# A KOMPLEX-RENDŰ ÁLTALÁNOSÍTOTT WEYL-INTEGRÁLOK ÉS DERIVÁLTAK EGYSÉGES ELMÉLETÉHEZ, II.*

Írta: MIKOLÁS MIKLÓS

## 7. §. $W_s$-limeszek a $0 < \Re(s) \leqq 1$ sávban és Weyl-féle törtrendű integrálok; a zetafüggvényre emlékeztető további előállítások

**1.** Külön figyelmet, tüzetesebb vizsgálatot igényel a (4. 2), (4. 3) sorok és a (4. 4) integrál viselkedése a $\sigma > 1$ alaptartományhoz közvetlenül csatlakozó $0 < \sigma \leqq 1$ sávban.

Látni fogjuk pl., hogy $s$-et e sávban rögzítve, bármely ($L$-integrálható) függvény $W_s$-limitálható legalább *majdnem mindenütt* a $0 < x < 1$ intervallumban; ha pedig $f(u)$-t a RIESZ FRIGYES-féle $L^q(0,1)$ $(1 < q \leqq \infty)$ osztályok[42] valamelyikéből választjuk, akkor $f_{[s]}(x)$ létezése $0 < \sigma \leqq 1$ egy alkalmas részéből vett $s$-értékek mellett *minden* $x$-re is biztosítva van.

**2.** Részletesebben és pontosabban:

**VI. tétel.** 1. *Jelentse $s$ a $0 < \sigma \leqq 1$ sávnak egy pontját.*

*Tetszőleges pozitív $\lambda$ mellett fennáll a*

$$
(7.1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\int_0^1 f(x-t)\,[\mathfrak{Z}_s(t)-\mathfrak{Z}_s(x)]\,dt=\\
&=\cos\frac{\pi s}{2}\cdot \overset{(C,\lambda)}{\sum_{n=1}^{\infty}}\frac{2a_n(x)}{(2n\pi)^s}+\sin\frac{\pi s}{2}\cdot \overset{(C,\lambda)}{\sum_{n=1}^{\infty}}\frac{2b_n(x)}{(2n\pi)^s}
\end{aligned}
\right.
$$

*kapcsolat az $\int_0^1 f(x-t)\,\mathfrak{P}_s(t)\,dt$, $\int_0^1 f(x-t)\,\mathfrak{Q}_s(t)\,dt$ integrálok bármely közös $(0,1)$-beli Lebesgue-pontjában[43] s így m. m. $x$-re; a jobboldali sorok majdnem mindenütt konvergensek is. Speciálisan:* (7. 1) *minden $x$-re érvényes, midőn $\sigma = 1$, sőt $s = 1$ esetén a $(C,\lambda)$-szummák összegekkel helyettesíthetők.*

* A dolgozat I. része az MTA III. Osztályának Közleményei X/1. (1960) számában (59–91. old.) jelent meg. A fejezetek és a tételek számozása az előző részek számozásához kapcsolódik. A teljes irodalomjegyzéket az I. rész tartalmazza.

[42] Mint ismeretes, $L^q(a', a'')$ azoknak az $(a', a'')$-ben mérhető $f$ függvényeknek az összességét jelenti, melyekre itt $|f|^q$ $L$-integrálható; $L^\infty(a', a'')$-t az alábbiakban azonosítjuk $B(a', a'')$-vel, az $(a', a'')$-ben korlátos, $L$-integrálható függvények osztályával.

[43] Egy $g(u)$ függvénynek $x$ LEBESGUE-pontja, ha $\int_x^{x+h} |g(u)-g(x)|\,du = o(h)\ (h \to 0)$.

2. *Tegyük fel, hogy* $f(u) \in L^q(0,1)$ $(q$ *fix*, $1 \leqq q \leqq \infty)$.

*Akkor* (7.1) *minden* $x$*-re érvényes* $(C, \lambda)$*-szummabilitás helyett konvergenciával, feltéve, hogy* $\sigma > 1/q$; *e félsíkbeli* $s$*-értékekre egyúttal* $f_{[s]}(x)$ *létezik és folytonos* $(0,1)$*-ben, nevezetesen*

$$f_{[s]}(x) = \int_0^1 f(x-t)\,[\mathfrak{Z}_s(t) - \mathfrak{Z}_s(x)]\,dt \qquad \left(\sigma > \frac{1}{q}\right). \tag{7.2}$$

*Itt a* $q = \infty$ *esetben* $1/q$ *helyén* 0 *értendő; ha* $q = 1$, (7.2) *és* $f_{[s]}(x)$ $(0,1)$*-beli folytonossága a* $\sigma = 1$ *határegyenesen is fennáll.*

BIZONYÍTÁS. 1. Legyen $s$ fix, $0 < \sigma \leqq 1$.
Tekintsük a

$$\Phi_s(x) = \int_0^1 f(x-t)\,\mathfrak{P}_s(t)\,dt, \qquad \tilde{\Phi}_s(x) = \int_0^1 f(x-t)\,\mathfrak{Q}_s(t)\,dt \tag{7.3}$$

integrálokat (vö. (3.17), (3.18)); minthogy ezek $L(0,1)$-beli periodikus függvények konvolúciói, mindkettő szintén $L$-integrálható és m.m. $x$-re létezik $(0,1)$-ben. Továbbá könnyen belátható, hogy a (7.1) jobboldalán előforduló két sor $\Phi_s(x) - \alpha_0 \mathfrak{P}_s(x)$, ill. $\tilde{\Phi}_s(x) - \alpha_0 \mathfrak{Q}_s(x)$ $(0,1)$-hez tartozó FOURIER-sora.[44] — Így a kiterjesztett FEJÉR—LEBESGUE-féle szummáció-tétel alapján[45] fennáll $(\lambda > 0)$

$$\begin{cases} \Phi_s(x) = \overset{(C,\lambda)}{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}} 2(2n\pi)^{-s}(\alpha_n \cos 2n\pi x + \beta_n \sin 2n\pi x), \\ \tilde{\Phi}_s(x) = \overset{(C,\lambda)}{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}} 2(2n\pi)^{-s}(\alpha_n \sin 2n\pi x - \beta_n \cos 2n\pi x) \end{cases} \tag{7.4}$$

$\Phi_s(x)$, ill. $\tilde{\Phi}_s(x)$ összes LEBESGUE-pontjaiban, tehát (vö. (3.1)) egyúttal (7.1) is a szóban forgó két halmaz közös részében. A $0 < x < 1$ intervallum azon pontjai, melyekben (7.1) nem érvényes, nyilván nullamértékű halmazt alkotnak, mivel — mint ismeretes — bármely $L$-integrálható függvényre nézve az integrációs köz m.m. helye LEBESGUE-pont.

Vegyük még észre, hogy $n^{-s}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ $\sigma > 0$ mellett ún. quasi-konvex sorozat, úgyhogy alkalmazhatóvá válik egy *konvergencia-faktorokkal* kapcsolatos lemma[46]; innen adódik, hogy $f(u)$ $(0,1)$-hez tartozó FOURIER-sorának és a megfelelő konjugált sornak m.m. szummabilis volta, valamint az e sorok $n$-edik szeletére vonatkozó ismert $o(\log n)$ becslés (m.m.!) együttvéve maga után vonja a $\Sigma 2(2n\pi)^{-s} a_n(x)$, $\Sigma 2(2n\pi)^{-s} b_n(x)$ sorok m.m. való konvergenciáját.

[44] Vö. pl. [18], 10, Th. 4.; 23, Th. 29.
[45] L. pl. [58], 49, Th. 3.31.
[46] Vö. [58], 58.

Ha $\sigma=1$, $\mathfrak{P}_s(t)$ és $\mathfrak{Q}_s(t)$ az 1. lemma szerint korlátos a $0<t<1$ intervallumban, amiből egy konvolúció-tétel[47] alapján $\Phi_s(x)$ és $\tilde{\Phi}_s(x)$ $(0,1)$-beli *folytonossága* következik. Ennélfogva (7. 4) és (7. 1) esetünkben minden $x\in(0,1)$ helyen érvényes; az $s=1$ pontbeli konvergenciára vonatkozó állítás már előbb igazolást nyert (vö. (2. 12)).

Amennyiben (7. 1) fennáll egy rögzített $x$ helyen $s=s_0$ mellett, akkor egy DIRICHLET-sorokra vonatkozó ABEL-típusú tételt (vö.[30]) felhasználva írhatjuk

$$(7.5)\quad \begin{cases} f_{[s_0]}(x)=\lim\limits_{\sigma\to\sigma_0+0}\Big\{\cos\dfrac{\pi s}{2}\cdot\overset{(C,1)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}}\dfrac{2a_n(x)}{(2n\pi)^s}+\\ +\sin\dfrac{\pi s}{2}\cdot\overset{(C,1)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}}\dfrac{2b_n(x)}{(2n\pi)^s}\Big\}=\cos\dfrac{\pi s_0}{2}\cdot\overset{(C,1)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}}\dfrac{2a_n(x)}{(2n\pi)^{s_0}}+\\ +\sin\dfrac{\pi s_0}{2}\cdot\overset{(C,1)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}}\dfrac{2b_n(x)}{(2n\pi)^{s_0}}=\displaystyle\int_0^1 f(x-t)\,[\mathfrak{Z}_{s_0}(t)-\mathfrak{Z}_{s_0}(x)]\,dt. \end{cases}$$

2. Legyen $f(u)\in L^q(0,1)$, $1<q<\infty$.

Most alkalmazzuk a PARSEVAL-reláció következő (mélyebben fekvő) élesítését[48]: ha $\varphi(u)\in L^q(0,1)$, $\psi(u)\in L^{q'}(0,1)$, ahol $1<q<\infty$, $1<q'<\infty$; $1/q+1/q'=1$, továbbá mindkét függvény 1 szerint periodikus és

$$(7.6)\quad \begin{cases} \varphi(u)\sim A_0+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A_n\cos 2n\pi u+B_n\sin 2n\pi u),\\ \psi(u)\sim A_0'+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A_n'\cos 2n\pi u+B_n'\sin 2n\pi u), \end{cases}$$

akkor

$$(7.7)\quad \int_0^1\varphi(u)\,\psi(u)\,du=A_0A_0'+2\sum_{n=1}^{\infty}(A_nA_n'+B_nB_n').$$

A $\varphi(u)$, $\psi(u)$ függvények szerepét az $f(x-u)$, $\mathfrak{P}_s(u)$, majd az $f(x-u)$, $\mathfrak{Q}_s(u)$ függvénypárnak átadva, arra jutunk, hogy bármely $(0,1)$-beli $x$ helyen

$$(7.8)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 f(x-t)\,\mathfrak{P}_s(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}2(2n\pi)^{-s}\,(\alpha_n\cos 2n\pi x+\beta_n\sin 2n\pi x),\\ \displaystyle\int_0^1 f(x-t)\,\mathfrak{Q}_s(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}2(2n\pi)^{-s}(\alpha_n\sin 2n\pi x-\beta_n\cos 2n\pi x), \end{cases}$$

47 L. [18], 11, Th. 5.
48 L. [58], 154, (IV).

hacsak $\mathfrak{P}_s(u)$ és $\mathfrak{Q}_s(u)$ az $L^{q'}(0,1)$ osztályhoz tartozik. De az 1. lemma folytán az utolsó kikötések ekvivalensek azzal, hogy $u^{q'(\sigma-1)} \in L(0,1)$, azaz, hogy (*) $\sigma > 1-(q')^{-1} = q^{-1}$; következőleg (7.8) s az innen adódó

$$(7.9)\quad \int_0^1 f(x-t)\,[\mathfrak{Z}_s(t)-\mathfrak{Z}_s(x)]\,dt = \cos\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_n(x)}{(2n\pi)^s}+\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2b_n(x)}{(2n\pi)^s}$$

képlet *minden* $x \in (0,1)$ pontban érvényes, midőn $s$ kielégíti a (*) feltételt.

A $q=\infty$ esetre vonatkozólag vegyük figyelembe, hogy a $\varphi(u)$, $\psi(u)$ függvények „konjugált“ osztályokhoz való tartozásának kikötése pótolható ezzel a premisszával is: $|\varphi(u)|\log^+|\varphi(u)| \in L(0,1)$, $\psi(u) \in B(0,1)$.[49] Ha $\sigma>0$ és $f(u) \in B(0,1)$, ez utolsó feltétel-pár $t^{\sigma-1}\log(1/t) \in L(0,1)$ miatt kielégül $\varphi(u) = \mathfrak{P}_s(u)$, $\psi(u)=f(x-u)$ vagy $\varphi(u)=\mathfrak{Q}_s(u)$, $\psi(u)=f(x-u)$ esetén, tehát (7.8) és (7.9) $x \in (0,1)$, $\sigma>0$ mellett is érvényes marad. — Végre a $q=1$ lehetőség, vagyis az $f(u) \in L(0,1)$, $\sigma>1$ eset már a 2. §-ban elintézést nyert.

A (7.2)-höz fűződő megállapítások az imént nyert eredményekből, valamint tételünk 1. részének utolsó mondatából folynak, kiegészítve azzal a ténynyel, hogy konjugált osztályokhoz tartozó függvények konvolúciója folytonos (Vö. [47]).

**3.** Felvetjük az eddigiekkel összefüggő kérdést: mi a kapcsolat $f_{[s]}(x)$ $(0<s<1)$ és az ún. WEYL-*féle törtrendű integrál:*

$$(7.10)\quad \begin{cases} f_\theta(x) = \Gamma(\theta)^{-1}\displaystyle\int_0^{\infty} f(x-t)\,t^{\theta-1}\,dt = \\ = \Gamma(\theta)^{-1}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,(x-t)^{\theta-1}\,dt, \qquad (0<\theta<1) \\ \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0 \end{cases}$$

fogalma között? ($f_\theta(x)$ — mint ismeretes — általában csak m. m. $x$-re létezik.[50]) — E problémán kissé túlmenve, kimutatjuk a következőket:

**VII. tétel.** *Tegyük fel, hogy* $\int_0^{\delta} f(x-t)\,t^{s-1}\,dt$ $(0<\delta\leq 1)$ *létezik egy adott* $x \in (0,1)$, $s=s_0=\sigma_0+i\tau_0$ $(\sigma_0<1)$ *értékpárra.*

[49] Vö. [58], 154, (V). — $\log^+|\varphi|$ $|\varphi|>1$ esetén $\log|\varphi|$-t jelenti, különben pedig $=0$.
[50] Vö. [58], 224.

*Akkor a $\sigma_0 < \sigma < 1$ sávban fennállnak az*

$$
(7.11)\qquad \begin{cases} f_{[s]}(x) = \Gamma(s)^{-1} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \int\limits_0^1 f(x-t)\left((m+t)^{s-1} - (m+x)^{s-1}\right) dt = \\ = \Gamma(s) \int\limits_0^1 f(x-t)\left(t^{s-1} - ([t]+x)^{s-1}\right) dt \end{cases}
$$

*előállítások.*[51] *Speciálisan* $\int\limits_0^1 f(t)\,dt = 0$ *esetén*

$$
(7.12)\qquad f_{[\theta]}(x) = f_\theta(x) \qquad (0 < \theta_0 < \theta < 1),
$$

*feltéve, hogy $f_{\theta_0}(x)$ létezik.*

BIZONYÍTÁS. 1. Az V. tétel 1. feléből tudjuk, hogy a tett kikötés folyománya $f_{[s]}(x)$ létezése a $\sigma > \sigma_0$ félsíkban és a (6. 16) előállítás.

(7. 11)-et igazolandó, induljunk ki a $\sigma > 1$, $0 < x \leqq 1$, $0 < t \leqq 1$ mellett érvényes

$$
(7.13)\qquad \zeta(s,t) - \zeta(s,x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left((m+t)^{-s} - (m+x)^{-s}\right)
$$

formulából.

Ha $\sigma \geqq \varepsilon > 0$, $|s| \leqq \varrho$, $m \geqq 2\varrho \geqq 2$, írhatjuk:

$$
(7.14)\qquad \begin{cases} |(m+t)^{-s} - (m+x)^{-s}| = (m+x)^{-\sigma} \left| 1 - \left(1 - \dfrac{x-t}{m+x}\right)^{-s} \right| \leqq \\ \leqq \varrho m^{-1-\varepsilon} \left(1 + \dfrac{\varrho}{m} \dfrac{1+\varrho^{-1}}{2} + \dfrac{\varrho^2}{m^2} \dfrac{(1+\varrho^{-1})(1+2\varrho^{-1})}{2\cdot 3} + \cdots \right) \leqq 2\varrho m^{-1-\varepsilon}; \end{cases}
$$

e becslés alapján (7. 13) fennáll a $\sigma > 0$ félsíkban is, minthogy a baloldal $s$-nek egész függvénye.

Egyúttal tehát

$$
(7.15)\qquad \begin{cases} \mathfrak{Z}_s(t) - \mathfrak{Z}_s(x) = \Gamma(s)^{-1} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \left((m+t)^{s-1} - (m+x)^{s-1}\right) \\ \qquad (\sigma < 1;\ 0 < x \leqq 1,\ 0 < t \leqq 1) \end{cases}
$$

s innen

$$
(7.16)\qquad \begin{cases} \int\limits_0^1 f(x-t)\left(\mathfrak{Z}_s(t) - \mathfrak{Z}_s(x)\right) dt = \\ = \Gamma(s)^{-1} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \int\limits_0^1 f(x-t)\left((m+t)^{s-1} - (m+x)^{s-1}\right) dt \qquad (\sigma_0 < \sigma < 1). \end{cases}
$$

(A (7. 15) sor tagonkénti integrálása (7. 14)-re tekintettel nyilván megengedett.)

[51] Itt és az alábbiakban $[t]$ a $t$-ben foglalt legnagyobb egész számot jelenti.

(7. 16) és a $\sigma > \sigma_0$ mellett érvényes (6. 16) összekapcsolása a (7. 11) alatti első előállítást szolgáltatja; a második ebből már következik, mivel

$$\int_0^1 f(x-t)\left((m+t)^{s-1}-(m+x)^{s-1}\right)dt = \int_m^{m+1} f(x-v)\left(v^{s-1}-([v]+x)^{s-1}\right)dv$$

$$(m=0,1,2,\ldots).$$

Végül, ha $f(u)$ $(0,1)$-re vonatkozó integrálközepe eltűnik és (7. 11)-et $s_0=\theta_0$, $s=\theta$, $0<\theta_0<\theta<1$ mellett alkalmazzuk, nyerjük:

$$(7.17)\qquad f_{[\theta]}(x)=\Gamma(\theta)^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^1 f(x-t)(m+t)^{\theta-1}dt=f_\theta(x);$$

tételünk premisszája szerint (7. 17) fennáll, ha az

$$(7.18)\qquad \int_0^1 f(x-t)\,\mathfrak{Z}_{\theta_0}(t)\,dt=f_{\theta_0}(x)$$

integrál létezik.

**4.** A VI. és VII. tételre vonatkozólag kiemelendőnek tartunk néhány észrevételt.

Először is figyelmet érdemel, hogy *a VI. tétel 2. része szorosan összeköt egymással két, előzőleg más-más helyen nyert eredményt*, ti., hogy 1. $f_{[s]}(x)$ minden $x$-re létezik és egyenlő az $\int_0^1 f(x-t)[\mathfrak{Z}_s(t)-\mathfrak{Z}_s(x)]\,dt$ integrállal, ha $f(u)\in L(0,1)$ és $\sigma>1$ (vö. (2. 12)); továbbá, hogy 2. ugyanez áll $f(u)\in B(0,1)$ és $\sigma>0$ mellett (vö. V. tétel, 1. korollárium, $\delta=1$). A VI. tételben felhasznált $L^q(0,1)$ osztályok mintegy hidat alkotnak $L(0,1)$ és $B(0,1)$ között.

Ami (7. 11)-et illeti, ez úgy tekinthető, mint a WEYL-féle formuláknak komplex $s$ rendszámok és tetszőleges $L$-integrálható, periodikus $f(u)$ függvények esetére való kiterjesztése; ha $\int_0^1 f(t)\,dt \neq 0$, a (7. 11)-beli sor és integrál konvergenciáját csupán a „járulékos“ $(m+x)^{s-1}$, ill. $([t]+x)^{s-1}$ tag biztosítja, melyeknek fellépése a (7. 2) integrál $\mathfrak{Z}_s(x)$ tagjára vezethető vissza.

Mivel $f(u)\equiv -1$ mellett a szóban forgó előállítások a

$$\left.\begin{aligned}
&(7.19)\qquad \zeta(s,u)=\sum_{m=0}^{\infty}\left((m+u)^{-s}-\frac{(m+1)^{1-s}-m^{1-s}}{1-s}\right)\\
&(7.20)\qquad \zeta(s,u)=\int_0^{\infty}\left(([t]+u)^{-s}-t^{-s}\right)dt
\end{aligned}\right\}\ (0<\sigma<1)$$

képleteket[52] szolgáltatják, (7. 11) egyúttal ezeknek is általánosítása; különben (7. 20) speciális esete ($u = 1$):

$$(7.21) \qquad \zeta(s) = \int_0^\infty (([t]+1)^{-s} - t^{-s})\,dt = s\int_0^\infty ([t]-t)\,t^{-s-1}\,dt \qquad (0 < \sigma < 1),$$

azaz a RIEMANN-féle zetafüggvény legegyszerűbb integrálelőállítása a kritikus sávban.[53]

## II. RÉSZ. $W(s) = f_{[s]}(x)$ SZINGULARITÁSAINAK HELYZETÉRŐL; ANALITIKUS FOLYTATÁS AZ EGÉSZ SÍKRA. HOLOMORF-FÜGGVÉNY ESETE

### 8. §. Kiterjesztés az $s$-síkbeli legközelebbi szingularitásokig hatványsorba fejtéssel

**1.** $f_{[s]}(x)$ $(\sigma > 1)$ analitikus folytatásának eddig felhasznált módjai általában nem nyújtanak felvilágosítást a kiterjesztés természetes akadályainak, az $s$-síkbeli *szingularitások*nak helyzetéről: ismeretes például, hogy egy közönséges DIRICHLET-sor konvergencia-, $(C, \lambda)$- vagy $(A)$-szummabilitási félsíkjának határán vagy ehhez tetszőlegesen közel általában nincs az összegnek, ill. a megfelelő szummának szinguláris helye.[54] Minthogy viszont egy hatványsor konvergenciakörével kapcsolatban más a helyzet, ti. ennek határán az összegfüggvény nem lehet mindenütt reguláris, kínálkozik $W(s) = f_{[s]}(x)$ vagy egy alkalmas „rokon-függvény" hatványsorba fejtésének felhasználása.

E tekintetben főleg a IV. tétel 2. feléből folyó azon észrevételre támaszkodunk, hogy az $f_{[s]}(x)$ $(\sigma > 1)$ $W_s$-integrálból és a $\sin \pi s \cdot \int_0^1 f(x-t)t^{s-1}dt$ $(\sigma > 1)$ szorzatból $s$-síkbeli analitikus folytatással származó teljes analitikus függvényeknek pontosan ugyanazok a szingularitásai; az említett szorzatot TAYLOR-sorba fejtve, nemcsak a $W_s$-limeszeknek bizonyos új (egy körlemezben érvényes) előállítását nyerjük, hanem egyúttal meghatározható az együtthatók segítségével $W(s) = f_{[s]}(x)$ szingularitás-eloszlásának két jellemző adata: $W(s)$ „regularitási abszcisszája" és bármely $\sigma > 1$ félsíkbeli $s_0$ ponthoz tartozó

[52] Vö. pl. [33], 262.

[53] L. pl. [53], 14.

[54] LANDAU egy tétele szerint mindenesetre kivételt jelent az a speciális eset, midőn az összes együtthatók *pozitívok*.

„regularitási sugara". — Hangsúlyozzuk, hogy mind itt, mind a következő fejezetben $f(u)$-ra vonatkozólag csak az állandó *„minimális"* kikötésekkel ($L$-integrálhatóság, 1 szerinti periodicitás) élünk.

**2.** Legyen $G(s)$ egy $s_0=\sigma_0+i\tau_0$ pontban analitikus függvény. Tekintsük azon $|s-s_0|<\varrho^*$ körbelsők sugarainak $R(s_0)$ felső határát, melyekben $G(s)$ reguláris; $R(s_0)$-t *$G(s)$ $s_0$-hoz tartozó regularitási sugarának* fogjuk hívni. Ha $G(s)$ reguláris egy $\sigma>\eta>-\infty$ félsíkban, akkor analóg módon képezhetjük azon $\sigma^*$ abszcisszák $\mathfrak{S}$ alsó határát, melyekre $G(s)$ a $\sigma>\sigma^*$ félsíkban holomorf; ennek neve: *$G(s)$ regularitási abszcisszája.*[55] — Az értelmezésből azonnal látható, hogy ha $R(s_0)$ véges, akkor $G(s)$-nek legalább egy szinguláris helye van az $|s-s_0|=R(s_0)$ körön; így $R(s_0)$ az $s_0$-hoz legközelebbi (egy vagy több) szinguláris helynek $s_0$-tól való távolságát jelenti. Hasonlóképpen: ha $\mathfrak{S}>-\infty$, akkor vagy a $\sigma=\mathfrak{S}$ egyenesen, vagy ettől tetszőlegesen kis távolságra található $G(s)$-nek szinguláris helye; pontosabban: $\mathfrak{S}$ a szinguláris helyek abszcisszáinak felső határa.

Mivel a CAUCHY—TAYLOR-féle kifejtési tétel szerint $R(s_0)$ megegyezik $G(s)$ $s_0$-hoz tartozó TAYLOR-sorának konvergencia-sugarával, a CAUCHY—HADAMARD-formula alapján közvetlenül nyerjük:

$$R(s_0)=\varliminf_{\nu\to\infty}\left(\frac{|G^{(\nu)}(s_0)|}{\nu!}\right)^{-\frac{1}{\nu}}. \tag{8.1}$$

**3.** Szükségünk lesz még a $\mathfrak{S}$ és $R(s_0)$ közötti kapcsolatot mutató következő segédtételre:

4. LEMMA. *Ha $G(s)$ holomorf egy $\sigma>\eta>-\infty$ félsíkban, akkor regularitási abszcisszájára fennáll a*

$$\mathfrak{S}=\sigma_0-\inf_{\sigma=\sigma_0}R(s)\qquad(\sigma_0>\eta) \tag{8.2}$$

*előállítás.*

BIZONYÍTÁS. Amennyiben $G(s)$ egész függvény, akkor $R(s)=+\infty$ minden $s$-re és (8.2) a triviális $\mathfrak{S}=-\infty$ képletbe megy át; tegyük fel, hogy $G(s)$-nek van legalább egy (végesben fekvő) szinguláris helye.

Ez esetben $U=\sigma_0-\inf\limits_{\sigma=\sigma_0}R(s)$ szükségkép véges és $\leqq\eta$. Mivel az $U<\sigma\leqq\sigma_0$ sáv minden pontja belefoglalható egy $|s-s'|<R(s')$ $(s'=\sigma_0+i\tau)$ körbelsőbe, azért itt s egyúttal a teljes $\sigma>U$ félsíkban $G(s)$ reguláris. Másfelől tudjuk, hogy bármely $|s-s'|=R(s')$ körön kell, hogy legyen $G(s)$-nek szinguláris helye, következőleg ugyanez állítható egy ilyen kör $\sigma_0-R(s')\leqq\leqq\sigma\leqq U$ sávban eső részéről is. Továbbá $U=\sup\limits_{\sigma=\sigma_0}[\sigma_0-R(s)]$ folytán akár-

[55] Az utóbbi a DIRICHLET-sorok elméletéből ismert (vö. (5. 16)).

milyen kis pozitív $\varepsilon$-hoz található a $\sigma=\sigma_0$ egyenesnek oly $s'$ pontja, melyre $U-\varepsilon<\sigma_0-R(s')\leqq U$. — Mindent egybevetve látjuk: esetünkben $G(s)$-nek bármely $U-\varepsilon<\sigma\leqq U$ ($\varepsilon>0$) sávban van, a $\sigma>U$ félsíkban pedig nincs szinguláris helye; eszerint $U$ nem más, mint $G(s)$ szingularitás-abszcisszáinak felső határa, azaz $\mathfrak{S}$.

**4.** Nehézség nélkül adódik mármost a

**VIII. tétel.** *Legyen $s_0=\sigma_0+i\tau_0$ a $\sigma>1$ félsíknak egy tetszőleges pontja.*

1. *$f(u)$ $W_s$-limitálható bármely $u=x$ helyen $|s-s_0|<\varrho_{s_0}$ mellett, ahol*

$$
(8.3)\quad \begin{cases} \varrho_s=\varrho_s(x)=\varliminf\limits_{\nu\to\infty}\left(\dfrac{1}{\nu!}\,|Q_s^\nu(x)|\right)^{-\frac{1}{\nu}}, \\ Q_s^\nu=Q_s^\nu(x)=\dfrac{1}{2i}\displaystyle\int_0^1 f(x-t)\,t^{s-1}\left[e^{i\pi s}(\log t+i\pi)^\nu-e^{-i\pi s}(\log t-i\pi)^\nu\right]dt \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\nu=0,1,2,\ldots); \end{cases}
$$

*továbbá érvényes az*

$$
(8.4)\quad \begin{cases} f_{[s]}(x)=\pi^{-1}\Gamma(1-s)\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(s-s_0)^\nu}{\nu!}\,Q_{s_0}^\nu(x)+\int_0^1 f(x-t)\mathfrak{z}_s(t)\,dt-\mathfrak{Z}_s(x)\int_0^1 f(t)\,dt \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (|s-s_0|<\varrho_{s_0}) \end{cases}
$$

*előállítás.*

2. *$W(s)=f_{[s]}(x)$-nek $s_0$-hoz tartozó regularitási sugara a (8. 3)-mal megadott $\varrho_{s_0}=\varrho_{s_0}(x)$ érték, regularitási abszcisszája pedig:*

$$
(8.5)\qquad \Omega=\sigma_0-\inf_{-\infty<\tau<\infty}\varrho_{\sigma_0+i\tau}.\text{[56]}
$$

BIZONYÍTÁS. 1. Minthogy a $\mathfrak{v}(s;f,x)=\int_0^1 f(x-t)t^{s-1}dt$ függvény $s$-szerinti deriváltjai a $\sigma>1$ félsíkban (6. 2) szerint képezhetők (vö. 3. lemma, 2.), a $V(s;f,x)=\sin\pi s\cdot\mathfrak{v}(s;f,x)$ szorzatnak egy $s_0=\sigma_0+i\tau_0$ ($\sigma_0>1$) ponthoz tartozó TAYLOR-együtthatói a LEIBNIZ-szabály alapján:

$$
(8.6)\quad \begin{cases} A_{s_0}^\nu=\dfrac{1}{\nu!}\displaystyle\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\pi^k\sin\left(\pi s+k\frac{\pi}{2}\right)\cdot\int_0^1 f(x-t)\,t^{s_0-1}(\log t)^{\nu-k}dt=\frac{1}{\nu!}\,Q_{s_0}^\nu \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\nu=0,1,2,\ldots). \end{cases}
$$

[56] Megjegyezzük, hogy a definícióból folyóan bármely $f(u)$-ra $\Omega\leqq 1$; ezenkívül mindenesetre $\Omega\leqq\max(\omega,\bar\omega)$ (vö. (5. 16)).

A CAUCHY—HADAMARD-formula szerint a megfelelő

$$(8.7)\qquad V(s;f,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} A_{s_0}^{\nu}\cdot(s-s_0)^{\nu}$$

kifejtés konvergencia-sugara

$$(8.8)\qquad \varrho_{s_0}=\varrho_{s_0}(x)=\varliminf_{\nu\to\infty}\left(\frac{|Q_{s_0}^{\nu}(x)|}{\nu!}\right)^{-\frac{1}{\nu}}$$

lévén, az $|s-s_0|<\varrho_{s_0}$ körnek a $\sigma>1$ félsíkba eső részében mindenesetre (vö. (6.14), (6.15), (8.6), (8.7))

$$(8.9)\begin{cases}\displaystyle\int_0^1 f(x-t)\,[\mathfrak{z}_s(t)-\mathfrak{z}_s(x)]\,dt=I_s(f,x)+\pi^{-1}\Gamma(1-s)\sin\pi s\cdot\mathfrak{v}(s;f,x)=\\ \displaystyle\qquad =I_s(f,x)+\pi^{-1}\Gamma(1-s)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{Q_{s_0}^{\nu}(x)}{\nu!}(s-s_0)^{\nu},\end{cases}$$

ahol

$$(8.10)\qquad I_s(f,x)=\int_0^1 f(x-t)\mathfrak{z}_s(t)\,dt-\mathfrak{z}_s'(x)\int_0^1 f(t)\,dt.$$

De $I_s(f,x)$ $s$-nek egész függvénye, a (8.9) alatti utolsó tag pedig reguláris az $s_0$ középpontú, (8.8) sugarú kör belsejében, úgyhogy (8.9)-ből folyik $f_{[s]}(x)$ létezése a szóban forgó teljes körlemezben, valamint (8.4).

2. Az állítás második részét — tekintettel a IV. tétel 2. felére — (8.1)-nek és (8.2)-nek $V(s)=V(s;f,x)$-re való alkalmazásával kapjuk. •

**5.** A $\varrho_s(x)$ regularitási sugárral kapcsolatban említésre érdemes, hogy $Q_s^{\nu}(x)$ legegyszerűbb, (8.3)-beli integrál-alakján kívül bizonyos esetekben hasznos lehet a

$$(8.11)\qquad Q_s^{\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\pi^k\sin\left(\pi s+k\frac{\pi}{2}\right)\cdot q_s^{\nu-k}(x)$$

összeg-alak is, melyben

$$(8.12)\quad q_s^m=q_s^m(x)=\int_0^1 f(x-t)\,t^{s-1}(\log t)^m\,dt=(-1)^m\int_0^{\infty} u^m f(x-e^{-u})\,e^{-su}\,du$$

$$(m=0,1,2,\ldots)$$

(vö. (8.6)). — Ez a helyzet nyilván, valahányszor a (8.12) LAPLACE-transzformáltak kiszámíthatók, vagy legalább aszimptotikus viselkedésük ($m\to\infty$ mellett) meghatározható.[57]

[57] Vö. pl. [7], I. kötet, 45—52.

Hadd illusztráljuk $Q_s(x)$ kétféle kifejezésének felhasználását egy-egy könnyű példán!

1. Tegyük fel, hogy $f(u)$ *korlátos:* $|f(u)| \leqq K$ a $[0, 1]$ intervallumban. Akkor (8. 3)-ból

$$|Q^{\nu}_{2+i\tau}| \leqq K e^{\pi|\tau|} \int_0^1 t(|\log t| + \pi)^{\nu} dt =$$

$$= K e^{\pi|\tau|} e^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} \int_{2\pi}^{\infty} e^{-u} u^{\nu} du < K e^{\pi(|\tau|+2)} 2^{-(\nu+1)} \nu!;$$

innen pedig

$$\varrho_{2+i\tau} \geqq 2 \qquad (-\infty < \tau < \infty) \tag{8.13}$$

és (8. 5) szerint

$$\Omega \leqq 0. \tag{8.14}$$

Kimondhatjuk tehát: $f(u) \in B(0, 1)$ mellett $W(s) = f_{[s]}(x)$ minden $x$-re (létezik és) reguláris[58] legalább a $\sigma > 0$ félsíkban. (Vö. V. tétel, 1. korollárium, $\delta = 1$ eset; VI. tétel, 2. rész; $q = \infty$ eset.)

2. Legyen $\mu$ adott komplex szám, melyre $\Re(\mu) > -1$, $x \in (0, 1)$ rögzített érték és válasszuk $f(u)$-nak azt az 1 szerint periodikus függvényt, mely $0 \leqq u \leqq 1$, $u \neq x$ mellett megegyezik $(x-u)^{\mu}$-vel. (Itt és az alábbiakban minden hatványnak a főértéke veendő.)

Egyszerű számolás mutatja, hogy esetünkben

$$\left\{\begin{aligned} q^{\nu}_{2+i\tau}(x) &= \int_0^1 t^{\mu+1+i\tau} (\log t)^{\nu} dt = (-1)^{\nu} \int_0^{\infty} u^{\nu} e^{-(\mu+2+i\tau)u} du = \\ &= \frac{(-1)^{\nu} \nu!}{(\mu+2+i\tau)^{\nu+1}} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned}\right. \tag{8.15}$$

és (8. 11) alapján

$$\left\{\begin{aligned} &Q^{\nu}_{2+i\tau}(x) = \\ &= \frac{(-1)^{\nu+1} \nu!}{(\mu+2+i\tau)^{\nu+1}} \Bigg\{ \sin \pi\mu - \operatorname{ch} \pi\tau \sum_{\varkappa=\left[\frac{\nu-1}{2}\right]+1} (-1)^{\varkappa} \frac{(\pi(\mu+2+i\tau))^{2\varkappa+1}}{(2\varkappa+1)!} + \\ &\qquad + i \operatorname{sh} \pi\tau \sum_{\varkappa=\left[\frac{\nu}{2}\right]+1}^{\infty} (-1)^{\varkappa} \frac{(\pi(\mu+2+i\tau))^{2\varkappa}}{(2\varkappa)!} \Bigg\}. \end{aligned}\right. \tag{8.16}$$

[58] Mint tudjuk, $f_{[s]}(x)$-nek az $s$-sík egy nyílt tartományában való létezése és regularitása ugyanazt jelenti.

De akkor a $2+i\tau$ ponthoz tartozó regularitási sugár:

$$(8.17)\quad \varrho_{2+i\tau} = \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \left(\frac{1}{\nu!}\left|Q^{\nu}_{2+i\tau}(x)\right|\right)^{-\frac{1}{\nu}} = \begin{cases} |\mu+2+i\tau|, & \text{ha } \mu\neq 0,1,2,\dots, \\ +\infty & \text{különben;} \end{cases}$$

a regularitási abszcissza pedig:

$$(8.18)\quad \Omega = 2 - \inf_{-\infty<\tau<+\infty} \varrho_{2+i\tau} = \begin{cases} -\Re(\mu), & \text{ha } \mu\neq 0,1,2,\dots, \\ -\infty, & \text{midőn } \mu \text{ nem-negatív egész szám.} \end{cases}$$

Szavakba foglalva: függvényünk az előírt $x$ helyen minden $s$-re $W_s$-limitálható, ha $\mu=0,1,2,\dots$; különben $W_s$-limitálható $\sigma>-\Re(\mu)$ mellett, és a $\sigma=-\Re(\mu)$ egyenesen vagy legalább minden $-\Re(\mu)-\varepsilon<\sigma\leqq-\Re(\mu)$ $(\varepsilon>0)$ sávban található szinguláris hely.

Az utolsó megállapítás azonnal élesíthető (8.17) alapján. Innen kitűnik ui., hogy nem-egész $\mu$ mellett bármely $|s-(2+i\tau)|=\varrho_{2+i\tau}$ $(-\infty<\tau<\infty)$ kör átmegy az $s=-\mu$ ponton, amiből következik: e pont mindenesetre szinguláris hely, továbbá $[(x-u)^{\mu}]_{[s]}(x)$ létezik és) reguláris az $s$-síknak a $\tau=-\Im(\mu)$ $(\sigma\leqq-\Re(\mu))$ félegyenes „kihasítása" után megmaradó részében.

Példánknál azonban még e félegyenes pontjainak jellege is teljesen tisztázható azon szerencsés körülmény folytán, hogy most az $\int\limits_0^1 f(x-t)t^{s-1}dt$ integrált ki tudjuk számítani. — Valóban írhatjuk:

$$(8.19)\quad [(x-u)^{\mu}]_{[s]}(x) = \Gamma(s)^{-1}(s+\mu)^{-1} - \mathfrak{z}_s(x)(\mu+1)^{-1} + \int\limits_0^1 t^{\mu}\mathfrak{z}_s(t)\,dt$$

minden oly $s$-re, ahol a jobboldali első tag reguláris. Eszerint az $[(x-u)^{\mu}]_{[s]}(x)$ $(\Re(\mu)>-1)$ $W_s$-limesznek egyáltalán nincs szinguláris helye az $s$-síkban, ha $\mu\geqq 0$ egész szám és $s=-\mu$ az egyetlen szinguláris pont, midőn $\mu$ nem-egész; az utóbbi esetben $s=-\mu$ *elsőrendű pólus* $\Gamma(-\mu)^{-1}$ *reziduummal,* úgyhogy itt $[(x-u)^{\mu}]_{[s]}(x)$ biztosan nem létezik.

Mint látjuk, (8.19) újabb példát szolgáltat oly $W_s$-limeszre, melynek az $s$-sík valamely pontja *izolált szinguláris helye.* (Vö. (4.11).)

## 9. §. További analitikus folytatás Borel-, Le Roy-, Lindelöf-, Mittag—Leffler-szummációval; $f(s,x)$ és $\tilde{f}(s,x)$ fő csillagtartományának meghatározása Riesz Marcell módszerével

1. Minthogy (8.4) érvényességi körének határa, a $\varrho_{s_0}$ regularitási sugárral rajzolt $|s-s_0|=\varrho_{s_0}$ kör általában nem természetes határa a sor $V(s)=$ $=V(s;f,x)$ összegfüggvényének, tehát egyúttal $W(s)=f_{[s]}(x)$-nek, felvetődik

az említett körön túl való analitikus folytatás s az $s$-síkbeli esetleges többi szingularitások vizsgálatának problémája.

Mindenekelőtt emlékeztetünk arra, hogy hatványsorral definiált függvényeknek a konvergenciakörön túl való analitikus kiterjesztése a legegyszerűbbben bizonyos szummációs eljárásokkal valósítható meg, melyek közül a legfontosabb a BOREL-, LE ROY-, LINDELÖF- és MITTAG—LEFFLER-féle módszer. Egy $\sum_{m=0}^{\infty} h_m$ sor szóban forgó (B)-, (R)-, (L)-, ill. (M)-szummájának értelmezését rendre a

$$(9.1)\quad \begin{cases} \overset{(B)}{\sum_{m=0}^{\infty}} h_m = \lim_{\xi\to+\infty}\left(e^{-\xi}\sum_{m=0}^{\infty} H_m \frac{\xi^m}{m!}\right) = \lim_{\xi\to+\infty}\left[h_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(1-e^{-\xi}E_m)h_m\right], \\ H_m = \sum_{k=0}^{m} h_k, \quad E_m = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\xi^k}{k!}, \end{cases}$$

$$(9.2)\quad \overset{(R)}{\sum_{m=0}^{\infty}} h_m = \lim_{r\to 1-0} \frac{\Gamma(1+rm)}{m!} h_m,$$

$$(9.3)\quad \overset{(L)}{\sum_{m=0}^{\infty}} h_m = \lim_{\delta\to+0}\left(h_0 + \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\delta m} h_m\right),$$

$$(9.4)\quad \overset{(M)}{\sum_{m=0}^{\infty}} h_m = \lim_{\delta\to+0} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma(1+\delta m)^{-1} h_m$$

képletek szolgáltatják; a jobboldali soroknak $\xi > 0$, $0 < r \leqq 1$, ill. $\delta > 0$ mellett való konvergenciája előzetes kikötés.[59]

Mint ismeretes, egy véges konvergencia-sugarú $\sum_{m=0}^{\infty} A_m(z-z_0)^m = P(z)$ hatványsor esetében a megfelelő szummabilitási tartományok a következők: 1. (9. 1)-nél $P(z)$-nek $z_0$-ra vonatkozó ún. *Borel-poligon*ja, vagyis mindazon $z_0$-t tartalmazó nyílt félsíkoknak a közös része, melyeknek határegyenese átmegy $P(z)$-nek valamelyik, a konvergenciakörön fekvő $Z$ szinguláris helyén és merőleges a $\overrightarrow{z_0 Z}$ vektorra; 2. (9. 2)—(9. 4)-nél viszont $P(z)$-nek $z_0$-ra vonatkozó ún. *Mittag—Leffler-féle csillagtartománya,* ami a teljes $z$-síkból úgy áll elő, hogy bármely $Z$ szinguláris hellyel együtt elhagyjuk belőle a $\overrightarrow{z_0 Z}$ vektornak $Z$-n túli meghosszabbítását is.[60]

[59] Vö. [15], 77—80; (9. 2)-vel kapcsolatban l. még [20], 490—491.

[60] Így pl. a $\sum_{m=0}^{\infty} z^m = (1-z)^{-1}$ $(|z| < 1)$ geometriai sor 0-hoz tartozó MITTAG—LEFFLER-féle csillagtartománya a valós tengely $[1, \infty)$ intervalluma mentén felhasított $z$-sík.

**2.** E fogalmakat, valamint a (9. 1)—(9. 4) eljárások elméletének főtételeit[61] a (8. 4) sorra alkalmazva, s újra támaszkodva a IV. tétel 2. felének utolsó megállapítására, a VIII. tétel alapján nyerjük:

**IX. tétel.** 1. *Jelöljük $\Pi$-vel $f_{[s]}(x)$ s-beli Borel-poligonját egy $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ $(\sigma_0 > 1)$ pontra vonatkozólag.*

*$f(u)$ $W_s$-limitálható az $u = x$ helyen $s \in \Pi$ mellett, mégpedig*

$$
(9.5) \qquad f_{[s]}(x) = \pi^{-1}\Gamma(1-s)\cdot \overset{(B)}{\sum_{\nu=0}^{\infty}} \frac{(s-s_0)^\nu}{\nu!} Q^\nu_{s_0}(x) + \\ + \int_0^1 f(x-t)\,\mathfrak{z}_s(t)\,dt - \mathfrak{Z}_s(x)\int_0^1 f(t)\,dt,
$$

*ahol $Q^\nu_{s_0}$ jelentése ugyanaz, mint* (8. 3)*-ban.*

*Speciálisan: ha $f_{[s]}(x)$-nek csak egyetlen $s_1 = \sigma_1 + i\tau_1$ $(\sigma_1 \leqq 1)$ szinguláris helye van, akkor* (9. 5) *fennáll a $\sigma > \Omega$ félsíkban.*

2. *Helyettesítsük a* (9. 5)*-beli* (B)*-szummát rendre a megfelelő* (R)-, (L)- *vagy* (M)*-szummával. — Az így kapott előállítások érvényesek minden olyan s-re, mely $f_{[s]}(x)$-nek $s_0$-ra vonatkozó $\Sigma$ Mittag—Leffler-féle csillagtartományában fekszik.*

3. *A szóban forgó* (B)-, *ill.* (R)-, (L)-, (M)*-szummák egyszersmind egyenletesen is léteznek a megfelelő szummabilitási tartomány, azaz $\Pi$, ill. $\Sigma$ bármely korlátos zárt résztartományában.*

**3.** RIESZ MARCELLnek egy nevezetes, 1912-ben közölt dolgozatában ([47]) sikerült a MITTAG—LEFFLER-módszert

$$
(9.6) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} A_m e^{-\lambda_m s} \quad (0 \leqq \lambda_m < \lambda_{m+1};\ \lambda_m \to \infty)
$$

típusú (általánosított) DIRICHLET-sorokra is átvinnie; az általa megadott eljárás — melyet MITTAG—LEFFLER—RIESZ-féle, röviden (MR)-szummációnak fogunk nevezni — a következő szumma-definíciót használja:

$$
(9.7) \qquad \overset{(MR)}{\sum_{m=0}^{\infty}} A_m e^{-\lambda_m s} = \lim_{\delta \to +0} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma(1+\delta\lambda_m)^{-1} \cdot A_m e^{-\lambda_m s}.
$$

((9. 7) $\lambda_m = m$ esetén egy hatványsor (M)-szummájába megy át.)

Az említett RIESZ-féle eredmények lehetővé teszik, hogy — bármely adott $f(u)$ függvény és $x$ hely esetében — meghatározzuk $f(s, x)$-nek és $\bar{f}(s, x)$-nek (vö. (4. 2)—(4. 4)) legnagyobb abszcisszájú szinguláris helyét az $s$-sík egy

[61] Vö. [15], 187—191.

[62] Vö. (8. 5) és (8. 18).

tetszőleges $\tau=\tau_0$ „vízszintes" egyenesén, tehát egyúttal e függvények ún. *fő csillagtartományát.* Az utóbbiak — mint tudjuk — $f(s,x)$, ill. $\tilde{f}(s,x)$ szingularitás-halmazából úgy képezendők, hogy minden $\mathfrak{s}$ szinguláris hellyel együtt „eltávolítjuk" az $s$-síkból az $\mathfrak{s}$-ből $-\infty$-be vezető vízszintes félegyenest is.

4. Célszerű rövid jelölést bevezetnünk $\mathfrak{Z}_s(u)$, $f(s,x)$ és $\tilde{f}(s,x)$ „(MR)-transzformáltja" számára:

$$\mathfrak{M}_s(x,\delta)=\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma(1+\delta\log n)^{-1}\cdot\frac{2\cos\left(2n\pi x-\frac{\pi s}{2}\right)}{(2n\pi)^s},\tag{9.8}$$

$$F(s,x,\delta)=\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma(1+\delta\log n)^{-1}\frac{2a_n(x)}{(2n\pi)^s},\tag{9.9}$$

$$\tilde{F}(s,x,\delta)=\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma(1+\delta\log n)^{-1}\frac{(2b_n(x)}{(2n\pi)^s};\tag{9.10}$$

egyszerű becslések alapján belátható, hogy a (9.8)—(9.10) sorok minden $s$-re konvergensek s így mindhárom összeg $s$-nek egész függvénye, bármely rögzített $x\in(0,1)$ és $\delta>0$ mellett.

Jelöljük továbbá $\omega(\tau_0)$-val azon $\sigma^*$ abszcisszák alsó határát, melyekre $f(s,x)$ reguláris az $s=\sigma+i\tau_0$ $(\sigma>\sigma^*)$ félegyenes mentén és legyen $\tilde{\omega}(\tau_0)$ jelentése analóg $\tilde{f}(s,x)$-re vonatkozólag (Vö. (5.16) és 8. §. *2.*).

**X. tétel.** 1. *Fennállnak az*

$$\omega(\tau_0)=\lim_{\delta\to+0}\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}}(\delta\log\log|F(-\sigma+i\tau_0,x,\delta)|-\sigma),\tag{9.11}$$

$$\tilde{\omega}(\tau_0)=\lim_{\delta\to+0}\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}}(\delta\log\log|\tilde{F}(-\sigma+i\tau_0,x,\delta)|-\sigma)\tag{9.12}$$

*képletek, feltéve, hogy a jobboldali határértékek léteznek; ha valamelyik nem létezik, a megfelelő baloldali érték* $-\infty$*-nek veendő.*

2. *Jelöljük* $\Sigma_p$*-vel és* $\tilde{\Sigma}_p$*-vel* $f(s,x)$, *ill.* $\tilde{f}(s,x)$ *fő csillagtartományát s írjuk:* $\Sigma_*=\Sigma_p\cap\tilde{\Sigma}_p$.

*Akkor* $f(u)$ $W_s$*-limitálható az* $u=x$ *helyen minden* $s\in\Sigma_*$ *mellett és* $W_s$*-limesze:*

$$\begin{cases} f_{[s]}(x)=\cos\dfrac{\pi s}{2}\overset{(MR)}{\sum_{n=1}^{\infty}}\dfrac{2a_n(x)}{(2n\pi)^s}+\sin\dfrac{\pi s}{2}\overset{(MR)}{\sum_{n=1}^{\infty}}\dfrac{2b_n(x)}{(2n\pi)^s}= \\ \quad=\lim\limits_{\delta\to+0}\displaystyle\int_0^1 f(x-t)\,[\mathfrak{M}_s(t,\delta)-\mathfrak{M}_s(x,\delta)]\,dt. \end{cases}\tag{9.13}$$

*Továbbá megadható $\Sigma_*$ valódi részhalmazainak egy $\{\Delta_*^{(\delta)}\}(0<\delta<1)$ rendszere úgy, hogy $\Sigma_*$ bármely pontja elegendő kis $\delta$ esetén $\Delta_*^{(\delta)}$-hoz is hozzátartozik és minden rögzített $\delta$-ra $s\in\Delta_*^{(\delta)}$ mellett érvényes az*

$$(9.14)\quad \begin{cases} f_{[s]}(x)=\int\limits_0^\infty e^{-v}\,\psi_s(x,\delta;v)\,dv, \\ \psi_s(x,\delta;v)=\int\limits_0^1 f(x-t)\,[\mathfrak{M}_{s-\delta\log v}(t,\delta)-\mathfrak{M}_{s-\delta\log v}(x,\delta)]\,dt \end{cases}$$

*előállítás.*

3. (9.13) *és* (9.14) *egyenletesen fennáll* $\Sigma_*$, *ill.* $\Delta_*^{(\delta)}$ *bármely korlátos, zárt résztartományában;* (9.14) *divergens* $\Delta_*^{(\delta)}$ *nyílt kiegészítő halmazában (a teljes s-síkra vonatkozólag).*

BIZONYÍTÁS. 1° $\omega(\tau_0)$ és $\tilde\omega(\tau_0)$ előállítása közvetlenül következik RIESZ MARCELL idézett dolgozatának bizonyos eredményeiből[63] s abból a tényből, hogy $(2\pi)^s$ 0-hely nélküli egész függvény.

2° Figyelembe véve $a_n(x)$ és $b_n(x)$ jelentését (vö. (2.9), (2.1)) s felcserélve az összegezés és integrálás sorrendjét (ami esetünkben nyilván megengedett), nyerjük:

$$(9.15)\quad \begin{cases} \cos\frac{\pi s}{2}\cdot F(s,x,\delta)+\sin\frac{\pi s}{2}\cdot\tilde F(s,x,\delta)= \\ \qquad =\int\limits_0^1 f(x-t)\,[\mathfrak{M}_s(t,\delta)-\mathfrak{M}_s(x,\delta)]\,dt; \end{cases}$$

innen [47] II. tétele alapján folyik (9.13) érvényessége $s\in\Sigma_*$ mellett, az egyenletes konvergenciára vonatkozó állítással együtt.

Ami (9.14)-et és tételünk 3. részének (9.14)-gyel kapcsolatos megállapításait illeti, ezek (9.15) felhasználásával [47] I. tételéből adódnak. (Vö. [63]).

**5.** Megjegyzendő, hogy a fentiekben előforduló $\Delta_*^{(\delta)}(0<\delta<1)$ tartományt a következőképpen kapjuk meg:[64] Tekintjük $f(s,x)$ és $\tilde f(s,x)$ szingularitásainak egyesített halmazát az $s$-síkban és mindenegyes $s_0=\sigma_0+i\tau_0$ szinguláris pontból kiindulólag meghúzzuk a $\sigma-\sigma_0=\delta\log\cos\frac{\tau-\tau_0}{\delta}$, $|\tau-\tau_0|<\delta\frac{\pi}{2}$ feltételekkel jellemzett „kétágú" görbét. (Ez — mint könnyen látható — a $\sigma<\sigma_0$ félsíkban fekszik, szimmetrikus a $\tau=\tau_0$, $\sigma<\sigma_0$ félegyenesre vonatkozólag, s ennek mindkét oldalán levő (végtelen) ága az említett

[63] L. [47], 264—266; különösen: (46), 266. o.

[64] Vö. még a $b^{(\alpha)}$ konvergencia-alaptartomány értelmezését: [47], 257.

félegyeneshez „tart", midőn $\delta \to +0$.) Amennyiben az összes így keletkező $\sigma - \sigma_0 < \delta \log \cos \frac{\tau - \tau_0}{\delta}$ $\left(|\tau - \tau_0| < \delta \frac{\pi}{2}\right)$ tartományok pontjait elhagyjuk $\Sigma_*$ pontjai közül, előáll $\Delta_*^{(\delta)}$.

Végül megemlítjük, hogy (9.11)—(9.12) természetesen meghatározza az $\omega, \tilde{\omega}$ *regularitási abszcisszák* pontos értékét is, ti.

$$\left\{\begin{aligned} \omega &= \sup_{-\infty < \tau < \infty} \omega(\tau), \\ \tilde{\omega} &= \sup_{-\infty < \tau < \infty} \tilde{\omega}(\tau). \end{aligned}\right. \tag{9.16}$$

## 10. §. A Cauchy-féle integrálformulák közös általánosítása. Generalizált Taylor-sor, Laurent-sor

**1.** Ha $f_{[s]}(x)$-et teljes általánosságban vizsgáljuk, azaz $f(u)$-ra nézve semmiféle külön megszorítást nem teszünk, akkor a X. tételen túlmenően nyilván nem remélhetünk lényeges adalékokat $W_s$-limeszek $s$-síkbeli szingularitásaira, ill. egzisztencia-tartományára vonatkozólag; $f_{[s]}(x)$-nek $\Sigma_*$-ban való tényleges kiszámítása is többféle módon lehetséges az eddigiek alapján.

Viszont szemlátomást nem érdektelen oly függvényosztály keresése, melynél $W(s) = f_{[s]}(x)$ egyrészt teljesen *szingularitásmentes,* másrészt *közvetlenül,* minden $s$-re érvényes (lehetőleg egyszerű) képlet segítségével megadható. — Ez a helyzet — mint most megmutatjuk —, ha $f(u)$ értelmezése az adott $x$ hely környezetében a független változó komplex értékeire is kiterjeszthető úgy, hogy a nyert függvény $x$-ben *reguláris.*

**2.** Legyen $w = u + iv$ *komplex* változó, $0 < x < 1$, $0 < \delta \leqq 1$; jelöljünk továbbá $\mathfrak{C}_l$-lel egy olyan $w$-síkbeli, pozitív irányítású zárt utat,[65] mely belsejében tartalmazza az $u$-tengely $(x - \delta, x]$ intervallumát és átmegy ennek baloldali végpontján.

**XI. tétel.** *Ha $f(w)$ az $x$ pontban és ennek egy $E_x$ környezetében $w$-nek differenciálható függvénye, akkor $f(u)$ az $u = x$ helyen minden $s$-re $W_s$-limitálható, nevezetesen*

$$f_{[s]}(x) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_l} f(w)(w-x)^{s-1} dw + I_s(f, x, \delta);\text{[66]} \tag{10.1}$$

*itt $(w-x)^{s-1}$ főértéket jelent és $\mathfrak{C}_l \subset E_x$.*

[65] Út: folytonos, rektifikálható JORDAN-görbe.

[66] Vö. (6.15). — Az $s = 1, 2, 3, \ldots$ értékekre a jobboldali első tag a megfelelő (mindenesetre létező) határértékekkel pótolandó.

BIZONYÍTÁS. Legyen előbb $\sigma > 1$ és induljunk ki az

$$(10.2)\quad \begin{cases} f_{[s]}(x) - I_s(f, x, \delta) = \Gamma(s)^{-1} \int\limits_0^\delta f(x-t) t^{s-1}\, dt = \\ \qquad = \Gamma(s)^{-1} \int\limits_{x-\delta}^{x} f(u)(x-u)^{s-1}\, du \end{cases}$$

formulából (vö. (6. 20)).

Kössük össze az $x-\delta$ pontot és az $(x, 1)$ szakasznak egy $x+\varrho$ pontját egy-egy $\mathfrak{C}_l$ belsejében futó és a $v > 0$, ill. $v < 0$ félsíkban fekvő úttal; a keletkező, pozitív irányítással ellátott zárt görbét $G_\varrho$-val jelölve, a CAUCHY-féle alaptétel szerint írhatjuk

$$\int\limits_{(\mathfrak{C}_l)} f(w)(w-x)^{s-1}\, dw = \int\limits_{(G_l)} f(w)(w-x)^{s-1}\, dw,$$

minthogy $f(w)$ a feltevés alapján $\mathfrak{C}_l$ mentén és ezen belül, $(w-x)^{s-1}$ pedig az $u \leqq x$, $v = 0$ félegyenes mentén felhasított egész $w$-síkban holomorf. Innen folyik, hogy egyúttal

$$(10.3)\quad \begin{cases} \int\limits_{(\mathfrak{C}_l)} f(w)(w-x)^{s-1} dw = \oint\limits_{|w-x|=\varrho} f(w)(w-x)^{s-1} dw + \\ \qquad + \int\limits_{x-\delta}^{x-\varrho} f(w)\left[(w-x)_-^{s-1} - (w-x)_+^{s-1}\right] dw, \end{cases}$$

ahol $\oint$ pozitív irányítással képezett körintegrál és $(w-x)_\pm^{s-1} = -|w-x|^{s-1} e^{\pm i\pi s}$.

Ha még (10. 3) utolsó tagjában $w$ helyett bevezetjük az $u$ (valós) változót, majd figyelembe vesszük, hogy az előző tag abszolút értéke nem lehet nagyobb, mint $2\pi\varrho^\sigma e^{\pi|\tau|} \max\limits_{|w-x|=\varrho} |f(w)|$, $\varrho \to +0$ határátmenet alkalmazásával arra jutunk, hogy

$$(10.4)\quad \int\limits_{(\mathfrak{C}_l)} f(w)(w-x)^{s-1} dw = 2i \sin \pi s \int\limits_{x-\delta}^{x} f(u)(x-u)^{s-1} du \qquad (\sigma > 1)$$

vagy (vö. (3. 5))

$$(10.5)\quad \Gamma(s)^{-1} \int\limits_{x-\delta}^{x} f(u)(x-u)^{s-1} du = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int\limits_{(\mathfrak{C}_l)} f(w)(w-x)^{s-1} dw.$$

Vegyük észre, hogy a jobboldali vonalintegrál — ismert általános tételek alapján — *minden* $s$-re létezik és $s$-nek holomorf függvénye[67], továbbá az

[67] Ennek különben a direkt igazolása is egyszerű: vö. (6. 3)—(6. 4).

$s=1,2,\ldots$ pontokban az alaptétel szerint eltűnik. Így ennek $\Gamma(1-s)$-szerese szintén egész függvény, tehát a (10.5)-ből és (10.2)-ből következő (10.1) képlet az egész $s$-síkon érvényes. Qu. e. d.

**3.** Legyen (10.1)-ben $s=-p$ $(p=0,1,2,\ldots)$. Mivel $I_{-p}(f,x,\delta)=0$ (vö. (6.23)), továbbá $f(u)$ $x$-beli regularitása miatt $f_{[-p]}(x)=f^{(p)}(x)$ (vö. (6.18)), kapjuk:

$$f^{(p)}(x)=\frac{p!}{2\pi i}\int_{(\mathfrak{C}_l)}\frac{f(w)}{(w-x)^{p+1}}\,dw \qquad (p=0,1,2,\ldots). \tag{10.6}$$

Eszerint (10.1) úgy tekinthető, mint a (10.6) alatti CAUCHY-*féle integrálformulák közös általánosítása;* egyúttal adva van az a könnyen kielégíthető igény, hogy $f_{[s]}(x)$ értelmezését a független változó *komplex* értékeire is kiterjesszük.

Valóban, rögzített $z=x+iy$ $(x>0,\ y\gtreqless 0)$ mellett $\zeta(s,z)$-t a $\sum_{m=0}^{\infty}(m+z)^{-s}$ $(\sigma>1)$ sorból[68] $s$-re vonatkozó analitikus folytatással származtatva, az alapvető integrálelőállítások és legfontosabb tulajdonságok érvényben maradnak[69]; a megfelelő $\mathfrak{Z}_s(z)=\Gamma(s)^{-1}\bar{\zeta}(1-s,z)$ ismét $s$-nek egész, $z$-nek 1 szerint periodikus, a $0<x<1$ sávban differenciálható függvénye és (vö. (3.6))

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{Z}_s(z)=\mathfrak{Z}_{s-1}(z) \qquad (0<x<1). \tag{10.7}$$

Ha mármost megállapodunk abban, hogy

$$f_{[s]}(z)=\int_0^1 f(z-t)\,[\mathfrak{Z}_s(t)-\mathfrak{Z}_s(z)]\,dt \qquad (0<x<1;\ \sigma\geqq 1), \tag{10.8}$$

ahol $f(u+iy)\in L(0,1)$[70], $f(w+1)=f(w)$, akkor a $W_s$-limeszek 4. §-beli általános definíciója és a 6. § eredményei mind közvetlenül átvihetők, s a fenti meggondolás mutatja, hogy $s\neq 1,2,\ldots$ mellett ($(w-z)^{s-1}$ főértékét használva):

$$\left\{\begin{aligned} f_{[s]}(z)&=\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{(\mathfrak{C}_l)}f(w)\,(w-z)^{s-1}\,dw+I_s(f,z,\delta),\\ I_s(f,z,\delta)&=\int_0^1 f(z-t)\,[\mathfrak{z}_s(t)-\mathfrak{Z}_s(z)]\,dt+\Gamma(s)^{-1}\int_\delta^1 f(z-t)\,t^{s-1}\,dt,\end{aligned}\right. \tag{10.9}$$

[68] Itt $(m+z)^{-s}$ főértéke veendő.

[69] Vö. pl. [56], 265. — A HURWITZ-formula azonban nem-valós $u$ esetén érvényét veszti.

[70] Azaz $\Re(f(u+iy))$ és $\Im(f(u+iy))$ $0<u<1$-ben egyaránt $L$-integrálható.

amennyiben $\mathfrak{C}_l$ egy olyan pozitív körüljárású, a $z-\delta$ ponton átmenő és a $(z-\delta, z]$ egyenes-szakaszt belsejében tartalmazó zárt út, melyen belül $f(w)$ holomorf, magán $\mathfrak{C}_l$-en pedig legalább belülről folytonos.[71] $s=\nu$ $(\nu=1,2,\ldots)$ esetén a $\Gamma(1-s)$-et tartalmazó tag a megfelelő $(s\to\nu$ határátmenethez tartozó) limesszel helyettesítendő. — Célszerű még kikötnünk, hogy (fix $s$-re) $f_{[s]}(z)$ is legyen 1 szerint periodikus, továbbá $f_{[s]}(iy)$ jelentse $f_{[s]}(z)$ limeszét $z\to iy$ mellett, feltéve, hogy az utóbbi létezik.

**4.** Kézenfekvő a kérdés: mi következik $f(w)$ regularitásából $f_{[s]}(z)$-re mint $z$ függvényére nézve? — Az természetesen $s\neq 0, -1, -2, \ldots$ mellett nem várható, hogy $f(w)$-nek *egyetlen* $(0<u<1$ sávbeli) pontban holomorf volta már maga után vonja $f_{[s]}(z)$-nek ugyanitt való regularitását, hiszen $I_s(f, z, \delta)$ nemcsak egy helyen és ennek közelében felvett függvényértékektől függ.[72] Szükségünk van $f(w)$ holomorfiájára legalább egy „vízszintes" egyenesdarab mentén.

Mindenekelőtt bevezetünk egy fogalmat: nevezzük $f(w)$ egy $v=y_0$ egyenes körüli *holomorfia-sávszélességének* azon $\eta\geqq 0$ számok felső határát, melyekre $f(w)$ a $|v-y_0|\leqq\eta$ sávban holomorf.

**XII. tétel.** *Legyen s tetszőlegesen előírt komplex szám és tegyük fel, hogy* $f(w)$ *egy* $[iy_0, 1+iy_0)$ $(y_0 \gtreqless 0)$ *egyenesszakasz minden pontjában reguláris.*[73]

1. *Akkor* $f_{[s]}(z)$ *bármely* $z\in(iy_0, 1+iy_0)$ *helyen akárhányszor differenciálható és*

$$\frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu} f_{[s]}(z)=f_{[s-\nu]}(z) \qquad (\nu=1,2,\ldots). \tag{10.10}$$

*Amennyiben még* (*) $\int_0^1 f(u+iy_0)\,du=0$, *akkor* (10.10) *a* $z=iy_0$, $z=1+iy_0$ *végpontokban is fennáll.*

2. (*) *teljesülése esetén* $f_{[s]}(z)$ *minden* $z\in[iy_0, 1+iy_0)$ *pont körül Taylor-sorba fejthető:*

$$f_{[s]}(z+\Delta z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f_{[s-\nu]}(z)}{\nu!}(\Delta z)^\nu; \tag{10.11}$$

(10.11) *érvényes* $|\Delta z|<\Xi_{y_0}$ *mellett, ahol* $\Xi_{y_0}$ *az* $f(w)$ *függvény* $v=y_0$ *körüli holomorfia-sávszélességét jelöli.*

[71] Mint Čech, Kamke és mások vizsgálatai óta ismeretes, a Cauchy-féle alaptétel ezen enyhébb premissza mellett is érvényes. (Vö. pl. [1], 122.)

[72] Ha $s=-p$ $(p=0,1,\ldots)$, akkor $I_{-p}(f, z, \delta)\equiv 0$ folytán $f_{[s]}(z)=f^{(p)}(z)$ (vö. (10.6)), tehát a $W_s$-limesz „lokális" jellegűvé válik.

[73] $f(w)$ 1-periódusú voltát — mint állandó kikötést — a tételek megfogalmazásában ezután sem említjük.

3. *Az utolsó sor* $c_{\nu,s}(z)=f_{[s-\nu]}(z)/\nu!$ *együtthatóira* $\nu>\sigma$ *mellett fennáll a következő egyenlőtlenség:*

$$(10.12)\quad \begin{cases} |c_{\nu,s}(z)| \leqq \dfrac{\Gamma(1-\sigma+\nu)}{\nu!}\left\{\dfrac{M_z(\delta)}{\delta^{\nu-\sigma}}e^{\pi|\tau|}+\right. \\ \left. +\pi^{-1}(|\sin\pi\sigma|+|\operatorname{sh}\pi\tau|)\cdot\mathfrak{M}_{y_0}\cdot\left[\zeta(1-\sigma+\nu)+\dfrac{1-\delta^{\sigma-\nu}}{\sigma-\nu}\right]\right\}. \end{cases}$$

*Itt* $\delta$ *egy olyan* $z$ *középpontú zárt körlemez sugara, melyben* $f(w)$ *folytonos s minden belső pontban differenciálható, továbbá* $M_z(\delta)=\max\limits_{|w-z|=\delta}|f(w)|$ *és* $\mathfrak{M}_{y_0}=$ $=\max\limits_{v=y_0}|f(w)|$.[74]

BIZONYÍTÁS. A feltevésből az előzők értelmében folyik, hogy $f_{[s]}(z)$ bármely $s$-re, az $(iy_0, 1+iy_0)$ egyenesdarab minden $z$ pontjában létezik és $\sigma\geqq 1$ mellett a (10.8), tetszőleges $s\neq 1, 2, \ldots$ esetén a (10.9) alakban írható.

1. (10.8)-ból parciális integrálással kapjuk (vö. (4.15))

$$(10.13)\qquad f_{[s]}(z)=\int_0^1 f^{(p)}(z-t)\mathfrak{Z}_{s+p}(t)\,dt-\mathfrak{Z}_s(z)\int_0^1 f(u+iy_0)\,du \qquad (\sigma>1-p),$$

ahonnan a paraméteres integrálok differenciálási szabálya szerint[75] azonnal adódik: $f_{[s]}(z)$ mindegyik $z\in(iy_0, 1+iy_0)$ helyen differenciálható és

$$(10.14)\quad \frac{\partial}{\partial z}f_{[s]}(z)=\int_0^1 f^{(p+1)}(z-t)\,\mathfrak{Z}_{s+p}(t)\,dt-\mathfrak{Z}_{s-1}(z)\int_0^1 f(u+iy_0)\,du \quad (\sigma>1-p).$$

De (10.13)-ból jelölésváltoztatással kiolvashatjuk, hogy (10.14) jobboldala egyenlő $f_{[s-1]}(z)$-vel, tehát

$$(10.15)\qquad \frac{\partial}{\partial z}f_{[s]}(z)=f_{[s-1]}(z) \qquad (\sigma>1-p).$$

Minthogy $p$ akármilyen nagyra választható, következik (10.15) érvényessége minden $s$-re, ebből pedig iterálással (10.10).

Ha (*) teljesül, a végeredmény fennáll az $iy_0$, $1+iy_0$ végpontokban is, mert ekkor $f_{[s]}(z)$ $(\sigma>1-p)$ (10.13) kifejezéséből csak az első tag marad meg, mely $z$-nek a teljes $v=y_0$ egyenes mentén differenciálható, 1 szerint periodikus függvénye.

2. Az a feltevésünk, hogy az $[iy_0, 1+iy_0]$ zárt szakasz minden pontja belefoglalható egy olyan (pozitív sugarú) körlemezbe, melynek belsejében és

[74] Megjegyezzük, hogy (10.12)-ben $\Gamma(1-\sigma+\nu)/\nu!\sim\nu^{-\sigma}$ és $\zeta(1-\sigma+\nu)\to 1\ (\nu\to\infty)$.
[75] L. pl. [43], 296.

határán $f(w)$ differenciálható, a HEINE—BOREL-féle befedési tétel alapján maga után vonja egy egész $|v-y_0|<\eta$ sáv létezését, melyben $f(w)$ mindenütt holomorf; így szükségkép $\Xi_{y_0}>0$.

Felhasználva az imént igazolt 1. részt, a (*) kikötés mellett adódik: bármely rögzített $s$-re $f_{[s]}(w)$ differenciálható a $|v-y_0|<\Xi_{y_0}$ sávban, s itt fennáll (10. 10); ebből pedig a CAUCHY—TAYLOR-féle kifejtési tétel alapján következik (10. 11), hacsak $|\Delta z|<\Xi_{y_0}$.

3. (10. 9)-ben $s$ helyett $(s-\nu)$-t véve és $\mathfrak{C}_l$ helyett speciálisan egy $|w-z|=\delta$ (pozitív irányítású) kört választva integrációs útnak, írhatjuk (vö. (3. 5), (6. 7)):

$$(10.16)\quad \begin{cases} c_{\nu,s}(z)=\dfrac{\Gamma(1-s+\nu)}{\nu!}\left\{\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint\limits_{|w-z|=\delta} f(w)(w-z)^{s-\nu-1}\,dw+\right.\\[2ex] \left.+(-1)^{\nu}\dfrac{\sin\pi s}{\pi}\left[\displaystyle\int_0^1 f(z-t)\zeta(1-s+\nu,t+1)\,dt+\int_\delta^1 f(z-t)t^{s-\nu-1}dt\right]\right\}\\[2ex] \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad(\nu=0,1,2,\ldots). \end{cases}$$

Itt $\nu>\sigma$ mellett $|\zeta(1-s+\nu,t+1)|\leqq\zeta(1-\sigma+\nu)$ $(0\leqq t\leqq 1)$, továbbá $\Gamma(1-s+\nu)|\leqq\Gamma(1-\sigma+\nu)$, $|\sin\pi s|\leqq|\sin\pi\sigma|+|\operatorname{sh}\pi\tau|$, úgyhogy az integrálok legegyszerűbb megbecslése (10. 12)-t szolgáltatja.

5. Kiemeljük, hogy (10. 11) és (10. 12) $s=0$ esetén az

$$(10.17)\qquad f(z+\Delta z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!}(\Delta z)^{\nu}$$

kapcsolatba, ill. a

$$(10.18)\qquad |c_{\nu,0}(z)|=\left|\frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!}\right|\leqq\frac{M_z(\delta)}{\delta^{\nu}}\qquad(\nu=1,2,\ldots)$$

egyenlőtlenségbe megy át, tehát *a Cauchy—Taylor-féle kifejtési tétel megfelelőjével és a Cauchy-féle becslési formulák általánosított alakjával* állunk szemben.

E vonatkozásban megemlítendő, hogy RIEMANN idevágó munkájában a törtrendű integrálok és deriváltak bevezetését éppen a közönséges TAYLOR-sornak egy formálisan felírt (mindkét irányban végtelen) kiterjesztésére alapozza, ti. az

$$(10.19)\qquad f(x+h)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{h^{\nu+r}}{\Gamma(\nu+r+1)}f^{(\nu+r)}(x)$$

képletre, ahol $r$ nem-egész valós szám és $f^{\nu+r}$ a $(\nu+r)$-edrendű (általánosított) derivált jele (vö. (1. 1), (1. 3)). Bár (10. 19) bizonyos esetei — főleg az ún. HEAVISIDE-kalkulus elterjedése óta — gyakran szerepelnek az irodalomban, csak a 40-es években sikerült HARDYnak megmutatnia, hogy (10. 19) valóban érvényes egyes speciális függvényosztályokra aszimptotikus, ill. BOREL-típusú sorfejtésként.[76]

**6.** A XII. tételből folyik, hogy a fenti feltételek mellett $f_{[s]}(z)$ *Laurent-sorba is fejthető* — bár nem $z-z_0=\Delta z_0$ $(z_0 \in (iy_0, 1+iy_0))$, hanem $e^{2\pi iz}$ *hatványai szerint.*

**XIII. tétel.** *Ha* $f(w)$ *holomorf egy* $\vec{l}_0: [iy_0, 1+iy_0)$ *irányított egyenesdarab mentén és* $\int_{(\vec{l}_0)} f(w)\,dw=0$, *akkor tetszőleges (komplex)* $s$ *mellett minden* $z \in \vec{l}_0$ *pontban fennáll:*

$$f_{[s]}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' (2n\pi i)^{-s}\gamma_{n,y_0}\cdot e^{2n\pi iz}, \tag{10.20}$$

*ahol* $(2n\pi i)^{-s}$ *főérték,*

$$\gamma_{n,y_0}=\int_{(\vec{l}_0)} f(w)\,e^{-2n\pi iw}\,dw \qquad (n=\pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{10.21}$$

*és* $'$ *azt jelzi, hogy* $n \neq 0$.

(10. 20) *pontos érvényességi tartománya a* $w$*-síknak az a legszélesebb, az* $u=y_0$ *egyenest belsejében tartalmazó és a valós tengellyel párhuzamos egyenesek által határolt sávja, melyben* $f(w)$ *szingularitásmentes.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $s$ rögzítve, $z=x+iy$.

A tétel premisszájából folyik — mint fent láttuk — oly $|v-y_0|<v^*$ sáv létezése, melyben $f_{[s]}(w)$ szintén reguláris. De akkor (egy periodikus komplex függvényekre vonatkozó ismert tétel[77] alapján) mindenesetre fennáll

$$f_{[s]}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n,s}\cdot e^{2n\pi iz} \qquad (|x-y_0|<v^*) \tag{10.22}$$

alkalmas $A_{n,s}$ együtthatókkal. Egyúttal adódik, hogy az érvényességi tartományt határoló $v=y_0 \pm v^*$ egyenesek önmagukkal párhuzamosan eltolhatók mindaddig, míg a köztük levő sávban $f(w)$ reguláris marad; az így nyert sávon kívül viszont a (10. 22) sor mindenütt divergens.

Tehát csupán azt kell még igazolnunk, hogy (10. 22)-ben (vö. (10. 21))

$$A_{n,s}=\begin{cases} 0, & \text{ha } n=0; \\ (2n\pi i)^{s}\gamma_{n,y_0}, & \text{ha } n\neq 0. \end{cases} \tag{10.23}$$

[76] Vö. [14]. — HARDY írja (i. h. 49. o.): "Riemann's point of view is avowedly heuristic, his object being to define $D^p (=f^p)$ such a way as to secure formal agreement with (1. 1) (=(10. 19))...".

[77] Vö. pl. [21], 64—65.

Valóban, válasszuk a $p \geqq 0$ egész számot úgy, hogy $\sigma > 1-p$, s legyen $z \in \vec{l}_0$. Írhatjuk (vö. (3. 1), (10. 13)):

$$(10.24)\quad \begin{cases} f_{[s]}(z) = \int\limits_0^1 f^{(p)}(z-t)\,\mathfrak{Z}_{s+p}(t)\,dt = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}{}'(2n\pi i)^{-(s+p)} \int\limits_0^1 f^{(p)}(z-t)\,e^{2n\pi i t}dt = \\ \qquad = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}{}'(2n\pi i)^{-(s+p)} e^{2n\pi i z} \int\limits_{(\vec{l})} f^{(p)}(w)\,e^{-2n\pi i w}\,dw = \\ \qquad = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}{}'(2n\pi i)^{-s}\gamma_{n,y_0}\cdot e^{2n\pi i z}.\ [78] \end{cases}$$

Minthogy pedig valamely $\Phi(Z)$ függvény $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot Z^n$ típusú LAURENT-sorfejtése egy-egy 0-centrumú, szingularitásmentes körgyűrűn belül egyértelmű, (10. 22)-ből és (10. 24)-ből koefficiens-összehasonlítással (10. 23)-ra jutunk. Qu. e. d.

Megjegyezzük, hogy $y_0 = 0$, azaz $z = x \in (0, 1)$ esetén (10.20) az alapvető

$$(10.25)\quad \begin{cases} f_{[s]}(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}{}'(2n\pi i)^{-s}\gamma_n e^{2n\pi i x}, \\ \gamma_n = \int\limits_0^1 f(t)\,e^{-2n\pi i t}\,dt \end{cases}$$

*Fourier-előállításra* redukálódik (vö. (2. 9)—(2. 11)), mely azonban tetszőleges (1 szerint periodikus, 0 integrál-középértékű) $f(u) \in L(0, 1)$ függvényre — mint tudjuk — csak $\sigma > 1$ mellett érvényes.

## 11. §. Más komplex vonalintegrál-előállítások

**1.** Az utolsónak tárgyalt esetben $f_{[s]}(z)$ (10. 9) alatti kifejezése egyszerűbb alakra hozható: $I_s(f, z, \delta)$ mintegy az előtte álló vonalintegrálba olvasztható — *feltéve, hogy* $0 < \sigma < 1$. — A nyert integrál egy adott pontot megkerülő és egy abból kiinduló félegyenes mindkét oldalán a végtelenbe nyúló integrációs útra vonatkozik, tehát ún. „hurokintegrál"; úgy is felfoghatjuk, mint a (7. 10) alatti WEYL-integrál holomorf függvényekre vonatkozó, kiterjesztett megfelelőjét.

[78] Az itt felhasznált tagonkénti integrálás nyilván megengedett.

**XIV. tétel.** *Tegyük fel, hogy $f(w)$ egy adott $\vec{l}_0$: $[iy_0, 1+iy_0)$ irányított egyenes-szakasz minden pontjában reguláris és ennek mentén vett integrálja eltűnik, legyen továbbá $z=x+iy \in (iy_0, 1+iy_0)$.*

*Akkor érvényes az*

$$f_{[s]}(z)=\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{(\mathfrak{L})} f(w)(w-z)^{s-1}\,dw \qquad (0<\sigma<1) \tag{11.1}$$

*előállítás; itt $\mathfrak{L}$ egy tetszőleges, a $-\infty+iy_0$ pontból kiinduló, előbb a $v<y_0$ félsíkban haladó, majd a $z$ pont egyszeri pozitív értelmű megkerülése után a $v>y_0$ félsíkban újra $(=\infty+iy_0)$-ba visszatérő folytonos Jordan-görbe, mely elegendő közel van a $v=y_0$, $u\leqq x$ félegyeneshez.*[79]

BIZONYÍTÁS. Feltételeink mellett $f_{[s]}(z)$ minden $s$-re létezik és (10. 9) szerint

$$\left\{\begin{aligned} f_{[s]}(z)=\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\oint_{|w-z|=\delta} f(w)(w-z)^{s-1}\,dw+\int_0^1 f(z-t)\,\mathfrak{z}_s(t)\,dt+\\ +\Gamma(s)^{-1}\int_\delta^1 f(z-t)\,t^{s-1}\,dt \qquad (s\neq 1,2,\ldots),\end{aligned}\right. \tag{11.2}$$

ahol $\delta$ elegendő kis pozitív számot jelent és a körintegrál pozitív körüljárással értendő.

Ha $0<\sigma<1$, akkor (7. 19) felhasználásával (vö. (6. 7))

$$\mathfrak{z}_s(t)=\Gamma(s)^{-1}\left[-\frac{1}{s}+\sum_{m=1}^{\infty}\left((m+t)^{s-1}-\frac{(m+1)^s-m^s}{s}\right)\right] \qquad (0<t<1) \tag{11.3}$$

és a jobboldali sor (rögzített $s$ mellett) $(0,1)$-ben egyenletesen konvergens. Így a (11. 2)-beli második integrál:

$$\int_0^1 f(z-t)\,\mathfrak{z}_s(t)\,dt=\Gamma(s)^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}\int_m^{m+1} f(z-v)\,v^{s-1}\,dv=\Gamma(s)^{-1}\int_1^{\infty} f(z-v)\,v^{s-1}\,dv,$$

és a képlet az egyszerűbb

$$f_{[s]}(z)=\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\oint_{|w-z|=\delta} f(w)(w-z)^{s-1}\,dw+\Gamma(s)^{-1}\int_\delta^{\infty} f(z-t)\,t^{s-1}\,dt \qquad (0<\sigma<1) \tag{11.4}$$

alakot ölti; kézenfekvő arra gondolni, hogy az utolsó tagot az $f(w)(w-z)^{s-1}$ függvény valamely alkalmas vonalintegráljával hozzuk kapcsolatba.

[79] Azaz beleesik egy $|v-y_0|<\delta$, $u\leqq x+\delta$ sávba, elegendő kicsi $\delta>0$ mellett.

Figyelembe véve, hogy a $(w-z)^{s-1}$ főérték holomorfiatartománya a $v=y_0$, $u \leqq x$ félegyenes hosszában felhasított $w$-sík, integráljuk az említett függvényt a metszet „felső", ill. „alsó" partja mentén. Írhatjuk (vö. (10. 3)):

$$(11.5)\quad \begin{cases} \int\limits_{-\infty+iy_0}^{z-\delta} f(w)(w-z)_+^{s-1}\,dw + \int\limits_{z-\delta}^{-\infty+iy_0} f(w)(w-z)_-^{s-1}\,dw = \\ = \int\limits_{-\infty}^{x-\delta} f(u+iy_0)(x-u)^{s-1}(e^{-i\pi s}-e^{i\pi s})\,du = \\ = 2i\sin\pi s\cdot\int\limits_{\delta}^{\infty} f(z-t)t^{s-1}\,dt, \end{cases}$$

s a (11. 4)-be való helyettesítés (vö. (3. 5)) az újabb

$$(11.6)\quad \begin{cases} f_{[s]}(z)=\dfrac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\left[\int\limits_{-\infty+iy_0}^{z-\delta} f(w)(w-z)_+^{s-1}\,dw + \oint\limits_{|w-z|=\delta} f(w)(w-z)^{s-1}\,dw+\right. \\ \qquad\left. + \int\limits_{z-\delta}^{-\infty+iy_0} f(w)(w-z)_-^{s-1}\,dw\right] \qquad (0<\sigma<1) \end{cases}$$

előállítást szolgáltatja.

Mivel pedig $f(w)(w-z)^{s-1}$ reguláris az imént említett metszet mindkét oldalán (egy-egy elegendő keskeny sávban), (11. 6)-ból következik (11. 1), az $\mathfrak{L}$ integrációs útnak a tételben megkövetelt választása mellett.

**2.** (11. 6), ill. (11. 1) kissé hosszadalmasabban (10. 20)—(10. 21) alapján is levezethető, ha a

$$(11.7)\quad \begin{cases} (2n\pi i)^{-s}=\Gamma(s)^{-1}\int\limits_0^{\infty} u^{s-1}e^{-n\pi i u}\,du \\ (n=\pm 1, \pm 2, \ldots;\ 0<\sigma<1) \end{cases}$$

képletre támaszkodunk.

Most megmutatjuk, hogy a gammafüggvény EULER-féle integrálalakjából közvetlenül folyó

$$(11.8)\qquad (2n\pi)^{-s}=\Gamma(s)^{-1}\int\limits_0^{\infty} u^{s-1}e^{-2n\pi u}\,du \qquad (n=1,2,\ldots;\ \sigma>1)$$

formula segítségével $f_{[s]}(z)$ számára új típusú vonalintegrál-kifejezés nyerhető, amely — ellentétben (11. 1)-gyel — *az egész s-síkon* érvényes. — Mindenesetre várható, hogy ez alkalommal a $W_s$-limesz (2.10)-beli első alakja, ill. (10.20) megfelelő (két sorra bontott) változata:

$$(11.9)\qquad \begin{cases} f_{[s]}(z) = e^{-\frac{i\pi s}{2}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\gamma_{n,y_0}}{(2n\pi)^s} e^{2n\pi i z} + \\ \quad + e^{+\frac{i\pi s}{2}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\gamma_{-n,y_0}}{(2n\pi)^s} e^{-2n\pi i z} \end{cases}$$

kerül előtérbe.

**3.** Írjuk (vö. (2.11), (10.21)):

$$(11.10)\qquad f_{\pm}(w) = \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_{\pm n} - \gamma_0) e^{\pm 2n\pi i w},$$

$$(11.11)\qquad f_{\pm, y_0}(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{\pm n, y_0} e^{\pm 2n\pi i w},$$

a jobboldali sorok konvergenciájának feltételezése mellett. — Látható, hogy a (11.10) sor összetartó, ha $v > 0$, ill. $v < 0$, a plusz-, ill. mínusz-jel esetének megfelelően ($\gamma_0 \neq 0$ mellett e kikötések nyilván szükségesek is); (11.11)-nél a konvergenciához elégséges, hogy $v > y_0(+)$, ill. $v < y_0(-)$ legyen.

Segédeszközül szolgál az önmagában sem érdektelen

**XV. tétel.** 1. *Bármely $f(u) \in L(0,1)$ függvényre minden $x \in (0,1)$ helyen, $\sigma > 1$ mellett fennáll*

$$(11.12)\qquad f_{[s]}(x) = \Gamma(s)^{-1} \int_0^{\infty} u^{s-1} \left[ e^{-\frac{i\pi s}{2}} f_+(x+iu) + e^{\frac{i\pi s}{2}} f_-(x-iu) \right] du.$$

2. *Ha $f(w)$ egy $[iy_0, 1+iy_0)$ $(y_0 \gtrless 0)$ egyenesdarab mentén reguláris és $\int_0^1 f(u+iy_0)\,du = 0$, akkor minden $z \in (iy_0, 1+iy_0)$ helyen, $\sigma > 1$ mellett érvényes az*

$$(11.13)\qquad f_{[s]}(z) = \Gamma(s)^{-1} \int_0^{\infty} u^{s-1} \left[ e^{-\frac{i\pi s}{2}} f_{+,y_0}(z+iu) + e^{\frac{i\pi s}{2}} f_{-,y_0}(z-iu) \right] du$$

*előállítás.*

BIZONYÍTÁS. 1. Ha a $\sigma > 1$ mellett bizonyosan konvergens

$$(11.14)\quad f_{[s]}(x) = e^{-\frac{i\pi s}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi)^{-s} (\gamma_n - \gamma_0) e^{2n\pi i x} + e^{\frac{i\pi s}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi)^{-s} (\gamma_{-n} - \gamma_0) e^{-2n\pi i x}$$

sorfejtésben (vö. (2.10)) a $(2n\pi)^{-s}$ tényezőt (11.8)-beli kifejezésével pótoljuk, egyszerű formális számolással rögtön (11.12)-re jutunk; hátra van még azonban annak megmutatása, hogy az összegezés és integrálás sorrendjének felcserélése esetünkben megengedett.

Mindenekelőtt megállapítjuk, hogy a (11.12) alatti

$$(11.15)\qquad J_{\pm}(x,s)=\int_0^\infty u^{s-1}f_{\pm}(x\pm iu)\,du$$

integrálok minden (0, 1)-beli $x$-re, $\sigma>1$ mellett valóban léteznek, mert [vö. (11.10)]

$$(11.16)\qquad |f_{\pm}(x\pm iu)|\leqq 2\int_0^1|f(t)|\,dt\cdot(e^{2\pi u}-1)^{-1}\qquad (u>0)$$

folytán az integrandusok közös majoránsa a $(0,\infty)$-ben integrálható $u^{\sigma-1}(e^{2\pi u}-1)^{-1}$ függvénynek egy állandóval való szorzata.

Tekintsük továbbá a

$$(11.17)\qquad J_{\pm}(x,s)=\sum_{n=1}^{N}\int_0^\infty u^{s-1}(\gamma_{\pm n}-\gamma_0)\,e^{2n\pi(\pm ix-u)}\,du+P_{\pm,N}(x,s)$$

felbontást; itt

$$|P_{\pm,N}(x,s)|=\left|\int_0^\infty u^{s-1}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}{}'(\gamma_{\pm n}-\gamma_0)\,e^{2n\pi(\pm ix-u)}\right)du\right|\leqq$$

$$\leqq 2\int_0^1|f(t)|\,dt\cdot\int_0^\infty\frac{u^{\sigma-1}}{e^{2\pi u}-1}\,e^{-2N\pi u}\,du,$$

és az utolsó tag $N\to\infty$ esetén 0-hoz tart, mint az

$$\int_0^\infty u^{\sigma-1}(e^{2\pi u}-1)^{-1}e^{-2N\pi u}\,du<(2\pi)^{-1}\int_0^\infty u^{\sigma-2}e^{-2N\pi u}\,du=(2\pi)^{-\sigma}\Gamma(\sigma-1)\,N^{1-\sigma}$$

becslésből kitűnik.

Ennélfogva (11.6)-ból kapjuk:

$$J_{\pm}(x,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty u^{s-1}(\gamma_{\pm n}-\gamma_0)\,e^{2n\pi(\pm ix-u)}\,du,$$

amivel állításunk igazolást nyert.

2. Ha (11.9)-ből indulunk ki és figyelembe vesszük, hogy

$$(11.18)\quad \begin{cases} |\gamma_{\pm n, y_0}| = e^{\pm 2n\pi y_0} \left| \int_0^1 f(u+iy_0) e^{\mp 2n\pi i u}\, du \right| \leqq \\ \leqq e^{\pm 2n\pi y_0} \int_0^1 |f(u+iy_0|\, du, \end{cases}$$

akkor az előbbiekkel analóg módon következik (11.13).

**4.** (11.12)—(11.13) felhasználása révén nehézség nélkül jutunk újabb „hurokintegrál"-előállításokhoz.

**XVI. tétel.** *Ha $f(u) \in L(0,1)$ és valamely $x \in (0,1)$ helyen $f_+(w)$ és $f_-(w)$ egyaránt reguláris, akkor az adott x-re és bármely s-re:*

$$(11.19)\quad f_{[s]}(x) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{(\mathfrak{L}_0)} w^{s-1} \left[ e^{-\frac{i\pi s}{2}} f_+(x-iw) + e^{\frac{i\pi s}{2}} f_-(x-iw) \right] dw.$$

2. *(11.13)-éval megegyező premissza mellett fennáll minden $z \in (iy_0, 1+iy_0)$ $(y_0 \gtreqless 0)$ helyen, bármely s-re:*

$$(11.20)\quad f_{[s]}(z) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{(\mathfrak{L}_0)} w^{s-1} \left[ e^{-\frac{i\pi s}{2}} f_{+, y_0}(z-iw) + e^{\frac{i\pi s}{2}} f_{-, y_0}(z+iw) \right] dw.$$

*Mindkét képletben $w^{s-1}$ főértéket jelöl, $\mathfrak{L}_0$ pedig ugyanolyan jellegű, ezúttal a $w=0$ pontot megkerülő s az $u=0$, $v \leqq 0$ félegyeneshez elég közeli görbe, mint (11.1) integrációs útja.*[80]

BIZONYÍTÁS. 1. Vegyük észre, hogy $\mathfrak{I}(x \pm iw) = \mathfrak{R}(w)$ folytán $v < 0$ esetén $x-iw$, $x+iw$ beleesik a (11.10)-beli $e^{2\pi i w}$, ill. $e^{-2\pi i w}$ hatványai szerint haladó hatványsor konvergencia-tartományába, s így kimondhatjuk: $v < 0$ mellett mind $f_+(x-iw)$, mind $f_-(x+iw)$ $w$-nek holomorf függvénye. — Továbbá feltevésünk szerint létezik oly $|w| < \delta$ körlemez, melynek bármely pontjában $f_\pm(x \mp iw)$ (mint $w$ függvénye) differenciálható.

Képezzük $\sigma > 1$ mellett a

$$(11.21)\quad T_\pm(x, s) = \int_{(\mathfrak{L}_0)} w^{s-1} f_\pm(x \mp iw)\, dw$$

hurokintegrálokat, $\mathfrak{L}_0$-t az $u=0$, $v \leqq 0$ félegyeneshez elegendő közel oly módon választva, hogy beleessék $f_+(x-iw)$ és $f_-(x+iw)$ ezen félegyenes körüli holomorfia-tartományának közös részébe. $T_\pm(x, s)$ az eddigiek és (11.16)

[80] Csak rövidség kedvéért nem említjük a tételben, hogy (11.19) és (11.20) jobboldalán $s = 1, 2, \ldots$ mellett a megfelelő limesz értendő.

alapján bizonyosan létezik, továbbá a CAUCHY-féle alaptételre tekintettel írhatjuk:

$$(11.22)\quad \begin{cases} T_\pm(x,s) = \int\limits_{-\infty}^{-\varrho} (w^{s-1})_- f_\pm(x \mp iw)\,dw + \oint\limits_{|w|=\varrho} w^{s-1} f_\pm(x \mp iw)\,dw + \\ \qquad + \int\limits_{-\varrho}^{-\infty} (w^{s-1})_+ f_\pm(x \mp iw)\,dw, \end{cases}$$

hol $\varrho$ elegendő kicsi pozitív szám, a körintegrál pozitív körüljárású és $(w^{s-1})_\pm = -|w|^{s-1} e^{\pm i\pi s}$.

Ámde az egyenes útra vonatkozó integrálok összege:

$$\int\limits_{-\varrho}^{-\infty} f_\pm(x \mp iw)\,[(w^{s-1})_+ - (w^{s-1})_-]\,dw = 2i \sin \pi s \cdot \int\limits_{\varrho}^{\infty} f_\pm(x \pm iu)\,u^{s-1}\,du,$$

úgyhogy (11.22)-ből $\varrho \to +0$ határátmenetnél (vö. (11.15))

$$(11.23)\qquad T_\pm(x,s) = 2i \sin \pi s \cdot J_\pm(x,s)$$

adódik. Innen (11.12) folyományaképpen

$$(11.24)\quad \begin{cases} \dfrac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\left[e^{-\frac{i\pi s}{2}} T_+(x,s) + e^{\frac{i\pi s}{2}} T_-(x,s)\right] = \\ = \Gamma(s)^{-1}\left[e^{-\frac{i\pi s}{2}} J_+(x,s) + e^{\frac{i\pi s}{2}} J_-(x,s)\right] = f_{[s]}(x); \end{cases}$$

s mivel $T_\pm(x,s)$ (az $s$-sík minden véges tartományában egyenletesen konvergens lévén) $s$-nek egész, az $s = 1, 2, \ldots$ helyeken eltűnő függvénye, (11.24) és egyúttal (11.19) az egész $s$-síkon érvényes.

2. Ami az állítás második felét illeti, csak azt kell meggondolnunk, hogy ez esetben $f(w)$ $v = y_0$ egyenesmenti regularitása már maga után vonja a (11.11) sorok egyidejű konvergenciáját és $f_{\pm, y_0}(w)$ holomorfiáját egy teljes $|v - y_0| < \eta$ sávban (vö. XIII. tétel); különben az

$$\int\limits_{(\mathfrak{L}_0)} w^{s-1} f_{\pm, y_0}(z \mp iw)\,dw$$

kontúrintegrálok diszkussziója a fentieknek pontosan megfelelő módon vezet (11.20)-ra. Qu. e. d.

5. (11.12)-vel és (11.19)-cel kapcsolatban megemlítjük még, hogy ezek bizonyos alapvető, a RIEMANN-féle zetafüggvényre vonatkozó formulák általánosításainak tekinthetők.

Valóban, $f(u) \equiv -1$ esetén rövidítés után nyerjük (vö. (4. 7)):

$$\zeta(1-s,x)=(2\pi)^{-s}\int_0^\infty u^{s-1}\left(\frac{e^{-\frac{i\pi s}{2}}}{e^{u-2\pi i x}-1}+\frac{e^{\frac{i\pi s}{2}}}{e^{u+2\pi i x}-1}\right)du \qquad (\sigma>1), \tag{11.25}$$

ill.

$$\zeta(1-s,x)=\frac{(2\pi)^{-s}}{2i\sin \pi s}\int_{(\mathcal{L}_0)} w^{s-1}\left(\frac{e^{-\frac{i\pi s}{2}}}{e^{-w-2\pi i x}-1}+\frac{e^{\frac{i\pi s}{2}}}{e^{-w+2\pi i x}-1}\right)dw \quad (s\neq 0); \tag{11.26}$$

innen pedig $x=1$ mellett a (3. 2) függvényegyenlet alapján:

$$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{e^u-1}\,du \qquad (\sigma>1), \tag{11.27}$$

$$\zeta(s)=\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{(\mathcal{L}_0)} \frac{w^{s-1}}{e^{-w}-1}\,dw \qquad (s\neq 1). \tag{11.28}$$

Az utóbbiak $\zeta(s)$ klasszikus, RIEMANNtól származó integrál-előállításai.

(Beérkezett: 1960. I. 15.)

*Az Eötvös Loránd Tudományegyetem*
*Matematikai Intézete*