A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

VÉGES, KOALÍCIÓMENTES JÁTÉKOK*

Írta: N. N. VOROBJOV

Bevezetés

A játékok matematikai elméletéről szóló első munkának ZERMELO „Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels" című [1] cikkét kell tekintenünk. Ebben a cikkben, a konkrét jellegű cím ellenére, lényegében véve olyan pozíciós típusú absztrakt játékról van szó, amelyben csak véges számú állás fordulhat elő és amelyben mindkét játékos pontosan tudja, milyen az állás a játék adott pillanatában. Amint ZERMELO bebizonyította, a sakknál a következő három algoritmus egyike áll fenn: nyerő az egyik játékos (mondjuk, világos) számára, bárhogy játszik is ellenfele, analóg nyerő algoritmus a másik játékos (sötét) számára, végül pedig az az algoritmus, amely mindkét játékosnak lehetővé teszi a döntetlen elérését.

Ebben a vonatkozásban a sakk elvileg hasonlít az olyan primitív gyermekjátékhoz, mint a „benn a bárány, kinn a farkas", amelynél ZERMELO tétele alapján az először említett két algoritmus egyike áll fenn (minthogy döntetlen ebben a játékban nem jön szóba). Amíg azonban a sakknál annak a kérdésnek a tisztázása, hogy a három algoritmus közül éppen melyik áll fenn a valóságban — amint a sok évszázados történelmi tapasztalat megmutatta — reménytelenül nehéz, addig a „benn a bárány, kinn a farkas" játéknál a „bárányok" nyerési algoritmusát mindenki, aki akarja, sikerrel alkalmazhatja.

Az említett játékoktól lényegesen különbözik a „fej vagy írás" játéknak az a formája, amikor az egyik játékos leteszi a pénzdarabot egyik oldalával felfelé, a másik pedig, nem látva azt, megpróbálja kitalálni, melyik oldal van felül. Itt nyilván semmiféle nyerő algoritmus nem lehetséges egyik játékos számára sem. Ugyanakkor ha feltesszük, hogy a „fej vagy írás" játékot sokszor megismétlik, akkor mindegyik játékos számára létezik egy bizonyos legokosabb magatartás: az első játékosnak minden egyes alkalommal $\frac{1}{2}$ valószínűséggel kell „írást" és „fejet" mutatni függetlenül attól, hogyan feküdt a pénzdarab az előző menetekben. A hasonló fajtájú játékoknak ezt a való-

* Успехи математических наук 14 (1959), № 4, 20—56.

színűségszámítási megközelítését BOREL, NEUMANN és KALMÁR fejlesztették ki a húszas évekből származó [2]—[6] munkáikban.

A következő évek folyamán számos további olyan cikk ([7]—[11]) jelent meg, amely a játékokat matematikai vizsgálatok tárgyának tekinti. A játékelmélet történetének ezt az előkészítő szakaszát 1944-ben NEUMANN és MORGENSTERN "Theory of games and economic behavior" című [12] monográfiájának megjelenése zárta le. Ebben a könyvben a szerzők megfogalmazták a játék axiomatikus definícióját, bebizonyították számos a játékokra vonatkozó tételt és megjelölték az elmélet további fejlődésének útjait.

NEUMANN és MORGENSTERN könyvének a megjelenése után sok matematikus erőteljesen hozzálát a játékelmélet kidolgozásához, és napjainkban ez már szélesen szétágazó és eredményekben gazdag tudományos elmélet, amely szorosan összekapcsolódik a matematika legkülönfélébb ágaival.

A játékelméletben „játékon" olyan jelenség kellőképpen leegyszerűsített modelljét értik, amelyben bizonyos számú „játékos" vesz részt, akiknek különböző érdekeik vannak és akik valamilyen módon küzdeni tudnak ezeknek az érdekeknek a megvalósulásáért. Itt játékosokon nemcsak fizikai személyeket érthetünk, hanem kollektívákat, játékosok csoportjait, versengő cégeket, hadviselő feleket, sőt, biológiai fajtákat is a létért való küzdelem feltételei között. Néha hasznos egyik játékosnak a természetet tekinteni.

Az egyes játékosok érdekeinek különbözősége egyáltalán nem jelenti az érdekek teljes szembenállását. Ezért a játékelmélet tekintetbe veszi a játékosok közti különféle kompromisszumok lehetőségét is, a cselekedetek összeegyeztetését, az információk kicserélését stb.

Megtörténhet, hogy a játék folyamán néhány játékos, valamilyen alapon megegyezésre jutva, egységes kollektívaként kezd fellépni, bizonyos közös érdekeket védve. Az ilyenfajta játékoscsoportot a játékelméletben kooperációnak szokás nevezni, azokat a játékokat pedig, amelyeknek a feltételei megengedik kooperációk kialakítását — kooperatív játékoknak. Annak ellenére, hogy már NEUMANN és MORGENSTERN fentemlített könyvében a kooperatív játékoknak jutott a monográfia terjedelmének körülbelül kétharmad része, a kooperatív játékokra kapott eredmények még nem tekinthetők egységes elméletnek, szemben a nemkooperatív játékok esetével, vagyis az olyan játékokéval, amelyekben a játékosok kooperációkban való egyesülését a játékszabályok nem engedik meg.

A játékosok egyesülésének a kooperációnál gyengébb formája a koalíció. A játékosok egy csoportjáról akkor mondjuk, hogy koalícióban egyesült, ha az illető játékosok megőrizve saját egyéni érdekeiket, azok megvalósítására valamilyen közös, összeegyeztetett cselekvési módot választanak. Azokat a nemkooperatív játékokat, amelyekben a koalíció-alkotás lehetősége fennáll, koalíciós játékoknak nevezzük. Azokat a játékokat, amelyeknél egyik játékos sem számíthat a játék folyamán támogatásra más játékosok részéről céljai elérésére, koalíciómenteseknek mondjuk.

A jelen cikk a véges, koalíciómentes játékok elméletének alapvető eredményeit tekinti át, vagyis az olyan koalíciómentes játékokénak, amelyeknél minden egyes játékos véges számú cselekvési móddal („stratégiával") rendelkezik. A szerző azért szorítkozott a véges játékok vizsgálatára, mert éppen ezeknek a példáján különösen szemléletesen mutatható be a sajátosan játékelméleti problémák felállítása, megoldásuk módszereit pedig nem bonyolítja a funkcionálanalízis és az integrálegyenletek elméletének terjedelmes apparátusa.

A végtelen, koalíciómentes játékok és a koalíciós játékok elméletét a szerző más cikkekben szándékszik kifejteni.

1. §. Egyensúlyi helyzetek

1. A normálalakú játék definíciója. Legyen I véges halmaz, amelynek az elemeit *játékosoknak* nevezzük. Minthogy I elemeinek a jelölése számunkra közömbös, fel fogjuk tenni, hogy $I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Feleltessünk meg mindegyik $i \in I$ elemnek egy S_i halmazt és nevezzük ennek az elemeit az i játékos *stratégiáinak*. A $S = \bigtimes_{i=1}^{n} S_i$ Descartes-szorzat elemeit, vagyis az összes n tagból álló $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ alakú sorozatokat, ahol $s_i \in S_i$ $(i \in I)$, *helyzeteknek* nevezzük.

Végül legyen a $I \times S$ halmazon értelmezve egy valós értékű, *nyereségfüggvénynek* nevezett $H(i, s)$ függvény. Hogy e függvény első és második változójának különböző természetét kidomborítsák, rendszerint a $H_i(s)$ írásmódot használják és a S halmazon értelmezett függvényrendszernek tekintik, amelyen belül minden egyes játékosnak megfelel a maga nyereségfüggvénye. A $H_i(s)$ számot az i játékos *nyereségének* nevezzük az s helyzetben. A

$$\Gamma = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} \rangle \tag{1.1}$$

rendezett hármast *normálalakú játéknak* nevezzük.

A játékosok rendelkezésére álló stratégiák halmazainak a játékelméletben nagy jelentőségük van. Tanulmányozás szempontjából legegyszerűbb az az eset, amikor az összes S_i halmazok végesek. Ebben az esetben magát a Γ játékot *végesnek* nevezzük.

A normálalakú játék tartalma abban áll, hogy mindegyik játékos, kiválasztva a maga stratégiáját, részt vesz a helyzet létrehozásában, amikor pedig a helyzet létrejött, ettől a helyzettől függően bizonyos nyereséget kap.

A játék folyamatát úgy képzelhetjük el, hogy a játékosok egymástól függetlenül rögzítik stratégiájukat. Miután a stratégiákat rögzítették és ezáltal a helyzetet meghatározták, a helyzet megvalósul, és valamilyen forrásból minden játékos megkapja az adott helyzetben neki járó nyereséget.

Ha ilyen forrás nincs, akkor mindegyik játékos a többiek számlájára kapja meg nyereségét. Ahhoz, hogy ez mindig lehetséges legyen, nyilván szükséges és elégséges, hogy minden s helyzetben

$$\sum_{i \in I} H_i(s) = 0$$

legyen.

Azokat a játékokat, amelyeknél ez a feltétel teljesül, zérus összegű játékoknak, vagy másképpen *nullajátékoknak* nevezzük.

A zérus összeg feltétele különösen egyszerű alakot ölt kétszemélyes játékok esetében:

$$H_1(s) + H_2(s) = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy az ilyen típusú játékoknál a $H_1(s)$ számot nemcsak az 1 játékos s helyzetbeli nyereségének tekinthetjük, hanem a 2 játékos ugyanezen helyzetbeli veszteségének is.

A kétszemélyes nullajátékok nyilván olyan jelenségek modelljei, amelyeknél a jelenségben résztvevő két fél érdekei ellentétesek és kizárják bármiféle kompromisszum lehetőségét. A kétszemélyes nullajátékok elmélete az általános játékelmélet egyik legfontosabb és legjobban kidolgozott része.

Az összes elmondottakkal kapcsolatban az az eset, amikor a játékosok halmaza egyetlen elemből áll, a játékelmélet szempontjából érdektelen, minthogy akkor ez az egyetlen játékos teljesen meghatározza az egész helyzetet és azt úgy választhatja meg, hogy a nyereségfüggvénynek a maga számára legelőnyösebb értékét biztosítsa. Ezért a továbbiakban feltesszük, hogy I legalább két játékosból áll.

Ugyanígy feltehetjük, hogy minden játékos legalább két stratégiával rendelkezik, minthogy az a játékos, akinek csak egy stratégia áll rendelkezésére, lényegében sehogyan sem tud befolyást gyakorolni a helyzet kialakulására, és passzív szemlélője marad a játéknak, ha érdekelt is annak kimenetelében. Ilyenkor a többi játékosok tevékenysége attól függetlenül valósul meg, részt vesz-e az adott játékos a játékban vagy sem. Ezért anélkül, hogy minden egyes alkalommal külön kikötnénk, fel fogjuk tenni, hogy mindegyik játékosnak egynél több stratégiája van.

2. Egyensúlyi helyzetek. Természetes dolog feltételezni, hogy mindegyik játékos célja saját nyereségfüggvénye maximális értékének az elérése. Minthogy azonban a játékos nyeresége függ a helyzettől, és maga a játékos a helyzet kialakulására csak részben tud befolyást gyakorolni, azért az a probléma, hogy a játékos miképpen tudja célját megvalósítani, nem triviális.

Foglalkozzunk részletesebben ezzel a kérdéssel.

Legyen

$$i \in I, \quad s_i^* \in S_i, \quad s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S.$$

Jelölje $s\|s_i^*$ azt a helyzetet, amelyet úgy kapunk s-ből, hogy benne az i játékos s_i stratégiáját ugyanennek a játékosnak az s_i^* stratégiájával helyettesítjük.

Az s helyzetet az i játékos számára *kedvezőnek* mondjuk, ha bármely $s_i^* \in S_i$ stratégiára

$$H_i(s) \geqq H_i(s\|s_i^*).$$

Ezt az elnevezést az indokolja, hogy bármelyik az i játékos számára nem kedvező helyzetben ez a játékos, kellőképpen megváltoztatva stratégiáját, megnövelheti nyereségét (feltéve természetesen, hogy a többi játékosok megtartják stratégiájukat).

Az olyan helyzetet, amely mindegyik játékos számára kedvező, a játék *egyensúlyi helyzetének* nevezzük. A Γ játék összes egyensúlyi helyzeteinek a halmazát $\mathfrak{S}_\Gamma$-val jelöljük. Az i játékos s_i stratégiáját e játékos *egyensúlyi stratégiájának* nevezzük, ha létezik s_i-t tartalmazó egyensúlyi helyzet.

Ha a játék folyamatát úgy fogjuk fel, hogy a játékosok előzetes megállapodás alapján választják meg stratégiájukat, akkor éppen az egyensúlyi helyzetekben és csak ezekben lesz kénytelen mindegyik játékos arra, hogy teljesítse kötelezettségeit. Ha a játékosok az egyezményben valamilyen nemegyensúlyi s helyzet rögzítését kísérlik meg, az arra vezet, hogy legalább egy játékos saját nyereségének a növelése céljából teljesen büntetlenül megszegheti a magára vállalt kötelezettségeket. Így tehát az s helyzet nem fog megvalósulni.

Az egyensúlyi helyzet fogalma a játékelmélet központi fogalma, és a modern játékelmélet lényegében a játékok egyensúlyi helyzeteinek az elmélete. A játékelméleti munkák túlnyomó többségét éppen az egyensúlyi helyzetekkel, létezésükkel, értelmezésükkel, megtalálásuk módjaival stb. kapcsolatos kérdéseknek szentelték. Alapjában véve ez a körülmény fog visszatükröződni a jelen ismertetésben is.

Kétszemélyes $\langle\{1, 2\}, \{S_1, S_2\}, \{H_1, H_2\}\rangle$ játéknál az $s = (s_1, s_2)$ helyzet egyensúlyi voltának feltételei a

$$(1.2) \qquad \begin{cases} H_1(s_1, s_2) \geqq H_1(s_1^*, s_2) & (s_1^* \in S_1), \\ H_2(s_1, s_2) \geqq H_2(s_1, s_2^*) & (s_2^* \in S_2) \end{cases}$$

alakot öltik. Ha ezenkívül a játék zérus összegű, vagyis tetszés szerinti s helyzetre

$$H_2(s) = -H_1(s),$$

akkor az (1. 2) feltételeket át lehet írni a következőképpen:

$$H_1(s_1, s_2^*) \geqq H_1(s_1, s_2) \geqq H_1(s_1^*, s_2). \tag{1.3}$$

Ezért kétszemélyes nullajátékoknál az egyensúlyi helyzetek létezésének kritériumát a következő elemi tétel adja meg.

1. TÉTEL. *Ahhoz, hogy a*

$$\Gamma = \langle\{1, 2\}, \{S_1, S_2\}, \{H, -H\}\rangle$$

játéknak legyen egyensúlyi helyzete, szükséges és elégséges, hogy a

$$\min_{s_2} \sup_{s_1} H(s_1, s_2) \quad \textit{és} \quad \max_{s_1} \inf_{s_2} H(s_1, s_2) \tag{1.4}$$

kifejezések létezzenek és egymással egyenlők legyenek.

BIZONYÍTÁS. *Szükségesség.* Legyen $(s_1^*, s_2^*) \in \mathfrak{S}_\Gamma$. Ez azt jelenti, hogy fennáll (1. 3). Innen következik, hogy

$$H(s_1^*, s_2^*) = \sup_{s_1} H(s_1, s_2^*), \tag{1.5}$$

$$H(s_1^*, s_2^*) = \inf_{s_2} H(s_1^*, s_2), \tag{1.6}$$

azaz

$$\sup_{s_1} H(s_1, s_2^*) = \inf_{s_2} H(s_1^*, s_2).$$

Minthogy a baloldalon s_2 egy függvényének, a jobboldalon pedig s_1 egy függvényének az értéke áll, azért

$$\inf_{s_2} \sup_{s_1} H(s_1, s_2) \leqq H(s_1^*, s_2^*) \leqq \sup_{s_1} \inf_{s_2} H(s_1, s_2),$$

minthogy pedig az ismert minimax-egyenlőtlenség alapján a jobboldal nem haladja meg a baloldalt, fennáll

$$\inf_{s_2} \sup_{s_1} H(s_1, s_2) = H(s_1^*, s_2^*) = \sup_{s_1} \inf_{s_2} H(s_1, s_2).$$

Összehasonlítva ezt az (1. 5) összefüggéssel kapjuk, hogy

$$\sup_{s_1} H(s_1, s_2^*) = \inf_{s_2} \sup_{s_1} H(s_1, s_2),$$

tehát a jobboldalon álló infimum eléretik és ezért helyette minimumot írhatunk. Így

$$H(s_1^*, s_2^*) = \min_{s_2} \sup_{s_1} H(s_1, s_2).$$

Analóg módon belátható, hogy

$$H(s_1^*, s_2^*) = \max_{s_1} \inf_{s_2} H(s_1, s_2),$$

és ezzel a szükségességet bebizonyítottuk.

Elégségesség. Legyen

$$\min_{s_2} \sup_{s_1} H(s_1, s_2) = \max_{s_1} \inf_{s_2} H(s_1, s_2).$$

Tegyük fel, hogy a baloldalon álló minimum $s_2 = s_2^*$ esetén, a jobboldalon álló maximum pedig $s_1 = s_1^*$ esetén valósul meg. Akkor

$$\sup_{s_1} H(s_1, s_2^*) = \inf_{s_2} H(s_1^*, s_2). \tag{1.7}$$

Továbbá nyilvánvaló, hogy

$$\sup_{s_1} H(s_1, s_2^*) \geqq H(s_1^*, s_2^*) \geqq \inf_{s_2} H(s_1^*, s_2),$$

ebből pedig (1. 7)-re való tekintettel következik (1. 5) és (1. 6), tehát (1. 3) is.

Az (1. 4) minimax-egyenlőségnek, mint a kétszemélyes nullajáték egyensúlyossága feltételének a következő szemléletes értelmezés adható. Tegyük fel, hogy a játékosok nem egyidejűleg és nem egymástól függetlenül választják meg stratégiájukat, hanem sorban, egymás után, és közben az a játékos, aki már megválasztotta stratégiáját, tájékoztatja arról ellenfelét.

Ilyenkor ha az első játékos választja meg először a maga s_1^* stratégiáját, akkor a második, erről tudva, a saját s_2^* stratégiáját úgy fogja megválasztani, hogy vesztesége közel legyen az $\inf\limits_{s_2} H(s_1^*, s_2)$ értékhez. Következésképpen az első játékosnak, aki előre látja ellenfelének ezt a magatartását, úgy kell megválasztania a maga s_1^* stratégiáját, hogy nyeresége maximális értéket vegyen fel:

$$\inf_{s_2} H(s_1^*, s_2) = \max_{s_1} \inf_{s_2} H(s_1, s_2).$$

Ilymódon ennek az egyenlőségnek a jobboldala az a legnagyobb nyereség, amit az első játékos magának biztosítani tud.

Ha, fordítva, először a második játékos választja meg a maga s_2^* stratégiáját, akkor felcserélve a játékosok szerepét azt kapjuk, hogy a második játékos maximális garantált nyeresége

$$\max_{s_2} \inf_{s_1} (-H(s_1, s_2)) = -\min_{s_2} \sup_{s_1} H(s_1, s_2)$$

lesz. Más szóval e feltételek mellett a második játékosnak módjában áll nem megengedni, hogy az első játékos nagyobb nyereségre tegyen szert, mint $\min\limits_{s_2} \sup\limits_{s_1} H(s_1, s_2)$.

Ezek szerint ha mindkét játékos „okosan" játszik, akkor az elsőnek a nyeresége az (1. 4) minimax értékek közé kell hogy essék. A minimaxok egyenlősége esetén pedig az első játékos nyeresége (és ezzel együtt a másodiknak a vesztesége) teljesen meghatározott szám, melyet a *Γ játék értékének* nevezünk és v_Γ-val jelölünk. Ebben az esetben egyik játékosnak sincs oka, hogy titkolja a stratégia megválasztására vonatkozó szándékát: semmiféle ilyen tájékoztatás nem fogja arra ösztönözni az ellenfelet, hogy valamiképpen megváltoztassa terveit. Az a tény, hogy az egyensúlyi helyzetekkel rendelkező kétszemélyes nullajátékoknál a játékosok nyeresége teljesen meghatározott, indokolttá teszi, hogy az ilyen játékokat *teljesen határozottaknak* nevezzük.

Nem nehéz megmutatni, hogy kétszemélyes nullajáték esetében a $\mathfrak{S}_\Gamma$ halmaz téglalap alakú (vagyis az $(s_1, s_2) \in \mathfrak{S}_\Gamma$, $(s_1', s_2') \in \mathfrak{S}_\Gamma$ relációkból következik, hogy $(s_1, s_2') \in \mathfrak{S}_\Gamma$), továbbá azt, hogy ilyen játéknál a $\mathfrak{S}_\Gamma$ halmazon mindegyik játékos nyeresége állandó. Sem az előbbi, sem az utóbbi körülmény nem áll fenn általánosságban sem kettőnél több személyes játékoknál (még akkor sem, ha ezek a játékok zérus összegűek), sem a nem zérus összegű játékoknál (még két játékos esetén sem).

A $\mathfrak{S}_\Gamma$ halmaz téglalap alakú volta a kétszemélyes nullajátékoknál azt jelenti, hogy az első játékos a saját egyensúlyi stratégiáját játszva v_Γ nyereséget biztosít magának függetlenül az ellenfél tevékenységétől. Egyensúlyi stratégiáit ezért *optimálisaknak* szokás nevezni. Hasonló okok miatt optimálisaknak nevezik az ilyen játékoknál a második játékos egyensúlyi stratégiáit is. Az első, illetve a második játékos Γ játékbeli optimális stratégiáinak a halmazát $T_1(\Gamma)$-val, illetve $T_2(\Gamma)$-val jelöljük.

Végül tegyünk egy triviális, de gyakran nagyon hasznos megjegyzést. Legyen

$$\Gamma = \langle I, \{S_i\}_{i\in I}, \{H_i\}_{i\in I}\rangle$$

tetszés szerinti játék és

$$\Gamma_\alpha = \langle I, \{S_i\}_{i\in I}, \{H_i + \alpha\}_{i\in I}\rangle.$$

Akkor

$$\mathfrak{S}_\Gamma = \mathfrak{S}_{\Gamma_\alpha}.$$

3. A játékok bővitése. Távolról se minden játéknak vannak egyensúlyi helyzetei, még a véges játékok között sem. Elég tekinteni azt a kétszemélyes játékot, amelynél

$$(1.8)\quad S_1 = \{1, 2\},\ S_2 = \{1, 2\},\ H(1, 1) = H(2, 2) = 1,\ H(2, 1) = H(1, 2) = -1.$$

Nyilvánvaló, hogy erre a játékra

$$\min_{s_2} \max_{s_1} H(s_1, s_2) = 1,$$

$$\max_{s_1} \min_{s_2} H(s_1, s_2) = -1,$$

úgyhogy az 1. tétel értelmében ennek a játéknak nincsenek egyensúlyi helyzetei.

A fenti játék egyúttal bizonyos igen gyakran fellépő jelenségek modelljéül is szolgál.

Katonai, gazdasági vagy egyszerűen mindennapi kérdések megoldásánál nagyon gyakran adódik olyan helyzet, amikor egy személy (vagy kollektíva) két cselekvési mód közül választhat, a körülmények pedig, amelyek között ez a cselekvés meg fog valósulni, szintén kétfélék lehetnek: vagy az első cselekvési módra nézve kedvezőek és a másodikra nézve kedvezőtlenek, vagy fordítva. (N. WIENER helyesen jegyzi meg: „... a fegyver hatásossága függ attól, hogy milyen másik fegyver létezik, amely képes neki ellenállni...")[1]. Ha még azt is feltesszük, hogy ezek a körülmények egy másik személy (kollektíva) ellenőrzése alatt állnak, amelyiknek ellentétes érdekei vannak, akkor olyan viszonyokkal van dolgunk, amelyek közel vannak az (1.8) alatt felírt játékhoz. Pontosan ilyen a „fej vagy írás" játék említett változata is.

Világos, hogy minden eléggé teljes játékelméletnek tartalmaznia kell a játékosok viselkedésmódjára vonatkozó útmutatásokat mind az (1.8) játék, mind más hasonló játékok esetében.

E célból vezessük be a *játék bővítésének* a fogalmát. Legyen

$$\Gamma_1 = \langle I, \{S_i^{(1)}\}, \{H_i^{(1)}\}\rangle, \qquad \Gamma_2 = \langle I, \{S_i^{(2)}\}, \{H_i^{(2)}\}\rangle$$

két játék. Ha itt tetszés szerinti $i \in I$ indexre

$$S_i^{(1)} \subset S_i^{(2)}, \tag{1.9}$$

tehát $S^{(1)} \subset S^{(2)}$, és $s \in S^{(1)}$ esetén

$$H_i^{(1)}(s) = H_i^{(2)}(s) \tag{1.10}$$

minden $i \in I$ mellett, akkor a Γ_2 játékot a Γ_1 játék *bővítésének* nevezzük.

Ha a Γ játéknak nincsenek egyensúlyi helyzetei, akkor lehet foglalkozni e játék olyan $\overline{\Gamma}$ bővítésének a keresésével, amelynek már vannak egyensúlyi helyzetei. $\overline{\Gamma}$ stratégiáit valamiféle értelemben a Γ játék általánosított stratégiáinak lehet tekinteni, $\overline{\Gamma}$ egyensúlyi helyzeteit pedig Γ egyensúlyi helyzeteinek ezek mellett az általánosított stratégiák mellett. Ahhoz, hogy a kérdés ilyen módon való megközelítése jogosult legyen, magától értetődően szükséges, hogy a $\overline{\Gamma}$ játék stratégiáinak legyen valamilyen természetes értelmezésük az eredeti Γ játék keretein belül.

Ilyen természetes játék-bővítéseket különböző módokon lehet alkotni. A jelen cikkben csak a leghasználatosabbat érintjük közülük.

Legyen

$$\Gamma = \langle I, \{S_i\}_{i\in I}, \{H_i\}_{i\in I}\rangle$$

valamilyen játék. Rendeljünk hozzá minden $i \in I$ indexhez egy S_i^* halmazt, amely S_i-n értelmezett valószínűségi mértékekből áll, tartalmazza az összes

[1] N. WIENER: Cybernetics, New York, 1948.

elfajult mértékeket (azt az elfajult mértéket, amely az $s_i \in S_i$ elemhez az 1 valószínűséget rendeli, azonosítani fogjuk ezzel az elemmel) és konvex, vagyis bármely két s_i', s_i'' mértékkel együtt tartalmazza az összes $\lambda s_i' + (1-\lambda) s_i''$ alakú mértékeket, ahol $\lambda \in [0, 1]$.

A S_i^*-hoz tartozó valószínűségi mértékeket az i játékos Γ játékbeli *kevert stratégiáinak* nevezzük. A $S^* = \bigtimes_{i \in I} S_i^*$ szorzat elemeit Γ *kevert stratégiás helyzeteinek* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a Γ játék minden egyes $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ kevert stratégiás helyzetét tekinthetjük olyan S-en értelmezett valószínűségi mértéknek, amely a S_i halmazokon értelmezett s_i^* valószínűségi mértékek szorzata.

A S_i-n értelmezett elfajult mértékeket a halmaz megfelelő elemeivel azonosítva biztosítjuk (1. 9) teljesülését.

Legyenek értelmezve a S^* halmazon olyan H_i^* valós értékű függvények, amelyekre

$$H_i^*(s) = H_i(s) \qquad (i \in I,\ s \in S).$$

Speciálisan, ha a S_i^* $(i \in I)$ halmazok olyanok, hogy a H_i függvények bármely $s^* \in S^*$ mértékre vonatkozólag mérhetők S-en, akkor lehet

$$H_i^*(s^*) = \int_S H_i(s) s^*(ds).$$

Nyilvánvaló, hogy a H_i^* függvények ilyen értelmezése esetén teljesül az (1. 10) feltétel.

A

$$\Gamma^* = \langle I, \{S_i^*\}, \{H_i^*\} \rangle$$

játékot a Γ játék *kevert bővítésének* nevezzük.

A játék kevert bővítésének a definíciójában általában bizonyos határozatlanság van, ami azzal kapcsolatos, hogy a S_i^* mértékhalmazok különbözőképpen választhatók. A játékelméletben a játékok kevert bővítésének rendszerint valamilyen konkrét változatát használják, és ezt minden egyes esetben külön választják meg.

Jegyezzük meg, hogy véges Γ játék esetén a kevert bővítés definíciója egyértelmű, ugyanis ebben az esetben minden i-re a S_i-n értelmezett összes mértékek halmazát vehetjük csak S_i^*-nak.

A Γ játék kevert bővítését a következőképpen lehet interpretálni. Minden $s_i^* \in S_i^*$ kevert stratégiához álljon az i játékos rendelkezésére egy véletlen konstrukció, amely az s_i elemek véletlen kiválasztását az s_i^* mértéknek megfelelően valósítja meg. Valamelyik konstrukciónak az i játékos által történő kiválasztása éppen egy s_i^* valószínűségi mérték kiválasztását jelenti. Ha minden játékos kiválaszt egy-egy véletlen konstrukciót, akkor végeredményben

S^*-on megvalósul egy s^* valószínűségi mérték. Ilyenkor $H_i(s)$-ből valószínűségi változó lesz, és ennek a várható értékét nyilvánítjuk az i játékos nyereségének az s^* helyzetben.

Kevert stratégiának egy katonai (taktikai) feladatban való tényleges felhasználását ismerteti [13].

Gyakran nagyon hasznosnak bizonyul a következő egyszerű állítás.

2. TÉTEL. *Legyen Γ valamilyen játék. Ahhoz, hogy Γ kevert bővítésének egy s^* helyzete kevert stratégiás egyensúlyi helyzet legyen, szükséges és elégséges, hogy tetszés szerinti i és $s_i \in S_i$ mellett*

$$H_i(s^*) \geqq H_i(s^* \| s_i)$$

legyen.

BIZONYÍTÁS. A szükségesség nyilvánvaló. Az elégségesség viszont abból következik, hogy $\bar{s}_i^* \in S_i^*$ esetén

$$H_i(s^* \| \bar{s}_i^*) = \int_{S_i} H_i(s^* \| s_i) \bar{s}_i^*(ds_i) \leqq \int_{S_i} H_i(s^*) \bar{s}_i^*(ds_i) = H_i(s^*) \int_{S_i} \bar{s}_i^*(ds_i) = H_i(s^*).$$

Jegyezzük még meg, hogy kétszemélyes nullajátéknál az optimális kevert stratégiák halmaza konvex.

Mint a későbbiekből látható lesz, az egyensúlyi helyzettel nem, de kevert stratégiás egyensúlyi helyzettel már rendelkező játékoknak van egy nagyon kiterjedt és fontos osztálya. Ezért a játékelméletben a kevert stratégia fogalma olyan nagy jelentőségre tesz szert, hogy az irodalomban a játékos stratégiáján rendszerint éppen valamilyen kevert stratégiát értenek, magukat a játékos stratégiáit pedig *tiszta stratégiáknak* nevezik. Hasonlóképpen a játékbeli helyzetet tiszta stratégiás helyzetnek nevezik, a kevert stratégiás helyzetet pedig helyzetnek. A további tárgyalás során mi is ezt a szokást fogjuk követni.

4. Véges játékok. Nash tétele. Legyen

$$\Gamma = \langle I, \{S_i\}, \{H_i\} \rangle$$

véges játék és

$$S_i = \{s_{i1}, \ldots, s_{i,m_i}\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Természetes dolog egy tetszés szerinti s_i^* (kevert) stratégiát olyan

$$(s_i^*(s_{i1}), \ldots, s_i^*(s_{i,m_i}))$$

vektornak tekinteni, amelynek a komponensei az egyes tiszta stratégiáknak az s_i^* stratégia során fellépő valószínűségei. Akkor a S_i^* halmazt olyan szimplexként lehet interpretálni, amelyet egy m_i dimenziós tér koordináta-egységvektorainak a végpontjai határoznak meg. Az $s_i^*(s_{ij})$ valószínűségek e szimplex s_i^* pontjának a baricentrikus koordinátái, a szimplex csúcsai pedig a játékos tiszta stratégiái.

Akkor a S^* halmaz szimplexek direkt szorzata és így homeomorf egy az $m_1+m_2+\cdots+m_n$ dimenziós euklidesi térben fekvő szimplexszel.

Ha $s^*=(s_1^*, \ldots, s_n^*)$, akkor $s^*(s_{ij})$-n a továbbiakban $s_i^*(s_{ij})$ értendő.

A kevert stratégiás egyensúlyi helyzetek létezésének a kérdését véges játékokra NASH oldotta meg teljesen a következő tétel bebizonyításával.

3. TÉTEL. *Minden véges játéknak vannak egyensúlyi helyzetei.*

BIZONYÍTÁS. Legyen

$$\Gamma=\langle I, \{S_i\}, \{H_i\}\rangle$$

véges játék és

$$S_i=\{s_{i1}, \ldots, s_{i,m_i}\} \qquad (i=1, \ldots, n).$$

Tetszés szerinti $s^* \in S^*$, $i \in I$ és $1 \leqq j \leqq m_i$ esetén vezessük be a

$$\varphi_{ij}(s^*)=\max \{0, H_i(s^* \| s_{ij})-H_i(s^*)\}$$

jelölést. Legyen továbbá

$$\bar{s}_i^*(s_{ij})=\frac{s^*(s_{ij})+\varphi_{ij}(s^*)}{1+\sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{ik}(s^*)}. \tag{1.11}$$

Könnyű ellenőrizni, hogy $\bar{s}_i^*$ valószínűségi mérték a S_i halmazon, vagyis $\bar{s}_i^* \in S_i^*$. Akkor az $(\bar{s}_1^*, \ldots, \bar{s}_n^*)$ sorozat, amelyet $\bar{s}^*$-sal jelölünk, hozzátartozik S^*-hoz.

Nyilvánvaló, hogy az (1.11) összefüggések minden $s^* \in S^*$ elemnek egyértelműen megfeleltetnek egy $\bar{s}^* \in S^*$ elemet, vagyis a S^* halmaz egy önmagába való leképezését valósítják meg. Abban a topológiában, amelyet S^*-on a beágyazó euklidesi tér topológiája indukál, a tekintett leképezés folytonos. Minthogy ugyanebben a topológiában S^* homeomorf egy szimplexszel, BROUWER tétele alapján (lásd pl. [15]-öt) leképezésünknek van fixpontja, azaz létezik olyan $s_0^* \in S^*$ helyzet, hogy

$$s_{0i}^*(s_{ij})=\frac{s_{0i}^*(s_{ij})+\varphi_{ij}(s_0^*)}{1+\sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{ik}(s_0^*)}. \tag{1.12}$$

Most tegyük fel, hogy létezik olyan $i \in I$, hogy minden az $s_0^*(s_{ij})>0$ egyenlőtlenséget kielégítő $j=1, \ldots, m_i$ indexre

$$\varphi_{ij}(s_0^*)>0.$$

Az utóbbi azt jelenti, hogy

$$H_i(s_0^* \| s_{ij})>H_i(s_0^*).$$

De akkor az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozva $s_0^*(s_{ij})$-vel és összegezve mindazon j indexekre, amelyekre $s_0^*(s_{ij}) > 0$, kapjuk:

$$\sum_{s_0^*(s_{ij})>0} H_i(s^*\|s_{ij})\, s_0^*(s_{ij}) > H_i(s_0^*). \tag{1. 13}$$

Nyilvánvaló azonban, hogy itt a baloldalon szintén $H_i(s_0^*)$ áll, úgyhogy az (1. 13) egyenlőtlenség nem teljesülhet.

Következésképpen minden $i \in I$ indexhez található olyan j, hogy $s_0^*(s_{ij}) > 0$ és $\varphi_{ij}(s_0^*) = 0$. Ilyen j-re (1. 12) helyett nyilván írható

$$s_{0i}^*(s_{ij}) = \frac{s_{0i}^*(s_{ij})}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{ik}(s_0^*)}.$$

Minthogy itt a baloldal j választása folytán zérustól különböző, azért nyilván

$$\sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{ik}(s_0^*) = 0,$$

vagyis, tekintettel arra, hogy az utóbbi összeg tagjai nem negatívok,

$$\varphi_{ij}(s_0^*) = 0$$

minden i-re és $j = 1, \ldots, m_i$-re. De ez azt jelenti, hogy

$$H_i(s^*) \geqq H_i(s^*\|s_{ij})$$

minden i-re és $j = 1, \ldots, m_i$-re, vagyis $s^* \in \mathfrak{S}_\Gamma$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Említsük meg ennek a tételnek egy hasznos következményét.

Legyen Γ kétszemélyes nullajáték. NASH tétele szerint Γ-nak van (s_1^*, s_2^*) egyensúlyi helyzete. Ezt a Γ^* kevert bővítés tiszta stratégiás egyensúlyi helyzetének tekintve és felhasználva az 1. tételt, a

$$\max_{s_1 \in S_1^*} \min_{s_2 \in S_2^*} H(s_1, s_2) = \min_{s_2 \in S_2^*} \max_{s_1 \in S_1^*} H(s_1, s_2)$$

minimaxok létezésére és egyenlőségére következtethetünk. NASH tétele a véges játékoknál elvben megoldja ugyan az egyensúlyi helyzetek létezésének kérdését, e helyzetek megtalálásának módjára nézve azonban nem tartalmaz semmiféle konstruktív utasítást. Az egyensúlyi helyzetek gyakorlati megkeresésének a feladatát mindeddig a játékoknak csak néhány nagyon szűk osztályára oldották meg.

Jegyezzük meg, hogy azok az erőfeszítések, amelyek célja az egyensúlyi helyzetek tényleges meghatározási módjainak a felkutatása, kétirányúak lehetnek.

Először fel lehet tenni a kérdést úgy, hogy határozzuk meg az adott játék összes egyensúlyi helyzeteit. Ez a feladat azért fontos, mert egy játékosnak különböző egyensúlyi helyzetekben általában különböző nyereségei lehetnek. Ezért az összes egyensúlyi helyzetek kellően áttekinthető felsorolása ad csak lehetőséget annak a helyzetnek a kiválasztására, amely a legnagyobb mértékben felel meg a játékosok érdekeinek. A megjelent ilyen irányú munkák [16] azonban azt mutatják, hogy már a kétszemélyes véges nullajátékok legegyszerűbb esetében is az összes egyensúlyi helyzetek felsorolása igen fárasztó számításokkal jár, és ezeknek a terjedelme a játékosok stratégiái számának a növelése esetén nagyon gyorsan növekszik. Még nagyobbak a számítási nehézségek azoknak a kétszemélyes véges játékoknak a vizsgálatánál, amelyek nem zérus összegűek [17].

Ezzel kapcsolatban figyelemre méltóak a próbálkozások, hogy a kutatásnak azon a másik útján haladjanak, amely a játék legalább egy egyensúlyi helyzetének a megtalálásával függ össze. A feladatnak ezt a — nyilván távolról sem teljes — megoldását egyrészt egyszerűbben lehet megkapni, másrészt pedig a játékok néhány osztályánál (pl. a kétszemélyes nullajátékoknál) a gyakorlati célok többsége szempontjából már ez is elegendő.

Néhány eredményt, amelyet kétszemélyes nullajátékokra akár az első, akár a második irányban kaptak, a 2. §-ban fogunk ismertetni.

2. §. Mátrix-játékok

1. Definíció. A kétszemélyes véges nullajátékokat gyakran *mátrix-játékoknak* nevezik. Ezt az elnevezést az teszi indokolttá, hogy az ilyenfajta játékokat a következőképpen lehet interpretálni.

Legyen

$$A = \|a_{ij}\|_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

valamilyen mátrix és

$$\Gamma_A = \langle \{1,2\}, \{S_1, S_2\}, \{H, -H\} \rangle, \tag{2. 1}$$

ahol

$$S_1 = \{1, \dots, m\}, \tag{2. 2}$$

$$S_2 = \{1, \dots, n\}, \tag{2. 3}$$

$$H(i,j) = a_{ij}. \tag{2. 4}$$

Világos, hogy akkor a játék folyamata felfogható úgy, hogy egyidőben és egymástól függetlenül az 1 játékos kiválasztja valamelyik (i-edik) sort, a 2 játékos pedig valamelyik (j-edik) oszlopot a A mátrixból. Az e választások eredményeként adódó (i, j) helyzetben az 1 játékos a_{ij} nyereséget kap (a 2 játékos pedig ugyanennyit veszít).

Mátrix-játéknál a játékosok kevert stratégiáit, vagyis a játékot leíró mátrix sorai, ill. oszlopai halmazán értelmezett mértékeket nyilván m-dimenziós, illetve n-dimenziós

$$X=(x_1,\ldots,x_m),\quad Y=(y_1,\ldots,y_n)$$

vektoroknak lehet tekinteni, ahol

$$x_i\geqq 0,\quad y_j\geqq 0,\quad \sum_{i=1}^{m}x_i=\sum_{j=1}^{n}y_j=1.$$

Jelöljük az 1 játékos összes kevert stratégiáinak a halmazát S_m-mel, a 2 játékos összes kevert stratégiáiét pedig S_n-nel. Akkor az 1 játékos nyeresége a (X, Y) kevert stratégiás helyzetben

$$\sum_{i,j}a_{ij}x_iy_j=XAY^T,$$

ahol a ^{T} jel most és a továbbiakban is a mátrix- vagy vektortranszponálás műveletét jelenti.

A 2. tétel értelmében ahhoz, hogy

$$(X, Y)\in\mathfrak{S}_{\Gamma_A}$$

legyen, szükséges és elégséges

$$XA_{\cdot j}\geqq XAY^T\geqq A_{i\cdot}Y^T\qquad (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$$

fennállása, ahol $A_{i\cdot}$ és $A_{\cdot j}$ most és a továbbiakban a A mátrix i-edik sorát, illetve j-edik oszlopát jelenti.

A következő állítás majdnem triviális.

4. TÉTEL. *Ha Γ egy $(m\times n)$-es A mátrixszal jellemezhető játék, akkor a $T_1(\Gamma)$ és $T_2(\Gamma)$ halmazok m-dimenziós, ill. n-dimenziós vektorokból álló nemüres, zárt, konvex és korlátos halmazok.*

2. A mátrix-játék értékének és a játékosok optimális stratégiáinak a meghatározása. Legyen R az n-dimenziós vektortér egy konvex részhalmaza. *R szélső pontjának* az olyan $r\in R$ pontot nevezzük, amely nem állítható elő $\frac{1}{2}(r_1+r_2)$ alakban, ahol $r_1, r_2\in R$ és $r_1\neq r_2$. R összes szélső pontjainak a halmazát $K(R)$-rel jelöljük. Ismeretes (lásd pl. [18]-at), hogy ha egy zárt, konvex, korlátos R halmaznak csak véges számú szélső pontja van, akkor R egybeesik a $K(R)$ halmaz konvex burkával.

A $K(T_1(\Gamma))$-beli és $K(T_2(\Gamma))$-beli összes stratégiák megtalálásának a módját SHAPLEY és SNOW [16] mutatta meg. Kiderült, hogy ezek a halmazok bármelyik mátrix-játéknál végesek. Következésképpen a $T_1(\Gamma)$ és $T_2(\Gamma)$ halmaz meghatározásának a feladata visszavezethető $K(T_1(\Gamma))$ és $K(T_2(\Gamma))$ meghatározásának a feladatára. Foglalkozzunk ezzel az utóbbi feladattal.

Az 1. § 2. pontja végén tett megjegyzés alapján az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $v_\Gamma \neq 0$.

A továbbiakban ha $X \in S_m$ (illetve $Y \in S_n$) és B a A mátrix egy minormátrixa, akkor X_B (Y_B) jelöli a X (Y) vektorból a B-ben nem szereplő soroknak (oszlopoknak) megfelelő komponensek elhagyásával nyert vektort.

5. TÉTEL. *Legyen Γ mátrix-játék, Γ mátrixa A,*

$$X = (x_1, \ldots, x_m) \in T_1(\Gamma), \quad Y = (y_1, \ldots, y_n) \in T_2(\Gamma).$$

Akkor ahhoz, hogy fennálljon $X \in K(T_1(\Gamma))$ és $Y \in K(T_2(\Gamma))$, szükséges és elégséges, hogy a A mátrixnak létezzék olyan nemszinguláris B minor-mátrixa, amelyre

$$X_B = \frac{J_r B^{-1}}{J_r B^{-1} J_r^T}, \quad Y_B^T = \frac{B^{-1} J_r^T}{J_r B^{-1} J_r^T}, \tag{2.5}$$

ahol J_r az az r-dimenziós vektor, amelynek minden komponense 1-gyel egyenlő.

BIZONYÍTÁS. *Szükségesség.* Legyen $X \in K(T_1(\Gamma))$, $Y \in K(T_2(\Gamma))$. Konstruáljuk meg a B mátrixot a következőképpen.

Nevezzük a $A_{i\cdot}$ sort elsőosztályúnak, ha $x_i > 0$. Ebben az esetben nyilvánvaló, hogy $A_{i\cdot} Y^T = v_\Gamma$. A $A_{i\cdot}$ sort másodosztályúnak fogjuk nevezni, ha $x_i = 0$ és $A_{i\cdot} Y^T = v_\Gamma$. Az összes többi sort a harmadik osztályba soroljuk. Analóg módon bontjuk fel három osztályra A összes oszlopainak a halmazát, a $A_{\cdot j}$ oszlopot elsőosztályúnak tekintve, ha $y_j > 0$, másodosztályúnak, ha $y_j = 0$, de $XA_{\cdot j} = v_\Gamma$, és harmadosztályúnak, ha $XA_{\cdot j} > v_\Gamma$. A $A_{\cdot j}$ oszlopnak azt a részét (részvektorát), amely az elsőosztályú sorokhoz tartozó elemekből áll, jelöljük $A'_{\cdot j}$-vel.

Tekintsük a A mátrix sorainak egy olyan $\mathfrak{A}$ halmazát, amely tartalmazza az összes elsőosztályú sorokat, nem tartalmaz harmadosztályú sort, a második osztályból pedig csak olyan sorokat tartalmaz, amelyekre a $A'_{i\cdot}$ vektorok nem függnek lineárisan a $A'_{k\cdot}$ alakú vektoroktól ($k \neq i$, $A_{k\cdot} \in \mathfrak{A}$). A maximális ilyen tulajdonságú halmazokat *kitüntetetteknek* fogjuk nevezni. Hasonlóan definiáljuk oszlopok kitüntetett halmazait.

Megmutatjuk, hogy minden olyan B minor-mátrix, amely egy kitüntetett halmazt alkotó összes sorok és egy kitüntetett halmazt alkotó összes oszlopok metszéspontjaiban elhelyezkedő elemekből áll, megfelel a követelményeknek. Meghatározottság kedvéért fel fogjuk tenni, hogy B-nek r sora és s oszlopa van és a A mátrix bal felső sarkában helyezkedik el.

Mindenekelőtt bebizonyítjuk, hogy B sorai lineárisan függetlenek.

Ha ez nem lenne így, akkor léteznék olyan zérustól különböző $G_B = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ vektor, amelyre

$$G_B B_{\cdot j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s). \tag{2.6}$$

A G_B vektort kiegészítve a zérus értékű $\gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_m$ komponensekkel, kapunk egy vektort, amelyet G-vel fogunk jelölni. Világos, hogy

$$GA_{\cdot j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s).$$

Fennáll

$$G_B B Y^T = G_B J_r^T v_\Gamma,$$

másrészt (2.6) alapján

$$G_B B Y^T = 0.$$

Tehát, minthogy $v_\Gamma \neq 0$, $G_B J_r^T = 0$, vagyis G_B komponenseinek az összege (és így G komponenseinek az összege is) zérussal egyenlő.

Legyen továbbá egy másodosztályú sornak megfelelő γ_i komponens zérustól különböző. Akkor a $B_{i\cdot}$ sor lineárisan függ B többi soraitól. Így a $A'_{i\cdot}$ vektor is lineárisan függeni fog a $A'_{k\cdot}$ $(k \leq r, k \neq i)$ alakú vektoroktól, ami ellentmond a kitüntetett halmaz definíciójának.

Tehát G-nek legfeljebb azok a γ_i komponensei különbözhetnek zérustól, amelyekre $x_i > 0$. Ezért megadható olyan $\varepsilon > 0$, hogy $|\alpha| < \varepsilon$ esetén

$$x_i + \alpha\gamma_i \geqq 0$$

minden $i = 1, 2, \ldots, m$ indexre. Képezzük a

$$X_\alpha = X + \alpha G$$

vektort. Nyilvánvaló, hogy X_α komponensei nem negatívok és összegük 1. Következésképpen $X_\alpha \in S_m$. Továbbá

$$X_\alpha A_{\cdot j} = X_{\alpha B} B_{\cdot j} = (X_B + \alpha G_B) B_{\cdot j} = X_B B_{\cdot j} = X'_B A'_{\cdot j}$$

mindazokra a $A_{\cdot j}$ oszlopokra, amelyek B képzésénél fellépnek. Ha a $A_{\cdot j}$ oszlop másodosztályú, de B képzésénél nem lép fel, akkor a megfelelő $A'_{\cdot j}$ vektor lineárisan függ a $B'_{\cdot k}$ vektoroktól. Legyen

$$A'_{\cdot j} = \sum_k \lambda_k B'_{\cdot k}.$$

Itt

$$X' A'_{\cdot j} = X A_{\cdot j} = v_\Gamma,$$

úgyhogy

$$X_\alpha A_{\cdot j} = X'_\alpha A'_{\cdot j} = (X' + \alpha G') A'_{\cdot j} = (X' + \alpha G') \sum_k \lambda_k B'_{\cdot k} =$$

$$= X' A'_{\cdot j} + \alpha G' \sum_k \lambda_k B'_{\cdot k} = v_\Gamma + \alpha \sum_k \lambda_k G' B'_{\cdot k} = v_\Gamma.$$

Végül ha a $A_{\cdot j}$ oszlop harmadosztályú, akkor — minthogy $XA_{\cdot j} > v_\Gamma$ — az α számot abszolút értékben elég kicsinynek választva elérhetjük, hogy

$X_\alpha A_{\cdot j} > v_\Gamma$ is fennálljon. Tehát $X_\alpha A_{\cdot j} \geqq v_\Gamma$ minden $j = 1, 2, \ldots, n$-re, vagyis $X_\alpha \in T_1(\Gamma)$, és hasonlóképpen $X_{-\alpha} \in T_1(\Gamma)$. De akkor $X = \frac{1}{2}(X_\alpha + X_{-\alpha}) \notin$ $\notin K(T_1(\Gamma))$.

A kapott ellentmondás azt mutatja, hogy a B mátrix sorai lineárisan függetlenek. B oszlopainak a lineáris függetlensége analóg módon bizonyítható. Tehát $r = s$, és a B mátrix négyzetalakú és nemszinguláris.

Fennáll

(2. 7) $$X_B B = v_\Gamma J_r.$$

Tehát

$$1 = X_B J_r^T = X_B B B^{-1} J_r^T = v_\Gamma J_r B^{-1} J_r^T,$$

ahonnan

$$v_\Gamma = \frac{1}{J_r B^{-1} J_r^T}$$

és (2. 7) alapján

$$X_B = v_\Gamma J_r B^{-1} = \frac{J_r B^{-1}}{J_r B^{-1} J_r^T}.$$

Y_B meghatározása hasonlóan végezhető. Most már csak azt kell megjegyezni, hogy X és Y csak bizonyos zérus értékű komponensekben tér el X_B-től, ill. Y_B-től. A szükségességet bebizonyítottuk.

Az *elégségesség* indirekt úton minden nehézség nélkül bizonyítható.

A bebizonyított tételből következik, hogy a $K(T_1(\Gamma))$-beli és $K(T_2(\Gamma))$-beli stratégiák száma nem múlhatja felül A nemszinguláris minor-mátrixainak a számát és így véges. Képezve minden ilyen minor-mátrixhoz a (2. 5) alakú kifejezéseket és kiválasztva közülük azokat, amelyek optimális stratégiák, ezzel a $K(T_1(\Gamma))$-t és $K(T_2(\Gamma))$-t alkotó összes stratégiák felsorolását nyerjük.

Ebből a tételből következik még a következő figyelemre méltó tény, amelyet KAPLANSKY fedezett fel e tétel egy speciális esetének a bizonyítása során [19]. Legyen a Γ mátrix-játéknál, amelyhez egy $(m \times n)$-es A mátrix tartozik, a sorok száma kisebb, mint az oszlopoké: $m < n$. Akkor a második játékosnak van olyan optimális stratégiája, amely legfeljebb m számú tiszta stratégia keveréke. Valóban, a $K[T_2(\Gamma_A)]$ halmazhoz tartozó bármelyik Y stratégia ilyen lesz, mert található hozzá olyan négyzetalakú B minor-mátrix, hogy a Y vektornak azok a komponensei, amelyek A olyan oszlopainak felelnek meg, amelyek B megalkotásánál nem szerepelnek, zérussal egyenlők. Tehát Y zérustól különböző komponenseinek a száma nem lehet nagyobb, mint A sorainak a száma, vagyis m.

3. Játékok szimmetrizálása. A differenciálegyenletek módszere. Azok a módszerek, amelyek legalább egy egyensúlyi helyzet megtalálására szolgálnak, a mátrix-játékok esetében különösen értékesek. Arról van szó, hogy az ilyen játékoknál az egyensúlyi helyzet többértelműsége viszonylag ritka kivétel. Nevezetesen, az összes $(m \times n)$-es mátrixok halmazát mn-dimenziós R_{mn} euklidesi térnek tekintve, BOHNENBLUST, KARLIN és SHAPLEY megmutatták [20], hogy az összes olyan $(m \times n)$-es A mátrixok halmaza, amelyekre a Γ_A játéknak egyetlen egyensúlyi helyzete van, nyílt és mindenütt sűrű R_{mn}-ben. BROWN és NEUMANN [21] bebizonyította, hogy mátrix-játéknál léteznek optimális stratégiák; bizonyításuk elvileg megvalósítható módszert ad legalább egy ilyen stratégia tényleges meghatározására.

Ez a bizonyítás közvetlenül csak a *szimmetrikus játékokra* alkalmazható, vagyis azokra, amelyeknek a A mátrixa ferdén szimmetrikus: $a_{ij} = -a_{ji}$. Ez azonban nem csökkenti az eredmények általánosságát, mert minden mátrix-játékot szimmetrizálni lehet, azaz a Γ_A mátrix-játékhoz lehet találni olyan Γ_B szimmetrikus mátrix-játékot, amelynek a megoldása alapján a Γ_A játék megoldása könnyen megadható.

Ismertetjük a mátrix-játékok szimmetrizálásának egyik módszerét [21]. A szimmetrizálás másik módszerét lásd [22]-ben.

Először megmutatjuk, hogy tetszés szerinti szimmetrikus Γ_B mátrix-játékra

$$v_{\Gamma_B} = 0, \quad T_1(\Gamma_B) = T_2(\Gamma_B).$$

Valóban, legyen $(X, Y) \in \mathfrak{S}_{\Gamma_B}$. Akkor

$$XB_{.j} \geqq XBY^T \geqq B_{i.}Y^T. \tag{2.8}$$

De B ferde szimmetriája miatt

$$XB_{.j} = -B_{j.}X^T, \quad B_{i.}Y^T = -YB_{.i}, \quad XBY^T = -YBX^T,$$

és így (2. 8)-ból következik, hogy

$$B_{j.}X^T \leqq YBX^T \leqq YB_{.i},$$

vagyis $(Y, X) \in \mathfrak{S}_{\Gamma_B}$. Innen már következik, hogy $T_1(\Gamma_B) = T_2(\Gamma_B)$. Továbbá, a $\mathfrak{S}_{\Gamma_B}$ halmaz téglalap-alakú lévén, $(X, X) \in \mathfrak{S}_{\Gamma_B}$ is fennáll. Így

$$v_{\Gamma_B} = XBX^T = -XBX^T = 0.$$

Legyen

$$\Gamma_A = \langle \{1, 2\}, \{S_1, S_2\}, \{H, -H\} \rangle$$

mátrix-játék, amelynek a nyereségmátrixa tetszés szerinti lehet. Tekintsük a

$$\Gamma_B = \langle \{1, 2\}, \{S_1 \times S_2, S_2 \times S_1\}, \{H', -H'\} \rangle$$

új játékot, ahol

$$H'((i_1, j_2), (i_2, j_1)) = a_{i_1 j_1} - a_{i_2 j_2};$$

ennek a mátrixát jelöljük B-vel. Világos, hogy a Γ_B játék szimmetrikus.

Válasszunk önkényesen egy $X \in T_1(\Gamma_B)$ stratégiát. Akkor $XB_{\cdot(j_2, i_1)} \geqq 0$ minden $(j_2, i_1) \in S_2 \times S_1$ párra, azaz minden j_2-re és i_1-re

$$\sum_{i_2, j_1} x_{(i_2, j_1)}(a_{i_2 j_2} - a_{i_1 j_1}) \geqq 0,$$

vagyis

$$\sum_{i_2, j_1} x_{(i_2, j_1)} a_{i_1 j_1} \leqq \sum_{i_2, j_1} x_{(i_2, j_1)} a_{i_2 j_2},$$

$$\sum_{j_1} \Big(\sum_{i_2} x_{(i_2, j_1)}\Big) a_{i_1 j_1} \leqq \sum_{i_2} \Big(\sum_{j_1} x_{(i_2, j_1)}\Big) a_{i_2 j_2},$$

végül bevezetve a

$$\sum_{i_2} x_{(i_2, j_1)} = \eta_{j_1}, \quad \sum_{j_1} x_{(i_2, j_1)} = \xi_{i_2},$$

$$(\eta_1, \ldots, \eta_m) = \mathrm{H}, \quad (\xi_1, \ldots, \xi_n) = \Xi$$

jelöléseket, kapjuk, hogy

$$A_{i\cdot} \mathrm{H}^T \leqq \Xi A_{\cdot j} \qquad (i, j) \in S_1 \times S_2,$$

tehát

$$(\mathrm{H}, \Xi) \in \mathfrak{S}_{\Gamma_A}.$$

Foglalkozzunk a Γ_B szimmetrikus játék egyensúlyi helyzeteinek a meghatározásával. Rövidség kedvéért használni fogjuk az $(i_1, j_2) = k$, $(j_1, i_2) = l$ és $mn = r$ jelöléseket. Legyen X a második játékos tetszés szerinti stratégiája. Legyen

$$u_k = A_{k\cdot} X^T,$$

$$\varphi(u_k) = \max\{0, u_k\},$$

$$\Phi(X) = \sum_{k=1}^{r} \varphi(u_k),$$

$$\Psi(X) = \sum_{k=1}^{r} \varphi^2(u_k),$$

és tekintsük a

$$\frac{dx_k}{dt} = \varphi(u_k) - \Phi(X) x_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, r) \tag{2.9}$$

differenciálegyenlet-rendszert bizonyos

$$x_k(0) = x_k^0 \tag{2.10}$$

kezdeti feltételekkel.

A (2. 9) rendszernek a (2. 10) kezdeti feltételek mellett, mint könnyen igazolható, létezik egyértelmű megoldása és ez folytonos. Állapítsuk meg először ennek a megoldásnak két tulajdonságát.

Ha $x_k^0 \geqq 0$, akkor $x_k(t) \geqq 0$.

Valóban, ha $x_k(t') = 0$, akkor

$$\frac{dx_k}{dt} = \varphi(u_k) \geqq 0,$$

és az x_k függvény csak növekedhet.

Ha $\sum_{k=1}^{r} x_k^0 = 1$, akkor $\sum_{k=1}^{r} x_k(t) = 1$.

Valóban, a (2. 9) rendszer összes egyenleteit összeadva kapjuk:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{r} x_k(t) = \Phi(X) \left(1 - \sum_{k=1}^{r} x_k(t)\right),$$

úgyhogy ha a bennünket érdeklő összeg t egy bizonyos értékénél 1-gyel volt egyenlő, akkor ettől az értéktől később már nem térhet el.

Abban az esetben, amikor $\varphi(u_k) = u_k > 0$, kapjuk:

$$\frac{d\varphi(u_k)}{dt} = \sum_{l=1}^{r} a_{kl} \frac{dx_l}{dt} = \sum_{l=1}^{r} a_{kl} \varphi(u_l) - \Phi(X)\varphi(u_k).$$

Eszerint minden esetben

$$\frac{d\varphi^2(u_k)}{dt} = 2 \sum_{l=1}^{r} a_{kl} \varphi(u_k)\varphi(u_l) - 2\,\Phi(X)\varphi^2(u_k),$$

tehát összegezve k-ra és felhasználva B ferde szimmetriáját

$$\frac{d\Psi(X)}{dt} = 2\,\Phi(X)\Psi(X).$$

Világos továbbá, hogy

$$\sqrt{\Psi(X)} \leqq \Phi(X) \leqq \sqrt{r\Psi(X)}. \tag{2.11}$$

Tehát amikor $\Psi(X)$ pozitív, akkor fogyó. Ezért

$$\frac{d\Psi(X)}{dt} \leqq -2(\Psi(X))^{\frac{3}{2}},$$

ebből pedig integrálással kapjuk, hogy

$$\Psi(X) \leqq \frac{\Psi(X^0)}{\left(1 + t\sqrt{\Psi(X^0)}\right)^2}.$$

Következésképpen t növekedtével $\Psi(X) \to 0$. Azonkívül (2. 11) alapján $\Phi(X) \to 0$; tehát minden k-ra $\varphi(u_k) \to 0$.

Legyen X^{∞} a (2. 9) rendszer megoldásának egy limeszpontja (a S_r halmaz kompaktsága miatt ilyen pont létezik). Erre $u_k \leqq 0$ $(k=1,\ldots,r)$, vagyis

$$A_{k\cdot}X^{\infty T} \leqq 0 = v_{\Gamma_B} \qquad (k=1,\ldots,r),$$

ez pedig azt jelenti, hogy $X^{\infty} \in T_2(\Gamma_B)$.

Ilymódon a (2. 9) rendszer numerikus integrálása lehetővé teszi a Γ_B, és így a Γ_A játék bármelyik játékosa egy optimális stratégiájának tetszés szerinti pontossággal való meghatározását.

4. A mátrix-játékok megoldásának iterációs módszere. A mátrix-játék legalább egy egyensúlyi helyzetének a meghatározására szolgáló másik módszer, amely BROWNtól [23] és ROBINSONtól [24] származik, a következőkben áll.

Tekinteni fogjuk a A nyereségmátrixszal rendelkező Γ mátrix-játék sokszori megismétlését, másszóval olyan végtelen mérkőzést két játékos között, amelynek minden egyes játszmája a Γ játékra redukálódik. Írjuk le induktíve azt a folyamatot, amikor a játékosok a Γ játékbeli tiszta stratégiáik közül kiválasztják az $i_1, i_2, \ldots$ és $j_1, j_2, \ldots$ sorozatot.

Válassza meg az első játékos a maga i_1 stratégiáját tetszés szerint; ez lesz a konstrukció első lépése.

Tegyük fel, hogy a konstrukció t lépése már megtörtént, és ennek során az első játékos rendre az

$$(2.12) \qquad i_1, i_2, \ldots, i_{t'},$$

a második pedig a

$$(2.13) \qquad j_1, j_2, \ldots, j_{t''}$$

stratégiákat választotta. Ha utoljára az első játékos választott stratégiát, akkor a konstrukció $(t+1)$-edik lépése az lesz, hogy a második játékos olyan $j_{t''+1}$ tiszta stratégiát választ, amelyre

$$\sum_{k=1}^{t'} a_{i_k j_{t''+1}} = \min_j \sum_{k=1}^{t'} a_{i_k j}.$$

Ha pedig a t-edik lépésben a második játékos választott stratégiát, akkor a $(t+1)$-edik lépés abból fog állni, hogy az első játékos kiválaszt egy olyan $i_{t'+1}$ stratégiát, amelyre

$$\sum_{k=1}^{t''} a_{i_{t'+1} j_k} = \max_i \sum_{k=1}^{t''} a_{i j_k}.$$

A fenti eljárás a következőképpen interpretálható. A játékos mindegyik lépésnél úgy választja meg a maga stratégiáját, mintha feltételezné, hogy ellenfele „átlagos" észlelt stratégiája az a kevert stratégia, amelyhez az továbbra is tartani fogja magát.

J. ROBINSON bebizonyította, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t'}\min_j\sum_{k=1}^{t'}a_{i_kj}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t''}\max_i\sum_{k=1}^{t''}a_{ij_k}=v_\Gamma. \tag{2. 14}$$

Jelöljük t_i'-vel az i stratégiák számát a (2. 12) sorozatban és t_j''-vel a j stratégiák számát a (2. 13) sorozatban. A

$$X_t=\frac{1}{t'}(t_1',\ldots,t_m'),\quad Y_t=\frac{1}{t''}(t_1'',\ldots,t_n'')$$

jelöléseket használva (2. 14)-et átírhatjuk a

$$\lim_{t\to\infty}\min_j X_tA_{.j}=\lim_{t\to\infty}\max_i A_{i.}Y_t^T=v_\Gamma$$

alakba.

Innen következik, hogy a kevert stratégiákból álló $X_1, X_2,\ldots$ sorozat bármely konvergens részsorozata az első játékos valamelyik optimális stratégiájához tart. Hasonló állítás érvényes a $Y_1, Y_2,\ldots$ sorozatra.

A (2. 14) képletben felírt konvergenciák rendkívül lassúak. SHAPIRO [36] megmutatta, hogy a t-edik iterációs lépésnél a hiba nem nagyobb egy $t^{-\frac{1}{n+m}}$ nagyságrendű mennyiségnél. Bár a numerikus példák valamivel jobb konvergenciát mutatnak, általában több száz iteráció is csak két-három helyes jegyet eredményez. Ezért a játékok megoldása megtalálásának ezt a módszerét vagy gépi úton kell alkalmazni, vagy valamiképpen tökéletesíteni kell.

5. Az optimális stratégiák halmazai. Bármelyik Γ mátrix-játéknál, amelynek a nyereségmátrixa $(m\times n)$-es (rövidség kedvéért az ilyen játékot $(m\times n)$-es játéknak fogjuk nevezni), a $T_1(\Gamma)$, $T_2(\Gamma)$ halmazok az összes kevert stratégiák S_m, ill. S_n halmazában fekvő zárt, konvex poliéderek. Világos továbbá, hogy nem bármely két $U\subset S_m$, $V\subset S_n$ zárt, konvex poliéder tekinthető egy $(m\times n)$-es játékban résztvevő játékosok összes optimális stratégiái halmazának.

Például

$$U=\{\lambda(\alpha, 1-\alpha)+(1-\lambda)(\beta, 1-\beta)\}_{\lambda\in[0,1]},\quad 0<\alpha<\beta<1$$

nem lehet ilyen halmaz egyetlen (2×2)-es játéknál sem.

Ezzel kapcsolatban felmerül a kérdés, hogyan lehet jellemezni mindazoknak a Γ játékoknak a halmazát, amelyeknél az optimális stratégiák összessége az adott $T_1(\Gamma)$ és $T_2(\Gamma)$ poliéder. A válasz erre a kérdésre GALE és SHERMAN [25] munkájában található meg.

Legyen R_k a k-dimenziós vektortér és legyen C valamilyen kúp R_k-ban (vagyis olyan halmaz, hogy $X_1, X_2\in C$ és $\lambda_1,\lambda_2\geqq 0$ esetén $\lambda_1X_1+\lambda_2X_2\in C$). Jelentse $[C]$ a R_k tér C-t tartalmazó alterei közül a legszűkebbet, C^* (ill. $C^\perp$)

pedig az összes olyan $X \in R_k$ vektorok halmazát, hogy $XZ \geqq 0$ (ill. $XZ = 0$) minden $Z \in C$-re. Világos, hogy C^* is kúp (amelyet C polárkúpjának neveznek).

Legyen továbbá U egy a $(k-1)$-dimenziós S_k szimplexben fekvő poliéder. Jelöljük U dimenzióját d_U-val, S_k-nak U-t tartalmazó minimális lapját E_U-val, ennek dimenzióját e_U-val, S_k-nak E_U-val szemben fekvő lapját pedig D_U-val. A U poliéder egy tetszés szerinti d_U-1 dimenziós lapját belső lapnak fogjuk nevezni, ha nem fekszik benne S_k-nak egyetlen, e_U-nál alacsonyabb dimenziójú lapjában sem. U belső lapjainak a számát f_U-val jelöljük.

Úgy fogjuk venni, hogy S_k az a szimplex, amelyet a R_k tér koordinátaegységvektorainak a végpontjai határoznak meg. A $U \subset S_k$ poliédert tartalmazó legkisebb kúpot jelöljük $C(U)$-val.

Ezek mellett a jelölések mellett fennáll a következő

6. TÉTEL. *Legyen $U \subset S_m$, $V \subset S_n$ két konvex poliéder. Akkor*

1. *Ahhoz, hogy létezzék olyan $(m \times n)$-es Γ játék, amelyre*

$$T_1(\Gamma) = U, \quad T_2(\Gamma) = V, \tag{2. 15}$$

szükséges és elégséges, hogy teljesüljenek az

$$e_U - d_U = e_V - d_V, \quad f_U \leqq n - e_V - 1, \quad f_V \leqq m - e_U - 1$$

feltételek.

2. *Ahhoz, hogy az $(m \times n)$-es Γ játék kielégítse* (2. 15)*-öt, szükséges és elégséges, hogy a játék A mátrixa előállítható legyen*

$$A = \begin{pmatrix} A_e & A_2 \\ A_1 & A_s \end{pmatrix}$$

alakban, ahol

a) *a A_e mátrix a $[C(E_V)]$ halmazt a $[C(E_U)]$ halmazba képezi le és ennek a leképezésnek a magja $[C(V)]$, a A_e^T mátrix pedig a $[C(E_U)]$ halmazt a $[C(E_V)]$ halmazba képezi le és a leképezés magja $[C(U)]$;*

b) *a A_2 mátrix a $[C(D_U)]$ halmazt a $[C(E_V)]$ halmazba képezi le, teljesíti a*

$$A_2 C(D_V) \subset C(U)^*, \quad A_2 C(D_V) \cap C(U)^\perp = 0$$

feltételeket és a U poliéder minden F belső lapjához található a D_V lapnak olyan Z csúcsa, hogy

$$C(A_2 Z)^\perp \cap U = F;$$

c) *a A_1 mátrix a $[C(D_U)]$ halmazt a $[C(E_V)]$ halmazba képezi le, teljesíti a*

$$D_U A_1 \subset -C(V)^*, \quad D_U A_1 \cap C(V)^\perp = 0$$

feltételeket és a V poliéder minden G belső lapjához található a D_U lapnak olyan Z csúcsa, hogy

$$C(ZA_1)^{\perp} \cap V = G;$$

d) *a A_s mátrix tetszés szerinti.*

3. §. Pozíciós játékok

1. Bevezetés. A mostanáig tekintett játékfogalom nem tükrözi vissza azoknak a jelenségeknek sok nagyon fontos vonását, amelyek modelljéül a játékok hivatottak szolgálni.

Ilyen vonás például a következő. Legyen megint

$$\Gamma = \langle I, \{S_i\}_{i\in I}, \{H_i\}_{i\in I}\rangle$$

koalíciómentes játék. A Γ játék definíciója a játékos egyik vagy másik stratégiájáról semmiféle konkrét közlést nem tartalmaz: a játékosok stratégiái úgy kerülnek be a játékba, mint absztrakt halmazok jellegtelen elemei.

Csak aszerint lehet bizonyos közvetett megkülönböztetést tenni a stratégiák között, hogy a stratégia alkalmazása hogyan befolyásolja a játékos nyereségének a nagyságát.

Ugyanakkor sok tartalmas és a gyakorlatban fontos játéknál a stratégiáknak gyakran számos olyan belső, egyéni vonásuk van, amely őket mint olyanokat jellemzi és egyáltalán nem függ össze a nyereségfüggvény értékeivel. Például a sakkjátéknál lényeges különbség van aközött, hogy világos a játszmát a királygyaloggal vagy lóval kezdi, függetlenül attól, hogy hány pontot kap a játékos a játszma megnyeréséért. A preferánsz játéknál a játékosnak az a törekvése, hogy minden körülmények között ő „játsszék" (vagyis ő kapja meg a talont), szintén kitünteti az illető játékos stratégiáinak egy bizonyos részhalmazát, amely nem áll kapcsolatban a téttel. Végül az, amikor háború idején a szembenálló felek egyike bizonyos konkrét helyzetben a hadviselés támadó változatát választja, — függetlenül attól, hogy ez mennyire célszerű — a csapatok másfajta ténykedésére vezet, mintha a védekező változatot választaná.

A legtöbb jelenség másik olyan vonása, amely elvész, ha a jelenséget normálalakú játékkal modellezzük meg, abban áll, hogy a normálalakú játéknál a stratégiának a játékos által történő kiválasztása folyamatát úgy tekintjük, mint valami egy lépésből álló aktust, amelynek során a játékos semmiféle információt sem kap ellenfelei magatartásáról és szándékairól.

A valóságban a helyzet gyakran egy kissé jobb, bár jelentősen bonyolultabb. Rendszerint a játékos először nem magát a stratégiát választja ki, hanem csak a rendelkezésére álló stratégiák egy osztályát, meghagyva magának a cselekvési szabadságot a stratégia megválasztásában ezen az osztályon belül.

Miután bizonyos információt kapott ellenfelei hasonló ténykedéseiről, a játékos szűkíti saját stratégiáinak az osztályát és új információra vár stb. (itt az „információ" szót nagyon tág értelemben használjuk: ez lehet teljes információ az ellenfelek magatartásáról, lehet erről szóló részleges információ, végül lehet annak a ténynek a megállapítása, hogy a játékosnak hiú volt az a reménye, hogy kap valamilyen információt). Így lépésről lépésre szűkítve a fennmaradó lehetőségeket, a játékos fokozatosan eljut egy stratégiája kiválasztásáig.

Az a törekvés, hogy a játékelméletben visszatükröződjék a megmodellezendő jelenségek fentemlített két oldala, az elmélet azon részének a kialakulásához és fejlődéséhez vezetett, amely a játékokat éppen a játékosok stratégiái egyéni megkülönböztetése és a játék folyamán való fokozatos megvalósítása szempontjából vizsgálja. Ez a rész a *pozíciós játékok elmélete* nevet viseli. Jegyezzük meg, hogy a játékok matematikai elméletéről szóló első munka, ZERMELO már említett [1] cikke, éppen egy pozíciós játékkal, a sakkal foglalkozott.

A pozíciós játékokat NEUMANN [12] vette vizsgálat alá, e játéktípus pontos definícióját pedig KUHN [26], [27] adta meg. Később a pozíciós játékok elméletét számos szerző fejlesztette tovább munkáiban [28]—[33]. Meg kell jegyezni, hogy a pozíciós játék angol elnevezése — the game in extensive form (általánosított alakú játék) — nem egészen szerencsés, minthogy valójában a normálalakú játék fogalmának nem valamilyen kiterjesztéséről van szó, hanem ellenkezőleg, egyfajta pontosabbá tételéről és konkretizálásáról. Közel állnak a pozíciós játékokhoz azok a játékok, amelyeket BERGE [34] vizsgált.

2. A pozíciós játék definíciója. Kezdjük néhány kombinatorikai fogalommal.

A $<$ relációval részben rendezett véges K halmazt erre a relációra nézve *faalakúan rendezettnek* nevezzük, ha először is van olyan $0 \in K$ elem, hogy $0 \leqq X$ mindegyik $X \in K$ elemre, másodszor tetszés szerinti $X, Y \in K$ esetén abból, hogy található $Z \in K$, amelyre $X < Z$ és $Y < Z$, következik, hogy vagy $X \leqq Y$, vagy $Y \leqq X$. A K halmaz elemeit a továbbiakban *állásoknak* (pozícióknak) fogjuk nevezni. A 0 állást *kezdeti* állásnak nevezzük. Minden olyan W állást, amelyhez nem található $Y > W$ állás, *végállásnak* nevezünk. A K-beli összes végállások halmazát K^*-gal jelöljük. Legyen $X \in K$ esetén

$$D(X) = \{Y \in K : Y > X\}$$

és $U \subset K$ esetén

$$D(U) = \bigcup_{X \in U} D(X).$$

A $U, V \subset K$ halmazokról akkor mondjuk, hogy $U < V$, ha van olyan $X \in U$ és $Y \in V$, hogy $X < Y$.

K végességéből következik, hogy bármelyik $X \neq 0$ álláshoz található egyetlen olyan $Y < X$ állás, amelyre a $Y < Z < X$ relációból következik, hogy vagy $Z = Y$, vagy $Z = X$. Ezt nevezzük a X-et közvetlenül megelőző állásnak és $f(X)$-szel jelöljük.

Legyen $f^0(X) = X$ és $f^{n+1}(X) = f(f^n(X))$. Nyilvánvaló, hogy tetszés szerinti X álláshoz van olyan $n \geqq 0$, hogy $f^n(X) = 0$.

Legyen $W \in K^*$ és $f^n(W) = 0$. Akkor az

$$f^n(W) = 0, \quad f^{n-1}(W), \ldots, f^0(W) = W$$

állások sorozatát a W végállásra vezető *játszmának* nevezzük és $\mathfrak{P}(W)$-vel jelöljük. Ha $X \in K$ és $f^m(X) = 0$, akkor az

$$f^m(X), \ldots, f^0(X)$$

állások sorozatát a X álláshoz vezető *játszmaszakasznak* nevezzük és $\mathfrak{P}(X)$-szel jelöljük. $\mathfrak{P}^*(X)$ alatt azt a sorozatot értjük, amely $\mathfrak{P}(X)$-ből az utolsó tag elhagyása útján keletkezik. Ha $X < Y$, akkor a $\mathfrak{P}(Y)$ sorozat nyilván a $\mathfrak{P}(X)$ sorozattal kezdődik.

Legyen $f^{-1}(X) = \{Y \in K : f(Y) = X\}$. Az $f^{-1}(X)$ halmazt alkotó állásokat a X állás *alternatíváinak* nevezzük. Jelöljük K_i-vel az összes olyan K-hoz tartozó állások halmazát, amelyeknek pontosan i alternativájuk van. Nyilvánvaló, hogy $K_0 = K^*$. A továbbiak során világossá váló okokból elég azoknak a faalakúan rendezett halmazoknak a vizsgálatára szorítkozni, amelyeknél $K_1 = \Lambda$.

A faalakúan rendezett halmazt *irányítottnak* nevezzük, ha minden $X \in K_i$ $(i \geqq 2)$ elemre az $f^{-1}(X)$ halmaz elemei meg vannak számozva az 1-től i-ig terjedő természetes számokkal. Kényelem kedvéért néha, amikor egy rögzített állás alternatíváiról beszélünk, az alternatívákat sorszámukkal fogjuk helyettesíteni. Ha $X \in K_i$ és $1 \leqq \nu \leqq i$, akkor $D(X, \nu)$-vel jelöljük azt a halmazt, amely a X állás ν-edik alternatívájából és az összes utána következő állásokból áll. Nyilván

$$D(X) = \bigcup_{\nu=1}^{i} D(X, \nu).$$

$U \subset K_i$ esetén $D(U, \nu)$-vel fogjuk jelölni a

$$\bigcup_{X \in U} D(X, \nu)$$

összeget. Ha $X < Z$, akkor $\nu_X^{(Z)}$ jelentse a X állás azon alternatíváját, amelyre $Z \in D(X, \nu_X^{(Z)})$.

Legyen a $K \setminus K^*$ halmaz felosztva az egymást páronkint nem metsző $I_0, I_1, \ldots, I_n$ állásosztályokra. Ha $X \in I_0$, akkor azt mondjuk, hogy a X állásban véletlen lépés történik, ha pedig $X \in I_i$ $(i \geqq 1)$, akkor azt, hogy a X

állásban az i-edik játékos következik lépésre. A $I_0, \ldots, I_n$ halmazokat *soronkövetkezési halmazoknak* nevezzük. Továbbá fel fogjuk tenni, hogy minden $X \in I_0$ álláshoz tartozik egy valószínűségeloszlás $f^{-1}(X)$-en, amely mindegyik alternatívához pozitív valószínűséget rendel. A ν_X alternatíva valószínűségének a jele legyen $p(X, \nu_X)$.

Legyen mindegyik I_i $(i = 1, \ldots, n)$ halmaz felosztva valamilyen $U_1^{(i)}, \ldots, U_{t_i}^{(i)}$ állásosztályokra úgy, hogy $U_l^{(i)} \not< U_l^{(i)}$ és hogy a $U_l^{(i)} \cap K_j \neq \Lambda$ relációból következzék $U_l^{(i)} \subset K_j$. A $U_1^{(i)}, \ldots, U_{t_i}^{(i)}$ halmazokat *információs halmazoknak* nevezzük. A I_i soronkövetkezési halmazban foglalt összes információs halmazok családját $\mathfrak{U}_i$-vel jelöljük. Egy információs halmaz összes állásai azonos sorszámmal rendelkező alternatíváinak a rendszerét ezen *információs halmaz alternatívájának* nevezzük. Az információs halmazok alternatíváit is azonosíthatjuk sorszámukkal. A megszövegezések egyszerűsítése céljából úgy fogjuk tekinteni, hogy I_0 minden egyes állása információs halmazt képez.

Végül legyenek $h_1, \ldots, h_n$ a K^* halmazon értelmezett valós értékű függvények. A $h_i(W)$ értéket az i-edik játékos *nyereségének* nevezzük a W végállásban.

Azt fogjuk mondani, hogy adva van egy Γ *pozíciós játék,* ha meg van adva

a) a játékosok $I = \{1, \ldots, n\}$ halmaza;

b) egy faalakúan rendezett, irányított K halmaz;

c) a $K \setminus K^*$ halmaznak egy soronkövetkezési halmazokra való $\mathfrak{K}$ felosztása;

d) minden $X \in I_0$ állás alternatíváinak a halmazán egy p_X valószínűségeloszlás;

e) a $I_1, \ldots, I_n$ halmazoknak információs halmazokra való $\mathfrak{K}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ felosztásai;

f) a játékosok $h_i(W)$ nyereségei minden W végállásban.

Ilyen módon pozíciós játéknak nevezzük a

$$\Gamma = \langle I, K, \mathfrak{K}, \{p_X\}_{X \in I_0}, \{\mathfrak{K}_i\}_{i \in I}, \{h_i\}_{i \in I} \rangle$$

összességet.

A Γ pozíciós játék folyamatát induktíve definiálhatjuk a következőképpen. A játék nulladik lépése (húzása) a 0 kezdeti állás kiválasztásából áll. Tegyük fel, hogy a Γ játékban k húzás már megtörtént és ennek eredményeként a X állás adódott. Ha $X \in K^*$, akkor a játékot befejezettnek tekintjük. Ha $X \in I_0$, akkor a $(k+1)$-edik húzás a véletlen alternatíva megvalósulása a p_X eloszlásnak megfelelően és az átmenet ebbe az állásba. Ha pedig $X \in I_i$ $(i \geqq 1)$, akkor az i-edik játékos tetszése szerint választ egy állást X alternatívái közül.

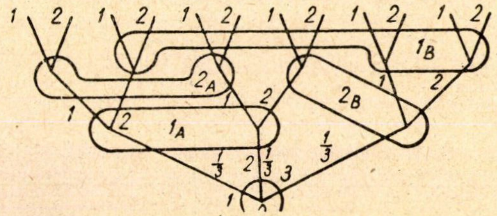
1. példa. A Γ játékban két csapat (1 és 2) vegyen részt és mindegyikük két résztvevőből $(1_A, 1_B$, ill. $2_A, 2_B)$ álljon. Tegyük fel, hogy ezek a résztvevők elszigetelt helyiségekben tartózkodnak és nincs összeköttetésük egymással. A Γ játék a következőkből áll. Egy urnában három cédula van, rendre az 1, 2, 3 számokkal ellátva. A közvetítő kivesz ezek közül egyet. Ha az 1-est vagy a 2-est húzta, akkor odamegy az 1_A játékoshoz, aki egy másik cédulára felírja az 1, 2 számok valamelyikét és átadja a cédulát a közvetítőnek. Ha a cédulán 1-es áll, akkor a közvetítő a 2_A játékoshoz megy és megmutatja neki a kapott cédulát (de a sajátját nem). Ekkor ez a játékos egy harmadik cédulára felír egy 1-es vagy egy 2-es számot.

Ha viszont az első játékos (1_A) a 2-es számot írta fel, akkor a közvetítő 1_B-hez megy ha saját céduláján 1-es áll, és 2_B-hez, ha saját céduláján 2-es áll. Nem közölve az illetővel semmit, a közvetítő átvesz tőle egy 1-es vagy 2-es számmal ellátott cédulát és véget vet a játéknak.

Végül tegyük fel, hogy a közvetítő azt a cédulát húzta, amelyiken a 3-as szám áll. Akkor sorban odamegy 2_B-hez és 1_B-hez és kap tőlük egy-egy cédulát. Ezután a játék abbamarad. A játék végére a közvetítő kezében három cédula van, a rajtuk olvasható számok pedig a következő kombinációkat alkothatják (minden szám után zárójelben fel van tüntetve, hogy ki írta fel ezt a számot; a közvetítőt szokás szerint a 0 számmal jelöljük):

$$1(0),\ 1(1_A),\ 1(2_A);\quad 2(0),\ 1(1_A),\ 1(2_A);\quad 3(0),\ 1(2_B),\ 1(1_B);$$
$$1(0),\ 1(1_A),\ 2(2_A);\quad 2(0),\ 1(1_A),\ 2(2_A);\quad 3(0),\ 1(2_B),\ 2(1_B);$$
$$1(0),\ 2(1_A),\ 1(1_B);\quad 2(0),\ 2(1_A),\ 1(2_B);\quad 3(0),\ 2(2_B),\ 1(1_B);$$
$$1(0),\ 2(1_A),\ 2(1_B);\quad 2(0),\ 2(1_A),\ 2(2_B);\quad 3(0),\ 2(2_B),\ 2(1_B).$$

Ha most a cédulákon álló számok minden kombinációjához hozzárendelve képzelünk valamilyen nyereséget, akkor pozíciós játékot kapunk, amelynek a sémáját az 1. ábra mutatja.

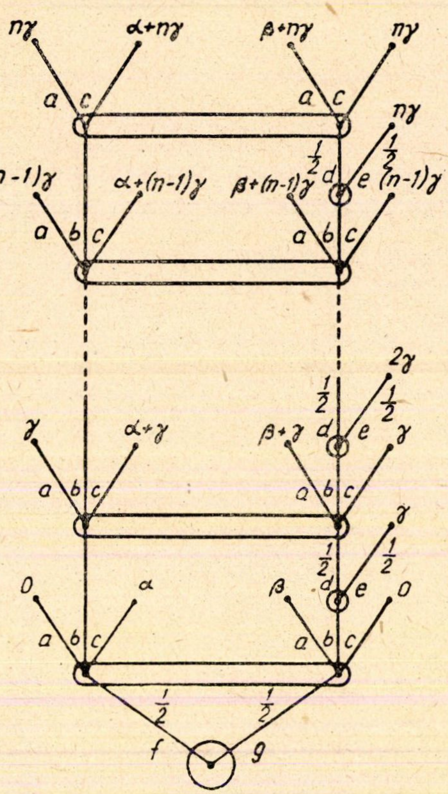


1. ábra

Nyilvánvaló, hogy a dominójáték bármely változata és a kártyajátékok többsége is (vint, preferánsz stb.) elvileg rendkívül hasonlít az ismertetett játékhoz. Ezeknél közvetítőként a véletlen szerepel, amely „kiosztja" a játékosoknak a dominókat vagy a kártyákat.

2. példa. A pozíciós játékok közé tartoznak az összes olyan statisztikai döntési eljárások is, amelyek a szekvenciális analízissel kapcsolatosak (lásd [35]). Az ilyen típusú folyamatokat a „statisztikusnak" (2-es játékos) a „természettel" (1-es játékos) folytatott zérus összegű játékaként szokták felfogni. Foglalkozzunk a legegyszerűbb ilyenfajta játékkal.

Tegyük fel, hogy egy nagy tétel gyártmányt kell átvennünk, amelyben a termelési feltételek szerint a selejt részaránya 0 vagy $\frac{1}{2}$ lehet. Az első esetben a tétel megfelelőnek minősül, a második esetben nem. Tegyük fel, hogy a selejtes tétel elfogadásából származó kár β, a megfelelő tétel el nem fogadásából származó kár α, egy gyártmány megvizsgálásának a költsége pedig γ.



2. *ábra.* Jelölések: a—elfogadni; b—ellenőrzés; c—visszautasítani; d—hibátlan gyártmány; e—hibás gyártmány; f megfelelő tétel; g—selejtes tétel. A végállások mellett a statisztikus költségei vannak feltüntetve

Legelőször a statisztikus számára három lehetőség kínálkozik: elfogadni a tételt ellenőrzés nélkül, visszautasítani ellenőrzés nélkül, végül megkezdeni az ellenőrzést egy gyártmány megvizsgálásával. Ha ez a gyártmány selejtes, akkor a tételt visszautasítja, viszont ha hibátlan, akkor a statisztikus újra három alternatíva között választhat: elfogadja a tételt, visszautasítja a tételt, vagy folytatja az ellenőrzést úgy, hogy megvizsgál még egy gyártmányt. Ez a folyamat addig folytatódik, amíg legfeljebb n számú gyártmányt megvizsgáltak; ezután a statisztikus köteles vagy elfogadni vagy visszautasítani a tételt.

Ennek a játéknak a sémáját a 2. ábra mutatja. Az 1-es játékos nyereségei (vagyis a statisztikus költségei) a végállások mellett vannak feltüntetve.

3. A pozíciós játék normalizálása. A pozíciós játék fentebb idézett definíciója formailag különbözik a normálalakú játéknak az 1. § 1. pontjában megadott definíciójától. Minden pozíciós játéknál azonban természetes módon értelmezni lehet a játékos stratégiájának és nyereségfüggvényének a fogalmát, és ezáltal a pozíciós játékot normálalakú játékként lehet előállítani.

Pozíciós játéknál a játékosok stratégiáit egyszerűen lehet definiálni. A Γ játékban az i játékos stratégiájának (tiszta stratégiájának) nevezünk egy olyan π_i függvényt, amelynek az értelmezési tartománya $\mathfrak{U}_i$ és amelynek a $\pi_i(U)$ értékei a U információs halmaz alternatívái. Minthogy megállapodtunk abban, hogy mindegyik információs halmaz alternatíváit azonosítjuk saját sorszámukkal, azért az i játékos stratégiáját olyan a $\mathfrak{U}_i$ halmazon értelmezett függvényként lehet definiálni, hogy $U \subset K_j$ esetén a $\pi_i(U)$ érték valamely j-nél nem nagyobb természetes szám.

Az i játékos összes tiszta stratégiáinak a halmazát, mint rendesen, S_i-vel fogjuk jelölni.

A pozíciós játéknál a nyereségfüggvény definíciója valamivel bonyolultabb. Legyen $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ a Γ játék egy helyzete. Legyen bármely $X \in K \setminus K^*$ állásra és ennek az állásnak tetszés szerinti ν alternatívájára

$$\pi(X, \nu) = \begin{cases} p_X(\nu) & \text{ha } X \in I_0, \\ 1 & \text{ha } X \in U \in \mathfrak{U}_i \ (i \neq 0) \text{ és } \pi_i(U) = \nu, \\ 0 & \text{minden más esetben.} \end{cases}$$

Akkor minden π helyzet meghatároz egy véletlen bolyongást a K fán. Ennek során mindegyik $X \in K$ állás fellépésének megvan a maga $\pi[X]$ [2] valószínűsége. Nyilvánvaló, hogy

$$\pi[X] = \prod_{Y \in \mathfrak{P}^*(X)} \pi(Y, \nu_Y^{(X)}).$$

Speciálisan beszélni lehet minden végállás $\pi[W]$ valószínűségéről. Végeredményben mindegyik játékos $h_i(W)$ nyeresége valószínűségi változó lesz. Ennek a

$$\sum_{W \in K^*} h_i(W) \pi[W]$$

várható értékét választjuk $H_i(\pi)$ értékének.

A megkonstruált

$$\Gamma_N = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} \rangle$$

játékot a Γ játék *normálalakjának (normalizálásának)* nevezzük.

Másrészt minden normálalakú Γ játékot elő lehet állítani mint Γ_P pozíciós játékot.

Ebből a célból válasszuk a játék álláshalmazának az összes

$$(s_1, \ldots, s_k) \quad (s_i \in S_i, k \geqq 0)$$

alakú sorozatok halmazát ($k = 0$ esetén az üres sorozat értendő). Ha $k < l$, akkor legyen

$$(s_1, \ldots, s_k) < (s_1, \ldots, s_l),$$

és úgy fogjuk tekinteni, hogy sorozataink más rendezett párt nem alkotnak.

A $\mathfrak{K}$ felosztás k-adik osztályához, I_k-hoz soroljuk az összes k tagú sorozatokat, és ezt az egész osztályt egyetlen információs halmaznak nyilvánítjuk.

[2] A valószínűség ilyen szokatlan jelölésének az az oka, hogy $\pi(X)$-en $X \in I_i$ esetén a $\pi_i(X)$ alternatívát értjük, vagyis a π_i függvénynek mint stratégiának az értékét.

Minthogy itt $I_0 = A$, a p valószínűségek definiálásának a kérdése nem merül fel.

Végül esetünkben a végállások az $s = (s_1, \ldots, s_n)$ alakú sorozatok, vagyis a Γ játék helyzetei, és már csak az marad hátra, hogy a $h_i(s)$ értékeket a

$$h_i(s) = H_i(s)$$

képlettel értelmezzük.

A normálalakú Γ játék és a hozzá megszerkesztett Γ_P pozíciós játék közötti különbség tisztán formai és abban foglalható össze, hogy a Γ játék általunk elfogadott interpretációja szerint a résztvevők egyszerre és egymástól függetlenül választanak stratégiát, a Γ_P pozíciós játéknál pedig ugyanezt egymás után teszik meg (de ismét egymástól függetlenül).

Mindazoknak a pozíciós játékoknak a megtalálása, amelyeknek a normalizálása valamely rögzített normálalakú játékkal esik egybe, bonyolult, érdekes és megoldatlan feladat.

4. Teljes információjú játékok. A Zermelo—Neumann-tétel. Azt mondjuk, hogy a Γ pozíciós játék *teljes információjú játék,* ha minden információs halmaza egyetlen állásból áll. Ezt az elnevezést az indokolja, hogy teljes információjú játéknál minden játékos, ismerve állását valamely pillanatban, teljesen informálva van az összes korábbi lépésekről, mind a saját-jairól, mind az ellenféléiről, valamint a véletlenéiről. Teljes információjú játékra példa a sakk. Ezzel szemben a legtöbb kártyajáték nem tartozik ehhez az osztályhoz.

Amint ZERMELO [1] a sakkra alkalmazva, NEUMANN [12] pedig általános alakban megmutatta, teljes információjú játéknál a játékosoknak nincs szükségük stratégiáik randomizálására.

7. TÉTEL (ZERMELO—NEUMANN). *Minden teljes információjú Γ játéknak vannak (tiszta stratégiás) egyensúlyi helyzetei.*

BIZONYÍTÁS. Nevezzük a $\mathfrak{P}(W)$ $(W \in K_\Gamma^*)$ alakú sorozatok maximális hosszúságát a Γ játék *hosszúságának.* A tétel bizonyítása a Γ játék hosszúsága szerint haladó indukcióval fog történni.

Ha Γ hosszúsága 1-gyel egyenlő, akkor a K fa egymagából a kezdeti állásból áll, minden egyes játékos stratégiáinak a halmaza üres, úgyhogy mindegyik helyzetet (mivel ilyen egyáltalán nem létezik) egyensúlyi helyzetnek lehet tekinteni.

Most legyen Γ hosszúsága r, és tegyük fel, hogy a tétel helyességét már minden olyan játékra igazoltuk, amelynek a hosszúsága kisebb r-nél. Legyenek a 0 állás alternatívái $1, 2, \ldots, l$, és rendeljük hozzá a j-edik alternatívához azt a $\Gamma^{(j)}$ játékot, amelyre

$$K^{(j)} = D(0, j),$$
$$I_i^{(j)} = I_i \cap K^{(j)},$$
$$p_X^{(j)}(\nu) = p_X(\nu) \quad \text{ha} \quad X \in I_0^{(j)},$$
$$h_i^{(j)}(W) = h_i(W) \quad \text{ha} \quad W \in K^{(j)*},$$

és amelynek mindegyik információs halmaza egyetlen állásból áll. A $\Gamma^{(j)}$ játékok mindegyike teljes információjú és r-nél kisebb hosszúságú. Legyen

$$\overline{\pi}^{(j)} = (\overline{\pi}_1^{(j)}, \ldots, \overline{\pi}_n^{(j)}) \in \mathfrak{S}_{\Gamma^{(j)}} \tag{3.1}$$

és $0 \in I_k$. Nyilvánvaló, hogy a k-tól különböző i játékos minden stratégiája előállítható $(\pi_i^{(1)}, \ldots, \pi_i^{(l)})$ alakban, a k játékos stratégiái pedig $(\pi_k(0), \pi_k^{(1)}, \ldots, \pi_k^{(l)})$ alakban, hacsak $k \neq 0$. Tegyük fel, hogy $k \neq 0$ esetén a $H_k^{(j)}(\overline{\pi}^{(j)})$ mennyiség $j = j_0$-ra felveszi maximumát.

Vegyük most a (3.1) egyensúlyi helyzetek által meghatározott

$$\overline{\pi}_i = (\overline{\pi}_i^{(1)}, \ldots, \overline{\pi}_i^{(l)}) \in S_i \qquad (i \neq k),$$
$$\overline{\pi}_k = (\overline{\pi}_0, \overline{\pi}_k^{(1)}, \ldots, \overline{\pi}_k^{(l)}) \in S_k \qquad (k \neq 0)$$

stratégiákat, ahol π_0 azt a 0 álláson értelmezett „függvényt" jelenti, amelynek az értéke j_0, és alkossuk meg belőlük a Γ játék $\overline{\pi} = (\overline{\pi}_1, \ldots, \overline{\pi}_n)$ helyzetét. Megmutatjuk, hogy $\overline{\pi} \in \mathfrak{S}_\Gamma$.

Valóban, tetszés szerinti π helyzetre $i \neq k \neq 0$ esetén, valamint $i = k \neq 0$, $\pi_k(0) = j_0$ esetén

$$H_i(\overline{\pi} \| \pi_i) = \sum_{W \in K^*} (\overline{\pi} \| \pi_i)[W] h_i(W) = \sum_{W \in K^{(j_0)*}} (\overline{\pi} \| \pi_i)[W] h_i(W) \leqq$$
$$\leqq \sum_{W \in K^{(j_0)*}} \overline{\pi}^{(j_0)}[W] h_i(W) = \sum_{W \in K^*} \overline{\pi}[W] h_i(W) = H_i(\overline{\pi}).$$

Továbbá ha $k \neq 0$ és $\pi_k(0) = j \neq j_0$, akkor

$$H_k(\overline{\pi} \| \pi_k) = \sum_{W \in K^*} (\overline{\pi} \| \pi_k)[W] h_k(W) = \sum_{W \in K^{(j)*}} (\overline{\pi}^{(j)} \| \pi_k^{(j)})[W] h_k(W) \leqq$$
$$\leqq H_k^{(j)}(\overline{\pi}^{(j)}) \leqq H_k^{(j_0)}(\overline{\pi}^{(j_0)}) = \sum_{W \in K^*} \overline{\pi}[W] h_k(W) = H_k(\overline{\pi}).$$

Végül $k = 0$ esetén

$$H_i(\overline{\pi} \| \pi_i) = \sum_{j=1}^{l} p_0^{(j)} \sum_{W \in K^{(j)*}} (\overline{\pi}^{(j)} \| \pi_i^{(j)})[W] h_i(W) \leqq$$
$$\leqq \sum_{j=1}^{l} p_0^{(j)} \sum_{W \in K^{(j)*}} \overline{\pi}^{(j)}[W] h_i(W) = H_i(\overline{\pi}).$$

Tehát $\overline{\pi} \in \mathfrak{S}_\Gamma$, és ezzel a tételt bebizonyítottuk.

5. Kevert stratégiák. Pozíciós játéknál egy játékos kevert stratégiájának nevezünk szokás szerint az illető játékos tiszta stratégiáinak a halmazán értelmezett minden valószínűségi mértéket. Minthogy pozíciós játéknál a játékos tiszta stratégiái függvények, azért a kevert stratégiák véletlen függvények lesznek.

Legyen $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ a Γ játék kevert stratégiás helyzete. Ezt a helyzetet az összes tiszta stratégiás helyzetek halmazán értelmezett valószínűségi mértéknek lehet tekinteni, ha a π tiszta stratégiás helyzet mértékét a

$$\mu[\pi]=\mu_1[\pi_1]\cdots\mu_n[\pi_n]$$

képlettel definiáljuk.

Egy kevert stratégiás μ helyzetet úgy lehet tárgyalni, mint randomizált véletlen bolyongást a K_Γ fán, nevezetesen mint olyan jelenséget, amelynek során a π véletlen bolyongás $\mu[\pi]$ valószínűséggel valósul meg. Eszerint beszélhetünk egy tetszés szerinti X állás valószínűségéről a μ helyzetben:

$$\mu[X]=\sum_{\pi\in S}\mu[\pi]\pi[X]$$

és speciálisan a végállások valószínűségéről, tehát a nyereségfüggvény új

$$H_i(\mu)=\sum_{W\in K^*}h_i(W)\mu[W]$$

definíciójáról is. A nyereségfüggvény kevert helyzetekre adott utóbbi definíciója nyilván nincs ellentmondásban a megszokott definícióval:

$$H_i(\mu)=\sum_{\pi\in S}H_i(\pi)\mu[\pi].$$

A pozíciós játékoknak, mint minden véges játéknak, NASH tétele szerint vannak kevert stratégiás egyensúlyi helyzeteik. Ahogy a 2. § 1. pontjában megjegyeztük, a véges játék egyensúlyi helyzetei tényleges megtalálásának a nehézségei elsősorban a játékot meghatározó paraméterek nagy számából adódnak. A pozíciós játékokra vonatkozó [27]—[33] munkák többsége azzal a kérdéssel foglalkozik, csökkenthető-e ezeknek a paramétereknek a száma. Az e célra indítványozott eljárások a következő megfontolásra épülnek. Mindegyik játékos összes M_i kevert stratégiái közül tüntessünk ki egy Φ_i osztályt, amelyen belül minden egyes stratégiát aránylag kisszámú paraméter határoz meg. Tegyük fel továbbá, hogy sikerül megszerkeszteni a M_i halmazok Φ_i-re való olyan φ_i leképezéseit, amelyeknél abból, hogy $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ egyensúlyi helyzet, következik, hogy $(\varphi_1\mu_1, \ldots, \varphi_n\mu_n)$ is az. Ha nem tűzzük ki célul a játék összes egyensúlyi helyzeteinek a leírását, hanem megelégszünk közülük néhánynak (vagy csak egynek is) a megtalálásával, akkor nyilván elég a Φ_i halmazokhoz tartozó stratégiákból alkotott helyzeteket tekinteni és ezek között keresni egyensúlyi helyzeteket. Ennek a paragrafusnak a hátralevő részét a magatartás-stratégiák KUHNtól származó elmélete ismertetésének fogjuk szentelni. Ez az elmélet a pozíciós játékok egy osztályára megvalósítja a kitűzött programot.

6. Magatartás-stratégiák. Legyen $\mu_i \in S_i^*$ és $X \in K$. Ha van olyan μ helyzet, hogy $(\mu \| \mu_i)[X] \neq 0$, akkor a X helyzetet a μ_i stratégia mellett *lehetségesnek* (angolul: possible) nevezzük. Ezt így jelöljük: $X \in \mathrm{Poss}\, \mu_i$. Azt mondjuk, hogy a U információs halmaz a μ_i kevert stratégia mellett *lényeges* (angolul: relevant), ha $U \cap \mathrm{Poss}\, \mu_i \neq \Lambda$. Ezt a tényt a következőképpen szokás felírni: $U \in \mathrm{Rel}\, \mu_i$.

Minden $U \in \mathfrak{U}_i$ információs halmazhoz definiáljunk egy $\beta_{i,U}$ valószínűségeloszlást U összes alternatívái halmazán. Az összes így kapott eloszlások családját az i játékos *magatartásának* nevezzük. Ez az elnevezés azért indokolt, mert az összes felsorolt eloszlások megadása teljesen meghatározza a játékos tevékenységét a játék minden információs halmazában és így a játék minden állásában. A játékos magatartása azonban nem határozza meg egyértelműen a játékos kevert stratégiáját: a véletlen függvények definiálásához általában nem elég tudni a függvényértékek eloszlását az értelmezési tartomány minden pontjában. A játékos magatartásával „összeegyeztetett" összes kevert stratégiák közül emeljünk ki egyet, amely különös figyelmet érdemel.

Legyen $\beta_{i,U}$ az i játékos valamely magatartása. A

$$(3.2) \qquad (\mu(\beta_i))[\pi_i] = \prod_{U \in \mathfrak{U}_i} \beta_{i,U}[\pi_i(U)]$$

képlettel, ahol π_i az i játékos tetszés szerinti tiszta stratégiája, i-nek egy $\mu(\beta_i)$ kevert stratégiáját definiálhatjuk, amelyet az i játékos *magatartás-stratégiájának* fogunk nevezni.

Fordítva, legyen μ_i az i játékos tetszés szerinti kevert stratégiája. Tekintsük azt a $\beta(\mu_i)$ magatartást, amelyet a következő egyenlőségek értelmeznek:

$$(3.3) \qquad \begin{cases} \beta_{i,U}(\nu) = \dfrac{\mu_i[\pi_i(U) = \nu,\ U \in \mathrm{Rel}\, \pi_i]}{\mu_i[U \in \mathrm{Rel}\, \pi_i]} & \text{ha} \quad U \in \mathrm{Rel}\, \mu_i, \\ \beta_{i,U}(\nu) = \mu_i[\pi_i(U) = \nu] & \text{ha} \quad U \notin \mathrm{Rel}\, \mu_i. \end{cases}$$

A $\mu(\beta(\mu_i))$ magatartás-stratégiát a μ_i *kevert stratégiának megfelelő magatartás-stratégiának* nevezzük.

7. Teljes emlékezetű játékok. Kuhn tétele. Azt mondjuk, hogy az i játékosnak a pozíciós játékban *teljes emlékezete* van, ha bármely π_i tiszta stratégiájára $X \in U \in \mathrm{Rel}\, \pi_i$ fennállásából következik, hogy $X \in \mathrm{Poss}\, \pi_i$. Meg lehet mutatni, hogy a játékos emlékezetének a teljessége egyenértékű a következő feltétellel: ha $U, V \in \mathfrak{U}_i$ és $U < V$, akkor található olyan ν alternatíva, hogy $V \subset D(U, \nu)$. Az utóbbi feltétel lényegében annak a körülménynek a formális felírása, hogy a játékos a V-hez tartozó bármelyik állásban emlékszik, volt-e már ő a U-hoz tartozó valamilyen állásban, és ha igen, akkor melyik alternatívát választotta ebben az állásban. A 2. pont 1. példájában egyik játékosnak sincs teljes emlékezete, a 2. példában viszont nyilvánvaló, hogy mindkét játékosnak teljes az emlékezete. A gyakorlatban a teljes emlékezet hiánya rendszerint úgy jelentkezik, hogy a játékos egy csapatot képvisel, amely több elkülönített, a játék folyamán egymással információt cserélni nem tudó személyből áll. Éppen így fejeződött ki a teljes emlékezet hiánya az 1. példában szereplő játéknál.

Az i játékos μ_i' és μ_i'' kevert stratégiáját egymással *ekvivalensnek* nevezzük (jelekben: $\mu_i' \equiv \mu_i''$), ha minden $W \in K^*$ állásra és μ helyzetre

$$(\mu \| \mu_i')[W] = (\mu \| \mu_i'')[W].$$

Nyilvánvaló, hogy ha $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathfrak{S}_\Gamma$ és $\mu_i' \equiv \mu_i$, akkor $\mu \| \mu_i' \in \mathfrak{S}_\Gamma$.

8. TÉTEL (KUHN). *Ahhoz, hogy a Γ játékban tetszés szerinti $\mu_i \in S_i^*$ stratégiára fennálljon*

$$\mu(\beta(\mu_i)) \equiv \mu_i,$$

szükséges és elégséges, hogy az i játékosnak teljes emlékezete legyen Γ-ban.

A tétel bizonyításához előrebocsátunk néhány lemmát.

Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy a

$$\pi_i[W] = \prod_{X \in \mathfrak{P}_i^*(W)} \pi_i(X, \nu_X^{(W)}) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

jelölés mellett fennáll

$$\pi[W] = \prod_{i=0}^{n} \pi_i[W].$$

1. LEMMA. *Legyen Γ valamilyen pozíciós játék és $X \in K_\Gamma$. Legyen továbbá $\mathfrak{P}_i^*(X) = \Lambda$ esetén $T_i(X) = S_i$, $\mathfrak{P}_i^*(X) \neq \Lambda$ esetén pedig*

$$T_i(X) = \{\pi_i : Y \in \operatorname{Poss} \pi_i, \pi_i(Y) = \nu_Y^{(X)}\},$$

ahol Y a $\mathfrak{P}_i^*(X)$ álláshalmaz utolsó eleme.

Akkor minden π helyzetre

$$\pi[X] = \begin{cases} \pi_0[X] & \text{ha } \pi_i \in T_i(X) \qquad (i = 1, \ldots, n), \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A bizonyítás indukcióval történik. Tegyük fel, hogy a lemma állítása igaz minden $\mathfrak{P}^*(X)$-beli állásra, és legyen ennek a halmaznak az utolsó Z állására $Z \in I_j$. Akkor

$$\pi[X] = \pi[Z] \pi_j(Z, X). \tag{3.4}$$

Továbbá $\pi_i \in T_i(X)$ $(i=1,\ldots,n)$ azt jelenti, hogy $\pi_i \in T_i(Z)$ $(i=1,\ldots,n)$ és azonkívül

(3.5) $$\pi_j(Z)=\nu_Z^{(X)}.$$

Tehát ebben az esetben

(3.6) $$\pi[Z]=\pi_0[Z].$$

Ha $j=0$, akkor (3.4) alapján

$$\pi[X]=\pi_0[Z]\pi_0(Z,X)=\pi_0[X].$$

Ha viszont $j\neq 0$, akkor (3.5) alapján $\pi_j(Z,X)=1$, továbbá $\pi_0[X]=\pi_0[Z]$, és (3.4), (3.6) alkalmazásával megkapjuk a kívánt eredményt.

Legyen most legalább egy $i\neq 0$ indexre $\pi_i \notin T_i(X)$. Ha emellett akár csak egyetlen i-re is $\pi_i \notin T_i(Z)$, akkor a feltevés szerint $\pi[Z]=0$. Nyilvánvaló azonban, hogy $0\leqq\pi[X]\leqq\pi[Z]$, úgyhogy a tekintett esetben $\pi[X]=0$ is igaz. Végül ha minden $i\neq 0$-ra $\pi_i \in T_i(Z)$, akkor $\pi_i \notin T_i(X)$ csak úgy lehetséges, hogy $Z\in I_i$ és $\pi_i(Z)\neq\nu_Z^{(X)}$. Ez azt jelenti, hogy $\pi_i(Z,X)=0$; tehát $\pi[X]=0$.

2. LEMMA. *Legyen $X\in I_i$, jelentse ν a X állás egyik alternatíváját, legyen $X<W$ és Y a X után következő állás $\mathfrak{P}_i(W)$-ben. Akkor $Y\in \operatorname{Poss}\pi_i$ fennállásához szükséges és elégséges, hogy $X\in\operatorname{Poss}\pi_i$ és $\pi_i(X)=\nu_X^{(Y)}$ legyen.*

A bizonyítás azonnal következik a (3.4) képletből.

Áttérünk a tétel bizonyítására. Legyen a Γ játékban az i játékosnak teljes emlékezete, és μ_i^* legyen e játékos tetszés szerinti kevert stratégiája. Céljaink érdekében elég megmutatni, hogy bármelyik $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ helyzetben

(3.7) $$(\mu\|\mu_i^*)[W]=(\mu\|\mu(\beta(\mu_i^*)))[W].$$

Vegyünk egy $W\in K^*$ végállást és először tegyük fel, hogy van olyan $X<W$, amely a μ_i^* stratégia mellett nem lehetséges. Akkor (3.7) baloldala nyilván zérussal egyenlő.

Másrészt legyen X a $\mathfrak{P}_i(W)$ sorozat μ_i^* stratégia mellett lehetséges állásai közül az utolsó, Y pedig az utána következő állás ebben a sorozatban. Akkor a 2. lemma szerint

$$\mu_i^*[X\in\operatorname{Poss}\pi_i,\ \pi_i(X)=\nu_X^{(Y)}]=\mu_i^*[Y\in\operatorname{Poss}\pi_i]=0.$$

Minthogy azonban az i játékosnak teljes emlékezete van, azért $X\in U\in\mathfrak{U}_i$ esetén

$$\mu_i^*[U\in\operatorname{Rel}\pi_i,\ \pi_i(U)=\nu_U^{(W)}]=\mu_i^*[X\in\operatorname{Poss}\pi_i,\ \pi_i(X)=\nu_X^{(Y)}]=0.$$

Következésképpen

$$\beta(\mu_i^*)[U,\nu_U^{(W)}]=0$$

és így

$$\mu(\beta(\mu_i^*))[W]=0.$$

Ezzel a (3. 7) összefüggést a $W \notin \operatorname{Poss} \mu_i^*$ esetre bebizonyítottuk. Most legyen $W \in \operatorname{Poss} \mu_i^*$. Fennáll

$$(\mu \| \mu(\beta(\mu_i^*)))[W] =$$
$$= \pi_0[W] \mu(\beta(\mu_i^*)) [\bigcap_{U \cap \mathfrak{P}_i(W) \neq \Lambda} (\pi_i(U) = \nu_U^{(W)})] \prod_{j \neq i} \mu_j [\bigcap_{U \cap \mathfrak{P}_j(W) \neq \Lambda} (\pi_j(U) = \nu_U^{(W)})].$$

(3. 2) alapján írhatjuk:

$$\alpha = \mu(\beta(\mu_i^*)) [\bigcap_{U \cap \mathfrak{P}_i(W) \neq \Lambda} (\pi_i(U) = \nu_U^{(W)})] = \prod_{U \cap \mathfrak{P}_i(W) \neq \Lambda} \beta(\mu_i^*)[U, \nu_U^{(W)}].$$

Továbbá bevezetve a $\mathfrak{P}_i(W) = \{Z_1, \ldots, Z_r\}$; $Z_s \in U_s$ $(s = 1, \ldots, r)$ jelölést, (3. 3) segítségével kapjuk:

$$\alpha = \prod_{s=1}^{r} \frac{\mu_i^*[\pi_i(U_s) = \nu_U^{(W)},\ U_s \in \operatorname{Rel} \pi_i]}{\mu_i^*[U_s \in \operatorname{Rel} \pi_i]}.$$

Minthogy i-nek teljes emlékezete van,

$$\alpha = \prod_{s=1}^{r} \frac{\mu_i^*[\pi_i(Z_s) = \nu_{Z_s}^{(W)},\ Z_s \in \operatorname{Poss} \pi_i]}{\mu_i^*[Z_s \in \operatorname{Poss} \pi_i]}.$$

A 2. lemma szerint az s-nek megfelelő tört számlálója egyenlő az $(s+1)$-nek megfelelő tört nevezőjével és különbözik zérustól. Következésképpen

$$\alpha = \frac{\mu_i^*[\pi_i(Z_r) = \nu_{Z_r}^{(W)},\ Z_r \in \operatorname{Poss} \pi_i]}{\mu_i^*[Z_1 \in \operatorname{Poss} \pi_i]}.$$

Itt a nevező nyilván 1-gyel egyenlő. Azonkívül, ismét a 2. lemma értelmében, $Z_r \in \operatorname{Poss} \pi_i$ azt jelenti, hogy $\pi_i(Z_s) = \nu_{Z_s}^{(W)}$ és természetesen $Z_s \in \operatorname{Poss} \pi_i$ $(s = 1, \ldots, r)$. Ezért

$$\alpha = \mu_i^* \left[\bigcap_{s=1}^{r} (\pi_i(Z_s) = \nu_{Z_s}^{(W)},\ Z_s \in \operatorname{Poss} \pi_i) \right].$$

Ilymódon azt kapjuk, hogy

$$(\mu \| \mu(\beta(\mu_i^*)))[W] = \pi_0[W] \mu_i^* [\bigcap_{Z \in \mathfrak{P}_i(W)} (\pi_i(Z) = \nu_Z^{(W)})] \prod_{j \neq i} \mu_j [\bigcap_{Z \in \mathfrak{P}_j(W)} (\pi_j(Z) = \nu_Z^{(W)})] =$$
$$= (\mu \| \mu_i^*)[W],$$

és ezt kellett bebizonyítani.

Áttérünk az elégségesség bizonyítására. Tegyük fel, hogy i-nek nincs teljes emlékezete a Γ játékban. Ez azt jelenti, hogy található olyan $U \in \mathfrak{U}_i$ információs halmaz és benne X, Y állások, továbbá olyan π_i stratégia, hogy $X \in \operatorname{Poss} \pi_i$, $Y \notin \operatorname{Poss} \pi_i$. Legyen a π_i' stratégia olyan, hogy $\pi_i'(U) \neq \pi_i(U)$ és $Y \in \operatorname{Poss} \pi_i'$. Vegyünk egy $W \in K^*$ végállást, amelyre $Y < W$ és $\pi_i'[W] \neq 0$, és képezzük a $\mu_i = \frac{1}{2}(\pi_i + \pi_i')$ kevert stratégiát. Világos, hogy

$$(\pi' \| \mu_i)[W] = \frac{1}{2} \pi_0[W].$$

Most tekintsük az utolsó állást a $\mathfrak{P}_i(Y) \cap \mathrm{Poss}\, \pi_i$ halmazban és jelöljük ezt Z-vel. Fennáll

$$\beta(\mu_i)[U, \nu_U^{(W)}] = \frac{1}{2},$$

$$\beta(\mu_i)[Z, \nu_Z^{(W)}] = \frac{1}{2}.$$

Tehát

$$(\pi' \| \mu(\beta(\mu_i)))[W] \leqq \frac{1}{4} \pi_0[W],$$

amivel a tételt bebizonyítottuk.

IRODALOM

[1] E. Zermelo, Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels, *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, Cambridge **2** (1912), 501—550.

[2] E. Borel, La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique gauche, *Compt. Rend. Acad. Sci.* **173** (1921), 1304—1308.

[3] E. Borel, Sur les jeux où interviennent l'hazard et l'habilité des joueurs, *Théorie des Probabilités*, Paris (1924), 202—224.
Angol fordítását lásd Econometrica 21 (1953), 97—117.

[4] E. Borel, Sur les systèmes de formes linéaires à déterminant symétrique gauche et la théorie générale du jeu, *Compt. Rend. Sci.* **184** (1927), 52—54.

[5] J. Neumann, Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Math. Ann.* **100** (1928), 295—320.

[6] L. Kalmár, Zur Theorie der abstracten Spiele, *Acta Szeged*, (1928—1929), 65—85.

[7] R. A. Fisher, Randomisation and an old enigma of card play, *Math. Gazette* **18** (1934), 294—297.

[8] R. Possel, Sur la théorie mathématique des jeux de hasard et de reflexion. *Actualités Sci. et Industr.* (1936) 436.

[9] E. Borel, Applications aux jeux de hasard, *Traité du calcul des Probabilités et de ses Applications* **4**, N° 11 (1938).

[10] J. Ville, Sur la théorie générale des jeux où intervient l'habilité des joueurs, *Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications* **5**, N° 11 (1938), 105—113.

[11] E. Borel, A. Cheron, Théorie Mathématique du Bridge à la portée de tous (*Monographie des probabilités*, fasc. 5) Paris, 1940.

[12] J. Neumann—O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, 1944. New York.

[13] R. S. Beresford—M. H. Preston, A mixed strategy in action, *Operat. Res. Quart.* **6**, N° 4 (1955), 173—175.

[14] J. F. Nash, Non-cooperative games, *Ann. of Math.* **54** (1951), 286—295.

[15] П. С. Александров, Комбинаторная топология, Москва—Ленинград, Гостехиздат, 1947.

[16] L. S. Shapley—R. N. Snow, Basic solution of discrete games, *Contributions to the Theory of Games* I, Princeton (1950), 27—35.
[17] Н. Н. Воробьев, Ситуации равновесия в биматричных играх, Теория вероятностей и ее применения, 3 (1958), N° 3.
[18] D. Blackwell—M. A. Girshick, *Theory of games and Statistical decisions*, New York, 1954.
[19] I. Kaplansky, A contribution to von Neumann's theory of games, *Ann. of Math.* **46** (1945).
[20] H. F. Bohnenblust, S. Karlin, L. S. Shapley, Solution of discrete two-person games, *Contributions to the Theory of Games* I, Princeton (1950), 51—72.
[21] G. W. Brown—J. v. Neumann, Solutions of games by differential equations, *Contributions to the Theory of Games* I, Princeton (1950) 73—79.
[22] D. Gale, H. W. Kuhn, A. W. Tucker, On symmetric games, *Contributions to the Theory of Games* I, Princeton (1950), 81—87.
[23] G. W. Brown, Iterative solutions of games by fictitious play, *Activity analysis of production and allocation*, Cowles commission Monographs, N° 13, New York.
[24] J. Robinson, An iterative method of solving a game, *Ann. of Math.* **54** (1951), 296—301.
[25] D. Gale—S. Sherman, Solutions of finite two-person games, *Contributions to the Theory of Games* I, Princeton (1950), 37—49.
[26] H. W. Kuhn, Extensive games, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **36** (1950).
[27] H. W. Kuhn, Extensive games and the problem of information, *Contributions to the Theory of Games* II, Princeton (1953), 193—216.
[28] L. S. Shapley, Information and the formal solution of many-moved games, *Proc. Int. Congr. of Math.*, Cambridge, U. S. A., 1950 (Amer. Math. Soc., 1952), I, 574—575.
[29] W. O. Krental, J. C. C. McKinsey, W. V. Quine, A simplification of games in extensive form, *Duke Math. Journ.* **18** (1951), 885—900.
[30] N. Dalkey, Equivalence of information patterns and essentially determinate games, *Contributions to the Theory of Games* II, Princeton (1953), 217—243.
[31] G. L. Thompson, Signaling strategies on n-person games, *Contributions to the Theory of Games* II, Princeton (1953), 267—277.
[32] B. J. Birch, On games with almost complete informations, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **51**, N° 2 (1955), 275—287.
[33] Н. Н. Воробьев, Редуцированные стратегии для игр в обобщенной форме, Доклады Академии наук СССР, 115 (1957), N° 5, 855—857.
[34] C. Berge, Sur une théorie ensembliste des jeux alternatifs, *Journ. math. pures et appl.* **32**, N° 9: 2 (1953), 129—184.
[35] A. Wald, *Statistical decision functions*, New York, 1950.
[36] H. N. Shapiro, Note on a computation method in the theory of games, *Comm. Pure and Appl. Math.* **11**, N° 4 (1958), 588—593.

Fordította: Bognár János
A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézete

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1960. IV. 3. — Terjedelem: 12,75 (A/5) ív, 3 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 60-1715