós parameter szerepel, amelyek a komplex polinom együtthatóinak koordinátái.

Ugyanezen dolgozatban FEJÉR azt is bebizonyította, hogy *az 1 abszolút taggal kezdődő nem-negatív*

$$1+\lambda_1\cos\vartheta+\cdots+\lambda_n\cos n\vartheta\geqq 0$$

cosinus-polinomban a λ_1 együtthatóra

$$-2\cos\frac{\pi}{n+2}\leqq\lambda_1\leqq 2\cos\frac{\pi}{n+2}$$

s itt az egyenlőség be is következhetik.

[82] O. TOEPLITZ, Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen. *Nachrichten von der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen, Math.-Phys. Kl.* 1910, §4. Form. (3).

Ezekbe a vizsgálataiba SZÁSZ OTTÓ[83], EGERVÁRY JENŐ[84] és SZEGŐ GÁBOR[85] is bekapcsolódtak s az utóbbi tételt kiterjesztették általában nem-negatív trigonometrikus polinomokra, bebizonyítván (külön SZÁSZ OTTÓ, ill. SZÁSZ OTTÓ és EGERVÁRY, és külön SZEGŐ), hogy az 1 abszolút taggal kezdődő nem-negatív

$$1+(a_1\cos\vartheta+b_1\sin\vartheta)+\cdots+(a_n\cos n\vartheta+b_n\sin n\vartheta)\geqq 0$$

trigonometrikus polinomban a k-adrendű tag ϱ_k amplitudójára

$$\varrho_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}\leqq 2\cos\frac{\pi}{\left[\frac{n}{2}\right]+2}\qquad (k=1,2,\ldots,n).$$

Igen egyszerű bizonyítással szolgál (a $k=1$ esetre, amelyből az általános tétel már egyszerűen adódik) FEJÉR későbbi dolgozata: *Über eine Aufgabe der Harnackschen Potentialtheorie,* Nachrichten der Ges. der Wiss. zu Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1928, 109—117.

E cikkek közé tartozik még a már említett 1928. évi Monatshefte-cikk (132. old.). Ebben három elemi tétel szolgál a tárgyalás alapjául, amelyeket az ABEL-féle átalakítás ismételt alkalmazásával nyert képletekből olvasott ki FEJÉR. Ezek egyike a következő: *ha az*

$$s=a_0+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_n a_n$$

összegben a $\lambda_0=1,\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ *valós együtthatókra*

$$\lambda_0-\lambda_1\geqq\lambda_1-\lambda_2\geqq\cdots\geqq\lambda_{n-1}-\lambda_n\geqq\lambda_n\geqq 0,$$

akkor a

$$\sigma_k=\frac{s_0+s_1+\cdots+s_k}{k+1},\ s_k=a_0+a_1+\cdots+a_k\qquad (k=0,1,\ldots,n)$$

jelöléssel (vagyis, ha $\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ *az* $a_0+a_1+\cdots+a_n$ *összeg elsőrendű Cesàro-közepei) ez s összeg a számsíkon a* $\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ *pontokat tartalmazó legkisebb konvex sokszögbe esik.*

Ebből és a másik két hasonló tételből egyszerűen adódtak régebbi és részben új eredmények az egységkörön, ill. az egységgömbön belül pozitív harmonikus függvény sorkifejtésére vonatkozólag. Így pl. végelemzésben az

[83] O. SZÁSZ, Elementare Extremalprobleme über nichtnegative trigonometrische Polynome. *Sitzungsberichte der Bayer. Akad. der Wiss., Math.-Phys. Kl.* 1927, 185—196.

[84] E. EGERVÁRY und O. SZÁSZ, Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome. *Math. Zeitschrift,* 27 (1928), 641—652.

[85] G. SZEGŐ, Koeffizientenabschätzungen bei ebenen und räumlichen harmonischen Entwicklungen. *Math. Annalen,* 96 (1927), 601—632.

idézett tételből következett az a régebbi FEJÉR—SIDON[86]-féle eredmény, hogy *ha*

$$u(r, \vartheta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta) r^n$$

a $0 \leqq r < 1$ *egységkörben konvergens harmonikus kifejtése egy e körön belül pozitív harmonikus függvénynek, akkor e sor részletösszegei is pozitívok a* $0 \leqq r < \frac{1}{2}$ *körben; itt* $\frac{1}{2}$ *nem pótolható nagyobb számmal* (FEJÉR—SIDON-tétel).

12. Míg a komplex interpoláció területén C. RUNGE vizsgálatait vitte lényegesen tovább (**8.** pont), addig a valós interpoláció elméletében FEJÉR új utat nyitott, megalapítva a *lépcsőparabolák* konvergencia-elméletét. A M. T. A. 1915. november 15-i osztályülésén bemutatott *„Interpolációról"* c. dolgozatát (Mat. és Term. Értesítő, 34 (1916), 209—229) nyomban követte bővebb közleménye: *Über Interpolation*, Nachrichten der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1916, 66—91. Ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ egymástól különböző abszcisszák és $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tetszőleges ordináták, FEJÉR a sík $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ pontjai által meghatározott *lépcsőparabolának* nevezi azt a legföljebb $(2n-1)$-edfokú $H(x)$ racionális egész függvényt, amelyre

$$H(x_k) = y_k, \quad H'(x_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ez más szóval az a legföljebb $(2n-1)$-edfokú parabola, amely az adott pontokon átmegy és érintője ezekben a pontokban párhuzamos az abszcisszatengellyel. Ilyen egy és csak egy van, amint az HERMITE-féle interpoláció elméletéből jól ismeretes. Bevezetve az

$$\omega(x) = C(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n), \quad C \neq 0$$

polinomot, ez a lépcsőparabola

$$H(x) = y_1 h_1(x) + y_2 h_2(x) + \cdots + y_n h_n(x),$$

ahol

$$h_k(x) = \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right)\left(\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}\right)^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ez utóbbiakat FEJÉR a szóban forgó interpoláció *alappolinomjainak (alapfüggvényeinek)* nevezi. Ezek összege $\equiv 1$, éppen úgy, mint a LAGRANGE-interpolációnál fellépő

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

[86] S. SIDON, Ein Satz über positive harmonische Polynome. *Jahresbericht der deutschen Mat.-Ver.*, 35 (1926), 97—99.

LAGRANGE-féle alappolinomoké, s amelyekkel kifejezve az adott x_k helyeken rendre az előírt y_k értékeket felvevő legföljebb $(n-1)$-edfokú racionális egész függvény, az ún. LAGRANGE-parabola

$$L_n(x) = y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + \cdots + y_n l_n(x).$$

FEJÉR figyelmét mindjárt az a két speciális eset vonta magára, midőn az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyek a $P_n(x)$ LEGENDRE-, ill. a $T_n(x) = [\cos n\vartheta]_{x=\cos\vartheta}$ elsőfajú CSEBISEV-polinom gyökei, mikor is az alapfüggvények nem-negatívok a $-1 \leqq x \leqq 1$ számközben. Ebből az egyszerű tényből tüstént következett, hogy ha az y_k ordináták egy a $-1 \leqq x \leqq 1$ intervallumban definiált $f(x)$ valós függvény $f(x_k)$ értékei, akkor LEGENDRE- vagy CSEBISEV-abszcisszák esetén a lépcsőparabolák összessége e számközben „*stabilis*" az $f(x)$-től való függésük tekintetében. Ez pontosan a következőt jelenti: *ha az $f(x)$ függvényhez tartozó lépcsőparabola $H(x)$, az $f(x)+\delta(x)$ függvényhez tartozó pedig $H^*(x)$, akkor*

$$|H(x) - H^*(x)| \leqq \delta \quad (-1 \leqq x \leqq 1),$$

hacsak

$$|\delta(x)| \leqq \delta \quad (-1 \leqq x \leqq 1),$$

bármelyik $P_n(x)$ vagy $T_n(x)$ polinom gyökeit választjuk is $x_1, x_2, \ldots, x_n$ alappontokul.

Ugyancsak folyománya volt FEJÉRnél az alappolinomok nem-negatív voltának, hogy *ha $m \leqq f(x) \leqq M$, akkor* LEGENDRE- *vagy* CSEBISEV-*abszcisszák esetén egyben $m \leqq H(x) \leqq M$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$.*

A lépcsőparabolák konvergenciáját illetően FEJÉR LEGENDRE-abszcisszák esetére a következő tételt bizonyította be: *ha $f(x)$ a $-1 \leqq x \leqq 1$ számközben korlátos függvény s valamely belső ξ helyen folytonos, akkor a $P_n(x)$ polinom $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ gyökeihez mint alappontokhoz és az $y_k^{(n)} = f(x_k^{(n)})$ értékekhez mint ordinátákhoz tartozó $H_n(x)$ lépcsőparabolára $n \to +\infty$ esetén*

$$H_n(\xi) \to f(\xi);$$

amennyiben $f(x)$ folytonos a $-1 \leqq x \leqq 1$ intervallumban, a konvergencia ennek minden belső subintervallumában egyenletes.

Különös viselkedést mutattak a lépcsőparabolák a ± 1 helyeken. Először is tüstént következett, hogy LEGENDRE-*abszcisszák esetén*

$$H_n(1) = H_n(-1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} H_n(x)\,dx.$$

Mivel pedig a szóban forgó abszcisszák és ordináták által meghatározott $L_n(x)$

LAGRANGE-parabolára GAUSSnak a közelítő kvadratúrára vonatkozó tételéből kifolyólag

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} H_n(x)\,dx$$

és STIELTJES tétele értelmében (melyről még alább is szó lesz) $n \to +\infty$ esetén

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)\,dx \to \int_{-1}^{1} f(x)\,dx,$$

hacsak $f(x)$ korlátos és RIEMANN szerint integrálható függvény, FEJÉR ily módon a következő eredményre jutott:

Ha $f(x)$ korlátos és RIEMANN *szerint integrálható függvény a* $-1 \leqq x \leqq 1$ *számközben, akkor* LEGENDRE-*abszcisszák mellett*

$$\lim_{n=+\infty} H_n(\pm 1) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

(FEJÉR-*féle jelenség.*[87])

A CSEBISEV-abszcisszáknak megfelelő lépcsőparabolák konvergenciájára vonatkozólag FEJÉR a fentebbihez hasonló tételt talált azzal az egyszerűbb záradékkal, hogy *ha $f(x)$ folytonos a $-1 \leqq x \leqq 1$ számközben, akkor a* CSEBISEV-*abszcisszákhoz tartozó lépcsőparabolák ebben az egész zárt intervallumban egyenletesen tartanak e függvényhez.*

Különösen e második approximáció-tételben WEIERSTRASS első approximáció-tételének igen egyszerű és szemléletes konkrét esetével állunk szemben. Ez a trigonometrikus polinomokkal való közelítést illető FEJÉR-féle approximáció-tételnek felel meg (107. old.), de annál annyiban elemibb, hogy az integrál fogalmát nem használja fel. A tétel érdekességét nagyban emeli, hogy amint G. FABER[88] vizsgálatai óta ismeretes, a LAGRANGE parabolákra vonatkozólag ilyen approximáció-tétel nem áll fenn, bárhogyan válasszuk is az alapul szolgáló pontcsoportok sorozatát a szóban forgó intervallumban.

Ezt az approximáció-tételt FEJÉR később általánosította. Ha ui. az előbbi (x_k, y_k) pontokhoz rendre meg vannak adva tetszőleges y'_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ értékek, e pontokon át egy és csak egy legföljebb $(2n-1)$-edfokú parabola vezethető, amelynek érintője ezekben a pontokban rendre az adott $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ iránytangensekkel bír. Ezt nevezhetjük az adott pontok és érintők által meg-

[87] Az elnevezést illetően vö. E. EGERVÁRY and P. TURÁN, Notes on interpolation V (On the stability of interpolation). *Acta Math. Hung.*, 9 (1958), 259—267, spec. 261.

[88] G. FABER, Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen. *Jahresbericht der deutschen Math.-Ver.*, 23 (1914), 192—210.

határozott *általánosított lépcsőparabolának;* ez képletben kifejezve

$$\chi(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k h_k(x) + \sum_{k=1}^{n} y'_k \mathfrak{H}_k(x),$$

ahol $h_k(x)$ a fenti alappolinom, míg

$$\mathfrak{H}_k(x) = (x - x_k)\left[\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)}\right]^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ez utóbbiakat FEJÉR *másodfajú alappolinomoknak* nevezi az előbbi *elsőfajú alappolinomokkal* szemben, a jelzett általánosítással foglalkozó későbbi dolgozatában: *Über Weierstrasssche Approximation besonders durch Hermitesche Interpolation,* Math. Annalen, 102 (1930), 707—725. Ebben bebizonyítja az előbbinél általánosabb következő konkrét approximáció-tételt:

Ha $f(x)$ a $-1 \leq x \leq 1$ számközben folytonos függvény s a $T_n(x)$ CSEBISEV-*polinom*

$$x_{nk} = \cos(2k-1)\frac{\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

gyökeinek megfelelő $(x_{nk}, f(x_{nk}))$ pontok és bizonyos y'_{nk} derivált értékek által meghatározott $\chi_n(x)$ lépcsőparabolát annak a megszorításnak vetjük alá, hogy

$$|y'_{nk}| \leq \Delta \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

ahol Δ az n-től független állandó, akkor e zárt intervallumban $n \to +\infty$ esetén

$$\chi_n(x) \to f(x)$$

egyenletesen áll fenn.

E FEJÉR által megkezdett úton lényegesen tovább jutott SZEGŐ GÁBOR[89], aki az általánosított lépcsőparabolák vizsgálatát kiterjesztette arra az általános esetre, midőn az alappontok a $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ JACOBI-polinom[90] gyökei. Többek

[89] G. SZEGŐ, Über gewisse Interpolationspolynome, die zu den Jacobischen und Laguerreschen Abszissen gehören. *Math. Zeitschrift,* 35 (1932), 579—602; vö. ugyanattól, i. m. [68] 338—342.

[90] Ha $\alpha > -1$ és $\beta > -1$, az e parametereknek megfelelő n-edfokú JACOBI-polinom

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!\,2^n}\,\frac{1}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}\,\frac{d^n[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]}{dx^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

vagy más alakban

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\alpha+n}{\nu}\binom{\beta+n}{n-\nu}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\nu}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-\nu}.$$

A $P_n(x)$ LEGENDRE-polinom ennek $J_n^{(0,0)}(x)$ speciális esete. Konstans faktortól eltekintve a $T_n(x)$ CSEBISEV-polinom is JACOBI-polinom, nevezetesen

$$J_n^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots 2n}\, T_n(x).$$

Általában az $\alpha = \beta$ esetnek megfelelő JACOBI-polinomok az ún. *ultraszferikus polinomok.*

között megmutatta, hogy $-1<\alpha<0$, $-1<\beta<0$ esetén az előbbi tétel akkor is érvényes, ha alappontokul a $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ JACOBI-polinom gyökeit választjuk. Más módszerrel élt hasonló vizsgálataiban J. SHOHAT[91].

Igen gyümölcsözőnek bizonyult azután az elmélet további fejlődésére nézve a *normális pontcsoport* és *szigorúan normális pontcsoport-sorozat* fogalmának FEJÉR által történt bevezetése. Erre vonatkozó fontos dolgozata: *Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte,* Math. Annalen, 106 (1932), 1—55. Itt (különben már előbbi cikkében is) a $h_k(x)$ elsőfajú alapfüggvény fenti képletében szereplő

$$1-\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)$$

tényezőt FEJÉR *karakterisztikus lineártényezőnek*, ennek 0-helyét (ha $\omega''(x_k)\neq 0$), vagyis a

$$X_k=x_k+\frac{\omega'(x_k)}{\omega''(x_k)}$$

helyet az x_k alapponthoz tartozó *konjugált pontnak* nevezi az adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontcsoportra vonatkozólag. Ha $\omega''(x_k)=0$, akkor e lineártényező $\equiv 1$ s ez esetben FEJÉR azt mondja, hogy a X_k konjugált pont a „végtelenben" van. Midőn az alappontok pl. a $-1\leqq x\leqq 1$ számközbe esnek, de ennek belsejébe nem esik egyetlen konjugált pont sem, FEJÉR későbbi elnevezésével az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontcsoport *normális* e számközre vonatkozólag. Ebben az esetben a karakterisztikus lineártényezők nem-negatívok az adott $-1\leqq x\leqq 1$ intervallumban, s ennélfogva ugyanez áll a $h_k(x)$ elsőfajú alapfüggvényekre is. A fentebb szerepelt LEGENDRE-, ill. CSEBISEV-abszcisszák ilyen normális pontcsoportot alkotnak. Ha a szóban forgó $-1\leqq x\leqq 1$ számközben valamely

$$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

pontcsoport-sorozat van adva, amelyben tehát az n-edik pontcsoport éppen n pontból áll, ezt FEJÉR akkor nevezi *szigorúan normálisnak,* ha van olyan $\varrho>0$ szám, amelynél valamennyi pontcsoport karakterisztikus lineártényezői nem kisebbek ugyanebben a számközben, vagyis a ± 1 helyeken mindegyik ilyen tényező $\geqq\varrho$. (Szükségképp $\varrho\leqq 1$, minthogy az x_k helyen a megfelelő karakterisztikus lineártényező $=1$.) Például a $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ JACOBI-polinomok ($n=1, 2, 3, \ldots$) gyökcsoportjai alkotta pontcsoport-sorozat szigorúan normális a $-1\leqq x\leqq 1$ számközben, hacsak $-1<\alpha<0$, $-1<\beta<0$, így speciálisan a $T_n(x)$ CSEBISEV-polinom esetében, amelynél $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$. Mármost GRÜN-

[91] J. SHOHAT, On interpolation, *Annals of Mathematics,* (2) 34 (1933), 130—146.

WALD GÉZA[92] megmutatta, hogy FEJÉR előbbi approximáció-tétele minden szigorúan normális pontcsoport-sorozat alapulfektetése mellett igaz, s ezzel igenlő választ adott FEJÉR idevágó kérdésére, amelyet ő *„On the characterization of some remarkable systems of points of interpolation by means of conjugate points”* c. dolgozatában (American Math. Monthly, 41 (1934), 1—14, spec. 13—14) felvetett. A *„normális pontcsoport”*, ill. *„szigorúan normális pontcsoport-sorozat”* elnevezést is itt használta FEJÉR először.

Fontos felismerése volt FEJÉRnek, hogy a lépcsőparabolák elméletében fellépő konjugált pontok, amelyekről éppen szó volt, hasznosíthatók a LAGRANGE-interpolációnál is. Az ezzel foglalkozó fent idézett dolgozatában a LAGRANGE-parabolák konvergenciájára vonatkozólag többek között bebizonyította a következő szép tételt:

Ha az $f(x)$ függvény az $a \leqq x \leqq b$ számközben $\alpha > \frac{1}{2}$ kitevőjű LIPSCHITZ-*feltételnek tesz eleget, vagyis*

$$|f(x')-f(x'')| \leqq C|x'-x''|^{\alpha} \qquad \left(a \leqq x' < x'' \leqq b,\ \alpha > \frac{1}{2}\right),$$

akkor ez intervallumban szigorúan normális pontcsoport-sorozatot fektetvén alapul, az n-edik pontcsoporthoz és az $f(x)$ függvényhez tartozó $L_n(x)$ LAGRANGE-*parabolára $n \to +\infty$ esetén*

$$L_n(x) \to f(x)$$

az egész számközben egyenletesen áll fenn.

E tételből egyszerűen következett, miszerint *normális pontcsoport-sorozat az intervallumot mindenütt sűrűn tölti ki abban a szigorúbb értelemben, hogy bármily kis subintervallumban van pontja az n-edik pontcsoportnak, ha n elég nagy.* Ilyen „FEJÉR-típusú tételeket”, amelyekben a pontcsoport-sorozat eloszlására történik következtetés az interpolátorius tulajdonságokból, később ERDŐS PÁL és TURÁN PÁL[93] találtak.

A fenti approximáció-tételben elkerülhetetlen, hogy az adott folytonos függvényre ne tegyünk valami megszorító feltevést, mint amilyen itt a LIPSCHITZ-feltétel (amely a folytonosságot már maga után vonja). Ugyanis a G. FABER idézett dolgozatában (lásd e tanulmány 139. oldalán) foglalt híres tétel (amelynek bebizonyítása ott azonban nem kifogástalan) éppen azt mondja, hogy bármiképp véve is fel a szóban forgó számközben valamely pontcsoport-

[92] G. GRÜNWALD, On the theory of interpolation. *Acta Mathematica,* 75 (1943), 219—245. Vagy ugyanattól, Az Hermite-féle interpolációról. *Mat. és Fiz. Lapok,* 48 (1941), 272—284.

[93] P. ERDŐS and P. TURÁN, On interpolation, III. Interpolatory theory of polynomials. *Annals of Mathematics,* 41 (1940), 510—553, spec. 515.

sorozatot, mindig van olyan folytonos függvény, amelynél a megfelelő Lagrange-parabolák ugyanott nem tartanak egyenletesen a függvényhez. E tételnek egy igen egyszerű és kifogástalan bebizonyítása FEJÉRtől származik. Ezt függelékként tartalmazó dolgozata: *Die Abschätzung eines Polynoms in einem Intervalle, wenn Schranken für seine Werte und ersten Ableitungswerte in einzelnen Punkten des Intervalles gegeben sind, und ihre Anwendung auf die Konvergenzfrage Hermitescher Interpolationsreihen,* Math. Zeitschrift, 32 (1930), 426—457. Ebben különben fenti approximáció-tételét tovább általánosította, bebizonyítván, hogy *a* CSEBISEV-*abszcisszákra vonatkozó approximáció-tétel akkor is érvényes, ha az n-edik pontcsoporthoz előírt* $\chi_n'(x_{nk})=y_{nk}'$ *deriváltértékekre*

$$|y_{nk}'|\leqq\frac{1}{\sqrt{1-x_{nk}^2}}\,\frac{n}{\log n}\,\varepsilon_n,$$

ahol $\varepsilon_n\to 0$.

Érdekes CSEBISEV-típusú feladattal foglalkozó interpoláció-elméleti dolgozata: *Bestimmung derjenigen Abszissen eines Intervalles, für welche die Quadratsumme der Grundfunktionen der Lagrangeschen Interpolation im Intervalle ein möglichst kleines Maximum besitzt,* Annali della R. Scuola Norm. Sup. die Pisa, (2) 1 (1932), 263—276. Ebben FEJÉR bebizonyítja a LEGENDRE-polinomokból képezett

$$P_n(x)-P_{n-2}(x)=\frac{2n-1}{n(n-1)}(x^2-1)P_{n-1}'(x)$$

polinom gyökcsoportjának következő jellemző minimum-tulajdonságát:

A $-1\leqq x\leqq 1$ *számközben fekvő* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *helyeknek mint alappontoknak megfelelő* LAGRANGE-*féle alapfüggvények négyzetösszege e számközre vonatkozó maximumának lehető legkisebb értéke*

$$\min\max_{-1\leqq x\leqq 1}\{l_1(x)^2+l_2(x)^2+\cdots+l_n(x)^2\}=1$$

s ezt a minimális értéket a $P_n(x)-P_{n-2}(x)$ *polinom gyökeinek csoportja és csakis ez, szolgáltatja.*

Ezzel kapcsolatban közbevetőleg megjegyzem, hogy FEJÉR problémafelvetése nyomán EGERVÁRY JENŐ[94] megmutatta, miszerint a $P_n(x)-P_{n-2}(x)$ polinomot az n-edfokúak között egy konstans faktortól eltekintve az jellemzi, hogy az $x_1=-1$ és $x_n=1$ gyökökön kívül még $n-2$ olyan különböző $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ gyökkel bír, amelyek inflexiós pontok. Maga FEJÉR a $P_n(x)$ LEGENDRE-polinom geometriai jellemzését a következő tétellel adta meg: *a*

[94] E. EGERVÁRY, Über die charakteristischen geometrischen Eigenschaften der Legendreschen und Tschebyscheffschen Polynome. *Archiv der Math. und Phys.*, (3) 27 (1918), 17—24, spec. 22—23.

$P_n(x)$ LEGENDRE-*polinomot, mint n-edfokú racionális egész függvényt azzal jellemezhetjük, hogy az* $x=1$ *helyen az* 1 *értéket veszi fel,* 1 *és* -1 *között n különböző* $x_1<x_2<\cdots<x_n$ *gyöke van, s deriváltjának* $\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{n-1}$ *gyökeire a polinom görbéje és az abszcissza-tengely közti terület abszolút értéke* (-1)*-től* x_1*-ig akkora, mint* x_1*-től* ξ_1*-ig, azután általában* ξ_k*-tól* x_{k+1}*-ig akkora, mint* x_{k+1}*-től* ξ_{k+1}*-ig, végül* ξ_{n-1}*-től* x_n*-ig akkora, mint* x_n*-től* 1*-ig.* FEJÉRnek e gyönyörű elemi tételét és annak bizonyítását EGERVÁRY közölte idézett cikkében[95]. E két utóbbi tétel értelmében mind a $P_n(x)-P_{n-2}(x)$ polinom, mind $P_n(x)$ maga bizonyos fokig a $\sin x$ függvényre emlékeztet.

Figyelemre méltó elemi tényeket talált FEJÉR az interpolációval szoros kapcsolatban álló közelítő kvadratúra elméletében. Ezzel foglalkozó dolgozata: *Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen,* Math. Zeitschrift, 37 (1933), 287—309. Ha $f(x)$ integrálható függvény az $a\leqq x\leqq b$ számközben s $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ennek különböző helyei, az $\int_a^b f(x)\,dx$ integrál helyett a függvénnyel ez x_k helyeken megegyező legföljebb $(n-1)$-edfokú $L_n(x)$ racionális egész függvény integrálját véve, ez a „közelítő kvadratúra-érték" e LAGRANGE-parabola fentebbi képletére tekintettel

$$Q[f(x)]=f(x_1)\int_a^b l_1(x)\,dx+f(x_2)\int_a^b l_2(x)\,dx+\cdots+f(x_n)\int_a^b l_n(x)\,dx.$$

Az itt szereplő

$$A_1=\int_a^b l_1(x)\,dx,\quad A_2=\int_a^b l_2(x)\,dx,\ldots,\quad A_n=\int_a^b l_n(x)\,dx$$

számokat (amelyek függetlenek az $f(x)$ függvénytől), a közelítő kvadratúra *állandóinak* vagy COTES-*féle számainak* nevezzük. Megadván az $a\leqq x\leqq b$ számközben valamely pontcsoport-sorozatot, amelynek n-edik pontcsoportja $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$, kérdezhetjük, hogy a

$$Q_n[f(x)]=f(x_1^{(n)})A_1+f(x_2^{(n)})A_2+\cdots+f(x_n^{(n)})A_n$$

közelítő kvadratúra-érték $n\to+\infty$ esetén az $\int_a^b f(x)\,dx$ integrálhoz tart-e?

T. J. STIELTJES ismert klasszikus tétele szerint ez minden korlátos és RIEMANN szerint integrálható $f(x)$ függvényre fennáll, ha n-edik pontcsoportnak a $P_n(x)$ LEGENDRE-polinom gyökeit választjuk, mikor is „GAUSS-féle közelítő kvadratúráról" szokásos beszélni. Ez esetben a COTES-féle számok tudvalevőleg

95 A fogalmazást illetően vö. SZÁSZ PÁL, *A differenciál- és integrálszámítás elemei,* 2. kiad., Budapest 1951, II. köt. 72.

mind pozitívok. Mármost FEJÉR bebizonyította STIELTJES tételének következő nagymérvű általánosítását (amelyet előtte W. STEKLOV is közölt egy orosz nyelvű dolgozatban[96]):

Ha az n-edik pontcsoportnak megfelelő COTES-*féle számok bizonyos n-től kezdve nem-negatívok, akkor az adott pontcsoport-sorozattal definiált közelítő kvadratúránál*

$$\lim_{n=+\infty} Q_n[f(x)] = \int_a^b f(x)dx,$$

valahányszor $f(x)$ korlátos és RIEMANN *szerint integrálható függvény az $a \leqq x \leqq b$ számközben.*

Különös érdekességgel bír FEJÉRnek az a megállapítása, hogy *a $-1 \leqq x \leqq 1$ intervallumra vonatkozólag a $T_n(x)$, valamint a másodfajú $U_n(x)$* CSEBISEV-*polinom*[97] *gyökeihez mint alappontokhoz tartozó* COTES-*féle számok pozitívok.*

A $P_n(x)$ LEGENDRE-polinom gyökcsoportján kívül pedig az ilyen pontcsoportok egész osztályát megadja FEJÉR következő tétele: *ha az A, B valós számok úgy vannak választva, hogy az*

$$\omega(x) = P_n(x) + AP_{n-1}(x) + BP_{n-2}(x)$$

polinomnak (ahol $P_n(x)$ az n-edfokú LEGENDRE-*polinom) a $-1 \leqq x \leqq 1$ számközben n különböző gyöke van, továbbá $B \leqq 0$, akkor ez intervallumra vonatkozólag e gyököknek mint alappontoknak megfelelő* COTES-*féle számok pozitívok.* Eszerint a $P_n(x)$ polinom gyökcsoportján kívül ($A = B = 0$ eset), ilyen pl. a $P_n(x) - P_{n-1}(x)$ valamint a $P_n(x) - P_{n-2}(x)$ polinom gyökcsoportja ($A = -1$, $B = 0$, ill. $A = 0$, $B = -1$ eset).

Ebben az irányban tovább jutott SZEGŐ GÁBOR[98], aki megmutatta, hogy a $J_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ ultraszferikus polinom gyökcsoportjának megfelelő COTES-féle számok a $-1 \leqq x \leqq 1$ számközre vonatkozólag $-1 < \alpha \leqq \frac{3}{2}$ esetén bizonyos n-től kezdve pozitívok, sőt a $-1 < \alpha \leqq 0$, valamint az $\frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq 1$ esetben kezdettől fogva ilyenek.

96 *Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences,* Petrograd (6) 10 (1916), 169—186, spec. 176—179. Vö. G. SZEGŐ [68], 347, 407.

97 Az $U_n(x)$ másodfajú CSEBISEV-polinom

$$U_n(x) = \left[\frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta}\right]_{x=\cos\vartheta}.$$

98 G. SZEGŐ, i. m. [68] 356—360.

Mindezekben az esetekben tehát FEJÉR fenti kvadratúra-tétele alkalmazható. Tételéből FEJÉR levonta még azt a szép következtetést, hogy

ha az n-edik pontcsoportnak megfelelő $A_k^{(n)}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ COTES-*féle számok bizonyos n-től kezdve nem-negatívok, akkor a pontcsoport-sorozat az intervallumot mindenütt sűrűn tölti ki a szó szigorúbb értelmében, azaz bármely kis subintervallumban van pontja az n-edik csoportnak, ha n elég nagy; és* $\max A_k^{(n)} \to 0$, *midőn* $n \to +\infty$.

Amíg FEJÉR kvadratúra-tétele elegendő feltételt fejez ki, PÓLYA GYÖRGY[99] megadta a szükséges és elegendő feltételét is annak, hogy az $a \leqq x \leqq b$ számközben felvett pontcsoportsorozat alapulfektetése mellett a $Q_n[f(x)]$ közelítő kvadratúra-érték minden *folytonos* függvény esetén az $\int_a^b f(x)dx$ integrálhoz tartson. E feltétel az, hogy az n-edik pontcsoportnak megfelelő COTES-féle számok abszolút értékeinek összege korlátos legyen.

STIELTJES említett kvadratúra-tételének más irányú általánosítását később ERDŐS PÁL és TURÁN PÁL adták[100]. Ezt megelőzően SZEGŐ GÁBOR[101] megmutatta, hogy a $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ JACOBI-polinom gyökcsoportját véve n-edik pontcsoportnak, STIELTJES kvadratúra-tétele $\max(\alpha,\beta)<\frac{3}{2}$ esetén érvényes, viszont $\max(\alpha,\beta)>\frac{3}{2}$ esetén általában nem érvényes.

Különben az irodalom, amely FEJÉR interpoláció-elméleti munkái nyomán keletkezett, s amelyhez magam is ismételten hozzájárultam[102], szintén olyan kiterjedt, hogy annak ismertetése külön tanulmány tárgyát képezhetné.

*

Nem érintettem FEJÉRnek azokat a munkáit, amelyeket más szerzőkkel közösen írt annak megjelölése nélkül, hogy mely részek erednek tőle magától. Ezek közül csak a konformis leképezés alaptételének FEJÉRtől és RIESZ FRIGYEStől származó híres egyszerű bizonyítását említem meg, amelyet ők

99 G. PÓLYA, Über die Konvergenz von Quadraturverfahren. *Math. Zeitschrift*, 37 (1933), 264—286.

100 P. ERDŐS and P. TURÁN, On interpolation. I. Quadrature- and mean-convergence in the Lagrange interpolation. *Annals of Math.*, 38 (1937), 142—155, spec. 146, Theorem II.

101 G. SZEGŐ, Asymptotische Entwicklungen der Jacobischen Polynome. *Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft*, 10 (1933), 48, 102—108.

102 Lásd pl. P. SZÁSZ, On quasi-Hermite-Fejér interpolation. *Acta Math. Hung.*, 10 (1959), 413—439.

maguk nem publikáltak, hanem engedelmükkel RADÓ TIBOR[103] tett közzé, s amelynek keletkezését FEJÉR saját elbeszéléséből ismerem.

Végezetül azt hiszem, aki az elmondottak nyomán FEJÉR munkáit tanulmányozza is, az meg fog győződni arról, hogy FEJÉR *Lipót az egyszerű tételek és módszerek új utakat törő mestere volt.*

Meghalt 1959. október 15-én, kitölthetetlen űrt hagyva maga után. Öt nap múlva temettük a Pantheonban, a nemzet nagyjai közé. Vele közszeretetben és köztiszteletben álló nagy ember, maga körül iskolát alapító nagyhatású tanár, és világhírű nagy tudós, századunk egyik vezető matematikusa szállott sírba. De munkáiban továbbra is él, mert utakat nyitott meg, amelyeken az utána jövők tovább haladhatnak!

Szász Pál

[103] T. RADÓ, Über die Fundamentalabbildung schlichter Gebiete. *Szegedi Acta,* 1 (1922/23), 240—251, spec. 241—242.