A $\sum \binom{n}{r+kq}$ ÖSSZEGRŐL

Írta: HUSZÁR GÉZA

1. §

A fenti[1] háromváltozós indexfüggvény más alakban való előállításának feladatát A. A. COURNOT[2] és CHR. RAMUS[3] trigonometriai alakban oldja meg.[4] A RAMUS-képlet

$$\sum \binom{n}{r+kq} = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \left(2 \cos \frac{k\pi}{q}\right)^n \cos \frac{k(n-2r)}{q} \pi$$

minden formai érdekessége mellett nem viszi előbbre a kérdést. Az efajta előállításnak ui. két célja lehet: a) *elméletileg,* az adott függvényt új világításba helyezni, a közvetlen, definíció szerinti — jelen esetben kombinatorikai — háttértől függetlenítve azt; b) *gyakorlatilag:* módszert adni a függvényértéknek adott argumentumok — jelen esetben argumentumhármas — melletti kiértékelésére.

Mindezen követelményeknek a RAMUS-képlet egyáltalán nem felel meg. Elméletileg a trigonometriai alakú képlet nem revelál semmit, gyakorlatilag pedig — már pl. $q=5$ mellett is — használhatatlannak bizonyul. Olyan nagy a munkaigénye, hogy ahhoz képest még a közvetlen kiértékelés is inkább jöhet számításba.

Az alábbiakban eljárást közlünk az összeg aritmetikai előállítására, visszavezetve a kérdést a rekurrens sorozatok elméletére és gyakorlatára.

Tétel: *Legyen* $m = \left[\frac{n-1}{2}\right]$, $n_0 = n - 2m$ *(és így* $0 < n_0 \leqq 2$*), továbbá* $0 \leqq r < q$, *s minden növelt vagy csökkentett r-értéken* a mod $\cdot\, q$ *legkisebb nem-negatív maradék értendő és legyen*

$$r_0 \equiv r - m \;(\mathrm{mod} \cdot q), \textit{ ahol } 0 \leqq r_0 < q,$$

[1] Az összegezés vonatkozzék minden k értékre, amely mellett a megfelelő binomiális együtthatóknak elemi kombinatorikai értelmük vagy értelmezésük van.

[2] *A. A. Cournot:* Solution d'un problème d'analyse combinatoire. Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques, tome onzième 1829. p. 93—97.

[3] Journal f. Math. (1834) Bd. 11. p. 353.

[4] Cit. sec. Eugen *Netto:* Lehrbuch der Combinatorik (Leipzig 1910.) 19. o.

továbbá

$$p=\left[\frac{q-1}{2}\right],$$

akkor

$$\sum\binom{n}{r+kq}=\frac{2^n+E(n,r,q)}{q},$$

ahol $E(n,r,q)$ *az*

$$E_1=E(n_0,r_0,q)=q\binom{n_0}{r_0}-2^{n_0}$$

$$E_2=E(n_0+2,r_0+1,q)=q\binom{n_0+2}{r_0+1}-2^{n_0+2}$$

$$\vdots$$

$$E_p=E(n_0+2p-2,r_0+p-1,q)=q\binom{n_0+2p-2}{r_0+p-1}-2^{n_0+2p-2}$$

kezdeti értékkel és az

$$E(n,r,q)=\binom{q-2}{1}E(n-2,r-1,q)-\binom{q-3}{2}E(n-4,r-2,q)\pm\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{p-1}\binom{q-p-1}{p}E(n-2p,r-p,q)$$

egyenlettel definiált rekurrens sorozat $(m+1)$*-edik tagja.*

Különösen egyszerű az eredmény $q=3$ esetében:

$$\sum\binom{n}{r+3k}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r+3}+\binom{n}{r+6}+\cdots=\frac{2^n-2^{n_0}}{3}+\binom{n_0}{r_0}$$

és $q=4$ esetében:

$$\sum\binom{n}{r+4k}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r+4}+\binom{n}{r+8}+\cdots=\frac{2^n-2^{m+n_0}}{4}+2^m\binom{n_0}{r_0}.$$

2. §

Kiindulunk a következő összefüggésből:

1. LEMMA.

$$\binom{q-1}{0}\sum\binom{n}{r+kq}-\binom{q-2}{1}\sum\binom{n-2}{r-1+kq}+ \tag{1}$$

$$+\binom{q-3}{2}\sum\binom{n-4}{r-2+kq}-\cdots=2^{n-q+1}.$$

BIZONYÍTÁS: Ha $q=1$, a $\sum\binom{n}{r+k}$ összeg tagjai $\binom{n}{0},\binom{n}{1},\ldots,\binom{n}{n}$ a binomiális háromszög[5] n-edik sorának (összes) tagjai s így (1)-nek megfelelően valóban

$$\sum\binom{n}{r+k}=2^n.$$

Ha $q=2$, a $\sum\binom{n}{r+2k}$ összeg felöleli — r paritásához képest — a binomiális háromszög n-edik sorának páros, ill. páratlan alsó számú tagjait, s mint az elemekből ismeretes, a két összeg egyenlő, tehát mindenképpen:

$$\sum\binom{n}{r+2k}=2^{n-1}.$$

További elemzésünk könnyebb megértésére értelmezzük ezt a $q=2$ esetet a következőképpen:

A binomiális együtthatók elemi tulajdonsága alapján

$$\sum\binom{n}{r+2k}=\sum\binom{n-1}{r+2k}+\sum\binom{n-1}{r-1+2k}$$

s így a $\sum\binom{n}{r+2k}$ összeg tagjai hiánytalanul kitöltik a binomiális háromszög $n-1$-edik sorát, tehát valóban

$$\sum\binom{n}{r+2k}=2^{n-1}.$$

$q=3$ esetében nem elég felmennünk az $n-1$-edik sorba, mert a $\sum\binom{n-1}{r+3k}$ és a $\sum\binom{n-1}{r-1+3k}$ összegek tagjai még nem töltik ki hézagmentesen ezt a sort, hiányzanak ezek a tagok:

$\binom{n-1}{r+1},\binom{n-1}{r+4},\ldots$, azaz a $\sum\binom{n-1}{r+1+3k}$ összeg tagjai.

Kézenfekvő ezért a $\sum\binom{n}{r+3k}$ összeg tagjait kétszer bontani, azaz felmenni az $n-2$-edik sorba.

Ekkor az

$$\binom{n}{r}=\binom{2}{0}\binom{n-2}{r}+\binom{2}{1}\binom{n-2}{r-1}+\binom{2}{2}\binom{n-2}{r-2}$$

5 A *Pascal*-háromszöget, vagy *Tartaglia*-háromszöget, vagy arithmetikai háromszöget helyesebbnek tartjuk binomiális háromszögnek nevezni.

elemi összefüggés alapján

$$\sum\binom{n}{r+3k}=\binom{2}{0}\sum\binom{n-2}{r+3k}+\binom{2}{1}\sum\binom{n-2}{r-1+3k}+\binom{2}{2}\sum\binom{n-2}{r-2+3k}.$$

Így a $\sum\binom{n}{r+3k}$ összeg tagjai már kitöltik a binomiális háromszög $n-2$-edik sorának minden helyét, csakhogy az $\binom{n-2}{r-1+3k}$ összeg tagjai kétszer kerültek számításba.

Ezért nyilván

$$\sum\binom{n}{r+3k}-\sum\binom{n-2}{r-1+3k}=\sum\binom{n-2}{r+3k}+$$
$$+\sum\binom{n-2}{r-1+3k}+\sum\binom{n-2}{r-2+3k}=2^{n-2}.$$

A $q=3$ esetre ezzel az (1) alatti bizonyítandó állításunk igazolódott, mert utolsó egyenletünk szerint valóban:

$$\sum\binom{n}{r+3k}-\binom{3-2}{1}\sum\binom{n-2}{r-1+3k}=2^{n-3+1}.$$

Vessük fel most a kérdést tetszőleges q-ra, azaz bizonyítsuk be teljes általánosságban az (1) alatti összefüggést. Ekkor $q-1$ bontó lépést kell tennünk, hogy $\sum\binom{n}{r+kq}$ tagjai hézagmentesen töltsék ki a binomiális háromszög $n-q+1$-edik sorának helyeit. Csakhogy a

$$\sum\binom{n}{r+kq}=\binom{q-1}{0}\sum\binom{n-q+1}{r+kq}+\binom{q-1}{1}\sum\binom{n-q+1}{r-1+kq}+$$
$$(2)\qquad +\binom{q-1}{2}\sum\binom{n-q+1}{r-2+kq}+\cdots+\binom{q-1}{t}\sum\binom{n-q+1}{r-t+kq}+\cdots+$$
$$+\binom{q-1}{q-1}\sum\binom{n-q+1}{r-q+1+kq}$$

összeg tagjai a

$$\sum\binom{n-q+1}{r+kq}+\sum\binom{n-q+1}{r-1+kq}+\cdots+\sum\binom{n-q+1}{r-t+kq}+\cdots+$$
$$+\sum\binom{n-q+1}{r-q+1+kq}=2^{n-q+1}$$

összeg tagjait többszörösen tartalmazzák. Ha azonban a $q-3, q-5, \ldots$ számosságú bontással nyert

$$\sum\binom{n-2}{r-1+kq}=\binom{q-3}{0}\sum\binom{n-q+1}{r-1+kq}+\binom{q-3}{1}\sum\binom{n-q+1}{r-2+kq}+\cdots+$$
$$+\binom{q-3}{t-1}\sum\binom{n-q+1}{r-t+kq}+\cdots+\binom{q-3}{q-3}\sum\binom{n-q+1}{r-q+2+kq},$$
$$\sum\binom{n-4}{r-2+kq}=\binom{q-5}{0}\sum\binom{n-q+1}{r-2+kq}+\binom{q-5}{1}\sum\binom{n-q+1}{r-3+kq}+\cdots+$$
$$+\binom{q-5}{t-2}\sum\binom{n-q+1}{r-t+kq}+\cdots+\binom{q-5}{q-5}\sum\binom{n-q+1}{r-q+3+kq},\ldots$$

egyenletek $\binom{q-2}{1}, \binom{q-3}{2}, \ldots$-szereseinek váltakozó előjellel vett összegét kivonjuk (2)-ből, s a nyert összegre bebizonyítjuk, hogy abban minden t-hez[6] tartozó együttható 1, azaz, hogy általában

$$T(q-1,t)=\binom{q-1}{0}\binom{q-1}{t}-\binom{q-2}{1}\binom{q-3}{t-1}+ \tag{3}$$
$$+\binom{q-3}{2}\binom{q-5}{t-2}-\cdots=1,$$

akkor ezzel kimutattuk, hogy

$$\binom{q-1}{0}\sum\binom{n}{r+kq}-\binom{q-2}{1}\sum\binom{n-2}{r-1+kq}+$$
$$+\binom{q-3}{2}\sum\binom{n-4}{r-2+kq}-\cdots=\sum\binom{n-q+1}{r+kq}+\sum\binom{n-q+1}{r-1+kq}+\cdots+$$
$$+\sum\binom{n-q+1}{r-t+kq}+\cdots+\sum\binom{n-q+1}{r-q+1+kq}=2^{n-q+1}.$$

Be kell tehát még bizonyítanunk a (3) alatti aritmetikai azonosságot.

2. LEMMA

$$T(q-1,t)=\binom{q-1}{0}\binom{q-1}{t}-\binom{q-2}{1}\binom{q-3}{t-1}+\binom{q-3}{2}\binom{q-5}{t-2}-\cdots=1.$$

[6] Feltehetjük, hogy $0<t<q$, mert $t=0$-ra a (3) automatikusan fennáll.

BIZONYÍTÁS: Ha $t=q-1$, akkor

$$T(q-1, q-1)=\binom{q-1}{0}\binom{q-1}{q-1}=1.$$

Ha pedig $t<q-1$, akkor a

$$T(q-1, t)=\binom{q-1}{0}\binom{q-1}{t}-\binom{q-2}{1}\binom{q-3}{t-1}+\binom{q-3}{2}\binom{q-5}{t-2}-\cdots$$

és a

$$T(q-2, t-1)=\binom{q-2}{0}\binom{q-2}{t-1}-\binom{q-3}{1}\binom{q-4}{t-2}+\binom{q-4}{2}\binom{q-6}{t-3}-\cdots,$$

illetve annak könnyű átalakításával nyert

$$\binom{q-2}{0}\binom{q-1}{t}-\binom{q-2}{0}\binom{q-2}{t}-\binom{q-3}{1}\binom{q-3}{t-1}+\binom{q-3}{1}\binom{q-4}{t-1}+$$
$$+\binom{q-4}{2}\binom{q-5}{t-2}-\binom{q-4}{2}\binom{q-6}{t-2}+\cdots$$

alakokból

$$T(q-1, t)-T(q-2, t-1)=\binom{q-2}{0}\binom{q-2}{t}-\binom{q-3}{0}\binom{q-3}{t-1}-$$
$$-\binom{q-3}{1}\binom{q-4}{t-1}+\binom{q-4}{1}\binom{q-5}{t-2}+\binom{q-4}{2}\binom{q-6}{t-2}-\cdots=$$
$$=T(q-2, t)-T(q-3, t-1).$$

Ugyanígy tovább:

$$T(q-2, t)-T(q-3, t-1)=T(q-3, t)-T(q-4, t-1)=\cdots=$$
$$=T(t+1, t)-T(t, t-1)=\left[\binom{t+1}{0}\binom{t+1}{t}-\binom{t}{1}\binom{t-1}{t-1}\right]-$$
$$-\left[\binom{t}{0}\binom{t}{t-1}-\binom{t-1}{1}\binom{t-2}{t-2}\right]=(t+1-t)-(t-t+1)=0.$$

Tehát

$$T(q-1, t)=T(q-2, t-1),$$

s ugyanígy

$$=T(q-3, t-2)=\cdots=T(q-t, 1).$$

De

$$T(q-t, 1)=\binom{q-t}{0}\binom{q-t}{1}-\binom{q-t-1}{1}\binom{q-t-2}{0}=$$
$$=(q-t)-(q-t-1)=1.$$

A (3) alatti azonosságból még egy következtetés vonható le:

3. LEMMA.

Ha a

$$\binom{q-1}{0}\binom{q-1}{t}-\binom{q-2}{1}\binom{q-3}{t-1}+\binom{q-3}{2}\binom{q-5}{t-2}-\cdots=1$$

aritmetikai azonosságban sorban $t=0,1,2,\ldots,q-1$ *értéket helyettesítünk s oldalanként összevonunk, a következő aritmetikai azonosság adódik:*

$$\binom{q-1}{0}2^{q-1}-\binom{q-2}{1}2^{q-3}+\binom{q-3}{2}2^{q-5}-\cdots=q \tag{4}$$

minden természetes q-ra.

3. §

A tétel bizonyítása az (1) és a (4) alatti összefüggések alapján most már könnyű. Ui.

$$q\left[\binom{q-1}{0}\sum\binom{n}{r+kq}+\binom{q-2}{1}\sum\binom{n-2}{r-1+kq}+\right.$$

$$\left.+\binom{q-3}{2}\sum\binom{n-4}{r-2+kq}-\cdots\right]=\left[\binom{q-1}{0}2^{q-1}-\binom{q-2}{1}2^{q-3}+\right.$$

$$\left.+\binom{q-3}{2}2^{q-5}-\cdots\right]2^{n-q+1}=\binom{q-1}{0}2^{n}-\binom{q-2}{1}2^{n-2}+\binom{q-3}{2}2^{n-4}+\cdots,$$

s így

$$\binom{q-1}{0}\left[q\sum\binom{n}{r+kq}-2^{n}\right]-\binom{q-2}{1}\left[q\sum\binom{n-2}{r-1+kq}-2^{n-2}\right]+$$

$$+\binom{q-3}{2}\left[q\sum\binom{n-4}{r-2+kq}-2^{n-4}\right]-\cdots=0,$$

tehát az

$$E(n,r,q)=q\sum\binom{n}{r+kq}-2^{n}$$

jelölés bevezetésével

$$\binom{q-1}{0}E(n,r,q)-\binom{q-2}{1}E(n-2,r-1,q)+\binom{q-3}{2}E(n-4,r-2,q)-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{p}\binom{q-p-1}{r}E(n-2p,r-p,q)=0.$$

Ez az összefüggés egyértelmű azzal, hogy az

$$\begin{gathered}E(n-2p, r-p, q),\\ E(n-2p-2, r-p-1, q),\\ \vdots\\ E(n-4, r-2, q),\\ E(n-2, r-1, q),\\ E(n, r, q)\end{gathered}$$

mennyiségek (ahol $n-2p>0$) rekurrens sorozatot alkotnak. A kezdeti értékek mindebből automatikusan úgy adódnak, amint azt az 1. §-ban közöltük.

(Beérkezett: 1959. XI. 24.)

Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem