

BOLYONGÁSI PROBLÉMÁK TÁRGYALÁSA MÁTRIXELMÉLETI MÓDSZERREL

Írta: REIMANN JÓZSEF

1. Bevezetés

Az alábbi dolgozatban véges számú állapottal bíró homogén MARKOV-láncok speciális eseteivel, a tér rácsponthoz tartozó bolyongás által származtatott MARKOV-láncok vizsgálatával foglalkozunk.

Ismeretes, hogy a homogén MARKOV-láncot a kezdeti valószínűségeloszlás, valamint az egy lépéses átmenet-valószínűségeket tartalmazó

$$(1.1) \quad II = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \text{ sztochasztikus mátrix}$$

teljesen meghatározza.

Az N -lépéses átmenet-valószínűségeket a II mátrix N -edik hatványának megfelelő elemei szolgáltatják. A többlépéses átmenetvalószínűségek meghatározása tehát mátrix-hatványozási probléma, ami tetszőleges sztochasztikus mátrix esetében igen nehezen vihető keresztül.

A sztochasztikus mátrixok bizonyos, speciális osztálya azonban ebből a szempontból jól kezelhető.

Legyenek a homogén MARKOV-láncot alkotó kísérletsorozat egyes kísérleteinek lehetséges eredményei az $A_0, A_1, \dots, A_n$ események, amelyeket szokásos terminológiával egy véletlen állapotváltozásokat mutató fizikai rendszer lehetséges állapotainak tekintjük, és jelölje p_{ij} az A_i állapotból az A_j állapotba történő egy lépéses átmenet-valószínűséget. Sematizáljuk a fizikai rendszert az alábbi módon: egy részecske bolyong a számegegyenes $0, 1, 2, \dots, n$ egész koordinátájú pontjain és az $A_i \rightarrow A_j$ egy lépéses átmenetnek felel meg a részecske $x=i$ pontból $x=j$ pontba történő ugrása.

Legyen $p_{00} = 1$, $p_{nn} = 1$, $p_{ii} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$),

$$p_{ij} = \begin{cases} p & \text{ha } j = i + 1 \\ q & \text{ha } j = i - 1 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A kapott sztochasztikus mátrix:

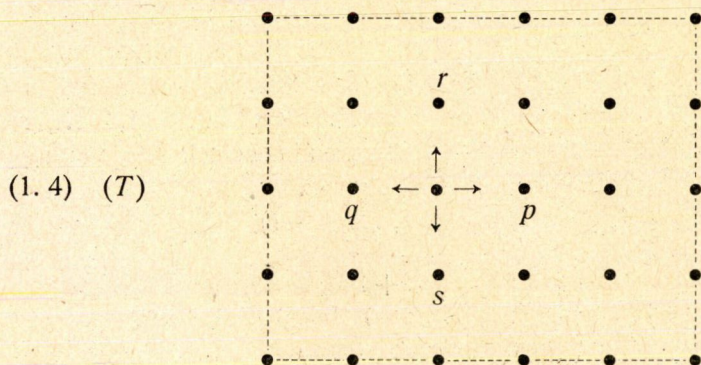
$$(1.2) \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

megfelel annak az esetnek, amikor az $x=0$ és $x=n$ pontokban elnyelő falakat helyezünk el, azaz, ha a részecske e pontok valamelyikébe ér, mozgása megszűnik, egyébként bármely belső pontból csak a tőle jobbra vagy balra levő szomszédos pontba léphet p ill. q valószínűséggel. A bolyongást szimmetrikusnak nevezzük, ha $p=q=\frac{1}{2}$.

Helyezzünk a részecske útjába az $x=\frac{1}{2}$ és $x=n+\frac{1}{2}$ pontokba visszaverő falakat, ekkor az előző példában említett átmenet- valószínűségek mellett a következő sztochasztikus mátrixot kapjuk:

$$(1.3) \quad P_2 = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q & p \end{pmatrix}$$

Ha a részecske a sík rácspontjaiból álló téglalapon bolyong, amely téglalapot elnyelő fallal szegélyezünk, s bármely belső pontból a részecske egy lépés során a 4 szomszédos rácspont valamelyikébe léphet rendre p, q, r, s valószínűséggel, akkor az alábbi bolyongási tartomány esetén:



FELLER [5] munkájában generátorfüggvény alkalmazásával kiszámítja az (1.3) és (1.4) matrixok N -edik hatványának elemeit, valamint elnyelőfalas egydimenziós bolyongásnál annak valószínűségét, hogy a részecske az $x=z$ pontból indulva N lépésben az $x=0$ pontban nyelődjek el. LOÈVE [7] munkájában megtalálható egydimenziós szimmetrikus elnyelő-falas bolyongás esetén annak a valószínűsége, hogy a részecske N -lépés után még nem nyelődött el. (E probléma megoldására LOÈVE mátrixmódszert használt). Két és háromdimenziós síkbeli elnyelőfalas szimmetrikus bolyongásra vonatkozólag JORDAN K. [6] könyvében található annak valószínűsége, hogy a részecske a (T) tartomány egy rögzített rácspontjából indulva N -lépésben egy kiszemelt rácspontba jusson. (A szerző a probléma megoldására a differencia-egyenletek módszerét használta). MC. CREA és WHIPPLE közös [2] dolgozatukban síkbeli szimmetrikus elnyelőfalas bolyongás esetén egy hidrodinamikai modell segítségével kiszámítják annak valószínűségét, hogy a részecske a (T) tartomány egy belső pontjából indulva — meghatározatlan számú lépés után — végül egy kijelölt elnyelőpontban fejezi be életét.

Az alábbiakban bemutatásra kerülő *mátrixelméleti módszer* segítségével valamennyi említett eredmény egységes módon nyerhető, (míg az említett szerzők mindegyike más módszert alkalmaz), mégpedig nemcsak szimmetrikus bolyongás esetén (a fenti eredmények többsége erre az esetre vonatkozik), hanem abban az általánosabb esetben is, amikor az egységnyi valószínűséget tetszőleges módon osztjuk fel a különböző irányokba történő elmozdulás szempontjából. Módszerünk segítségével az eddigi egy-két vagy három dimenzióra nyert eredmények könnyűszerrel általánosíthatók n -dimenziós térben elnyelő- vagy visszaverő fallal határolt tartományon történő bolyongás esetére.¹ A [2] dolgozatban tárgyalt problémát tetszőleges alakú tartomány esetében is megoldjuk. A módszer egyéb alkalmazásaira, valamint a nyert eredményeknek a matematikai statisztikában történő felhasználására egy későbbi dolgozatban kívánunk visszatérni.

A módszer alap gondolata a következő: a) Az (1.2) és (1.3) típusú mátrixok kanonikus előállításával segítségével a mátrixhatványozási probléma egy skalár elemekből álló diagonál-mátrix hatványozására redukálódik, így az egydimenziós térben történő bolyongásnál az N -lépéses átmenetvalószínűségek egyszerű módon adódnak.

b) Magasabb dimenziójú térben történő bolyongás által származtatott sztochasztikus hipermátrixok² az egydimenziós bolyongásnak megfelelő mát-

¹ Többdimenziós visszaverőfalas bolyongással az irodalomban eddig nem találkoztunk.

² Tudomásunk szerint a hipermátrixok elméletét eddig bolyongási problémák tárgyalására nem alkalmazták, pl. az (1.5) és (1.6) alakú sztochasztikus mátrixok az irodalomban nem szerepelnek.

rixok segítségével egyszerű módon felépíthetők, s mivel ismert mátrixelméleti tétel alapján az egydimenziós bolyongás mátrixainak kanonikus előállítása kulcsot szolgáltat a hipermátrixok kanonikus előállításához, az N lépéses átmenetvalószínűségek akárhány dimenziós térben történő bolyongás esetében elvileg könnyen nyerhetők.

2. Bolyongás az egyenesen

A) ELNYELŐ-FALAS ESET

Az (1.3) sztochasztikus mátrix megfelelő átrendezéssel (sorok és oszlopok egyidejű felcserélésével), a következő alakra hozható:

$$(2.1) \quad P_1 = \begin{bmatrix} E & 0 \\ B_1 & P \end{bmatrix},$$

ahol P az alábbi $(n-1)$ -edrendű mátrix

$$(2.2) \quad P = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q & 0 \end{bmatrix}.$$

Könnyű belátni, hogy

$$(2.3) \quad P_1^N = \begin{bmatrix} E & 0 \\ B_N & P^N \end{bmatrix}.$$

Ha annak valószínűségét keressük, hogy a részecske az $x=i$ pontból indulva ($0 < i < n$) pontosan N lépésben az $x=0$ falnál nyelődje el, akkor meghatározzuk annak valószínűségét, hogy az $x=i$ pontból induló részecske $N-1$ lépésben az $x=1$ pontba jusson (ezt P^{N-1} elemei adják meg), s az így kapott valószínűség q -szorososa a kívánt eredmény:

$$p_{i0}^{(N)} = q p_{i1}^{(N-1)} \quad \text{és} \quad p_{in}^{(N)} = p p_{i,n-1}^{(N-1)}.$$

Így számunkra elegendő a P mátrix N -edik hatványát meghatározni, amelyhez a következő tételt, a mátrixfüggvények kanonikus előállításának alaptételét vesszük alapul [3]:

Ha a P mátrix karakterisztikus polinomja $|\lambda E - P| = D(\lambda) = \prod_{k=1}^s (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k}$,

minimálpolinomja $A(\lambda) = \prod_{k=1}^s (\lambda - \lambda_k)$, ha továbbá az $f(z) = \sum_{v=0}^s c_v z^v$ hatványsor konvergenciaköre a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 0-helyeket a belsejében tartalmazza, akkor

az $f(P)$ mátrixfüggvény a következő kanonikus alakban állítható elő:

$$(I) \quad f(P) = \sum_{k=1}^s f(\lambda_k) L_k(P) = \sum_{k=1}^s f(\lambda_k) (\mathbf{u}_{k1} \mathbf{v}_{k1} + \dots + \mathbf{u}_{k\alpha_k} \mathbf{v}_{k\alpha_k}^*),$$

ahol $L_k(z) = \frac{A(z)}{A'(\lambda_k)(z - \lambda_k)}$, és az $\mathbf{u}_{ki}, \mathbf{v}_{lj}^*$ vektorok biortogonális rendszert alkotnak, azaz

$$\mathbf{u}_{ki}^* \mathbf{v}_{lj} = \delta_{kl} \delta_{ij} \begin{pmatrix} k, l = 1, 2, \dots, s \\ i = 1, 2, \dots, \alpha_k \\ j = 1, 2, \dots, \alpha_l \end{pmatrix}.$$

Az $\mathbf{u}_{ki}$ ill. $\mathbf{v}_{kj}^*$ vektorok a P -nek a λ_k sajátértékhez tartozó jobb-, ill. baloldali sajátvektorai.

Innen $f(z) = z^N$ esetben

$$(II) \quad P^N = \sum_{k=1}^s \lambda_k^N (\mathbf{u}_{k1} \mathbf{v}_{k1}^* + \dots + \mathbf{u}_{k\alpha_k} \mathbf{v}_{k\alpha_k}^*).$$

Ha $P = P^*$, azaz P valós szimmetrikus, akkor kanonikus előállítása:

$$(III) \quad P = \sum_{k=1}^s \lambda_k (\mathbf{u}_{k1} \mathbf{u}_{k1}^* + \dots + \mathbf{u}_{k\alpha_k} \mathbf{u}_{k\alpha_k}^*).$$

Az alkalmazásokra való tekintettel megjegyezzük, hogy az $L_k(P)$ Lagrange-féle interpolációs mátrix-polinom és az $\text{adj}(\lambda E - P)$ mátrix között az alábbi reláció áll fenn:

$$L_k(P) = \frac{\alpha_k}{D^{(\alpha_k)}(\lambda_k)} \{\text{adj}(\lambda E - A)\}_{\lambda=\lambda_k}^{(\alpha_k-1)}.$$

Ha speciálisan λ_k egyszeres gyök:

$$(IV) \quad L_k(P) = \frac{1}{D'(\lambda_k)} \text{adj}(\lambda_k E - A).$$

A (2.2)-ben adott P mátrixot kanonikus előállítás céljából szimmetrikus alakra hozzuk.

Fennáll az alábbi azonosság:

$$(2.4) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{q}{p}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{pq} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{pq} & 0 & \sqrt{pq} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{pq} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{pq} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{p}{q}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{n-2} \end{bmatrix} = T \Pi_1 T^{-1},$$

ahol

$$(2.5) \quad II_1 = \sqrt{pq} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} = \sqrt{pq} II.$$

A II mátrix kanonikus előállítása ismert [3]. (III)-ban

$$\lambda_k = 2 \cos \frac{k\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$L_k(II)_{ij} = \frac{2}{n} \sin \frac{ik\pi}{n} \sin \frac{jk\pi}{n},$$

$$\mathbf{u}_k^* = \sqrt{\frac{2}{n}} \left[\sin \frac{k\pi}{n}, \dots, \sin \frac{(n-1)k\pi}{n} \right]$$

helyettesítendő. Ennek figyelembevételével a P mátrix kanonikus alakja:

$$(2.6) \quad P = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(2\sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{n} \right) \begin{bmatrix} \sin \frac{k\pi}{n} \\ \sqrt{\frac{q}{p}} \sin \frac{2k\pi}{n} \\ \vdots \\ \left(\sqrt{\frac{q}{p}} \right)^{n-2} \sin \frac{(n-1)k\pi}{n} \end{bmatrix} \cdot \left[\sin \frac{k\pi}{n}, \sqrt{\frac{p}{q}} \sin \frac{2k\pi}{n}, \dots, \left(\sqrt{\frac{p}{q}} \right)^{n-2} \sin \frac{(n-1)k\pi}{n} \right].$$

A (II) összefüggés alapján a P^{N-1} mátrix i -edik sorának j -edik eleme:

$$(2.7) \quad P_{ij}^{(N-1)} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(2\sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{n} \right)^{N-1} \left(\sqrt{\frac{q}{p}} \right)^{i-1} \sin \frac{ik\pi}{n} \left(\sqrt{\frac{p}{q}} \right)^{j-1} \sin \frac{jk\pi}{n} = \\ = \frac{2^N}{n} p^{\frac{N-1-i+j}{2}} q^{\frac{N-1+i-j}{2}} \sum_{k=1}^{n-1} \cos^{N-1} \frac{k\pi}{n} \sin \frac{ik\pi}{n} \sin \frac{jk\pi}{n}.$$

Ennek alapján

$$(2.8) \quad P_{i,0}^{(N)} = q P_{i,1}^{(N-1)} = \frac{2^N}{n} p^{\frac{N-i}{2}} q^{\frac{N+i}{2}} \sum_{k=1}^{n-1} \cos^{N-1} \frac{k\pi}{n} \sin \frac{ik\pi}{n} \sin \frac{k\pi}{n}.$$

Utóbbi eredményünk megegyezik a FELLER [5] művében található eredménnyel⁶.

Szimmetrikus bolyongás esetén $p=q=\frac{1}{2}$ helyettesítéssel eredményeink a következő alakot öltik:

$$(2.9) \quad P_{ij}^{(N-1)} = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{n-1} \cos^{N-1} \frac{k\pi}{n} \sin \frac{ik\pi}{n} \sin \frac{jk\pi}{n}$$

és

$$(2.9') \quad P_{ii}^{(N)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \cos^{N-1} \frac{k\pi}{n} \sin^2 \frac{ik\pi}{n}.$$

Annak valószínűsége, hogy a részecske az $x=i$ pontból indulva $2N$ lépésben kiinduló helyére térjen vissza:

$$(2.10) \quad P_{ii}^{(2N)} = \frac{2^{2N}}{n} p^N q^N \sum_{k=1}^{n-1} \cos^{2N} \frac{k\pi}{n} \sin^2 \frac{ik\pi}{n}.$$

Ugyanez a valószínűség szimmetrikus bolyongás esetén:

$$(2.11) \quad P_{ii}^{(2N)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \cos^{2N} \frac{k\pi}{n} \sin^2 \frac{ik\pi}{n}.$$

1. TÉTEL. *Annak valószínűsége, hogy a részecske N lépés után még életben van:*

$$(2.12) \quad P(\xi > N) = \frac{2^{N+1}}{n} p^{\frac{N-i+1}{2}} q^{\frac{N+i-1}{2}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{[1 + (-1)^{k-1}] \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{N}{2}}}{\frac{p}{q} - 2\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{k\pi}{n} + 1} \cos^N \frac{k\pi}{n} \sin \frac{ik\pi}{n} \sin \frac{k\pi}{n},$$

ahol ξ az elnyelődés előtti lépésszámot jelöli.

BIZONYÍTÁS: Annak valószínűsége, hogy a részecske N lépés után még nem nyelődött el, nyilván annak valószínűségével egyenlő, hogy a részecske az $x=i$ pontból indulva az $x=1, x=2, \dots, x=n-1$ pontok valamelyikébe ment át N lépésben. Mivel egymást kölcsönösen kizáró eseményekről van szó, a keresett valószínűsége fennáll:

$$(2.13) \quad P = \sum_{j=1}^{n-1} P_{ij}^{(N)},$$

azaz a keresett valószínűség a P^N mátrix i -edik sora elemeinek összege.

⁶ Lásd [5] 292. oldal.

Jelöljük ξ -vel a részecske elnyelődés előtti lépéseinek számát, ekkor a $P(\xi > N)$ valószínűségeket a

$$(2.14) \quad \begin{bmatrix} P^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n-1} p_{ij} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n-1} p_{n-1,j} \end{bmatrix}$$

vektor elemei szolgáltatják. E vektor i -edik eleme adja meg a keresett valószínűséget, ha a részecske az $x=i$ pontból indult. A (2.7) formulát felhasználva, a $P(\xi > N)$ valószínűséget explicit alakban is megadhatjuk:

$$P(\xi > N) = \frac{2^{N+1}}{n} p^{\frac{N-i}{2}} q^{\frac{N+i}{2}} \sum_{k=1}^{n-1} \cos^N \frac{k\pi}{n} \sin \frac{ik\pi}{n} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \left(\sqrt{\frac{p}{q}} \right)^j \sin \frac{jk\pi}{n} \right].$$

Az összegezést j -re elvégezve, kapjuk (2.12)-t. Ha ebben a formulában $p = q = \frac{1}{2}$ -et helyettesítünk, kapjuk a LOËVE által közölt⁷

$$(2.15) \quad P(\xi > N) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \cos^N \frac{k\pi}{n} \sin \frac{ik\pi}{n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n}$$

formulát, ahol az összegezést csak páratlan k -ra kell végezni.

2. TÉTEL. Az elnyelődés előtti lépésszám várható értéke

$$(2.16) \quad M(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin \frac{ik\pi}{n}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n}} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin \frac{ik\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{2n}}{\sin^3 \frac{k\pi}{2n}}.$$

BIZONYÍTÁS. A (2.15) összefüggés felhasználásával könnyen kiszámíthatjuk annak valószínűségét, hogy a részecske pontosan N lépésben nyelődik el valamelyik falnál.

Nyilván

$$P(\xi = N) = P(\xi > N-1) - P(\xi > N).$$

Így (2.15) alapján

$$(2.16') \quad P(\xi = N) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\cos^{N-1} \frac{k\pi}{n} - \cos^N \frac{k\pi}{n} \right) \sin \frac{ik\pi}{n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n}.$$

Kiszámítjuk az elnyelődési lépésszám várható értékét;

$$M(\xi) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \sum_{N=0}^{\infty} N \left[\cos^{N-1} \frac{k\pi}{n} - \cos^N \frac{k\pi}{n} \right] \right\} \sin \frac{ik\pi}{n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n}.$$

⁷ Lásd: [7] 48. oldal.

Tekintetbe véve, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} N \cos^{N-1} \frac{k\pi}{n} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{1 - \cos \frac{k\pi}{n}} = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{k\pi}{2n}},$$

kapjuk (2.16)-ot.

Például $n=6$, $i=3$ esetén

$$M(\xi) = \frac{1}{6} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{12}}{\sin^3 \frac{\pi}{12}} + \frac{\sin \frac{3\pi}{2} \cos \frac{\pi}{4}}{\sin^3 \frac{\pi}{4}} + \frac{\sin \frac{5\pi}{2} \cos \frac{5\pi}{12}}{\sin^3 \frac{5\pi}{12}} \right) = 9.$$

Vizsgáljuk most meg azt az esetet, amikor csak egy elnyelőfalat alkalmazunk. Legyen az elnyelő fal az $x=0$ pontban. A (2.8) összefüggésből, ha $n \rightarrow \infty$ kapjuk annak valószínűségét, hogy az $x=i$ pontból induló részecske N lépésben az $x=0$ falnál nyelődik el, amikor az $x=n$ pontban levő elnyelőfalat a végtelenbe toltuk. Ez a valószínűség:

$$(2.17) \quad P_0^N = 2^N p^{\frac{N-i}{2}} q^{\frac{N+i}{2}} \int_0^1 \cos^{N-1} \pi x \sin i \pi x \sin \pi x dx.$$

FELLER rámutat arra, hogy a fenti integrál elemi alakban is kifejezhető, s mint az parciális integrálással kimutatható:

$$(2.18) \quad P_0^N = \frac{i}{N} \left(\frac{N}{2} \right) p^{\frac{N-i}{2}} q^{\frac{N+i}{2}}.$$

Megjegyezzük, hogy az utóbbi formula elemi úton is származtatható. Ismeretes, hogy ha az $x=0$ pontban nincs elnyelő fal, azaz a részecske korlátlanul bolyonghat, akkor annak valószínűsége, hogy a részecske N lépésben az $x=i$ pontból az $x=0$ pontba jut⁸:

$$(2.19) \quad \left(\frac{N}{N-i} \right) p^{\frac{N-i}{2}} q^{\frac{N+i}{2}}.$$

Nekünk most annak valószínűségére van szükségünk, hogy az említett esemény N lépésben először következzen be. Egy jól ismert lemma segítségével könnyen megkapjuk a kívánt eredményt.

⁸ Lásd: [5] 293. oldal.

LEMMA:⁹ Annak valószínűsége, hogy egy α darab (-1) -ből és β darab $(+1)$ -ből álló sorozatban ne legyen olyan részsorozat, amelyben a (-1) -ek és $(+1)$ -ek száma megegyezik:

$$1 - \frac{2\beta}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}.$$

A mi esetünkben $\alpha = \frac{N+i}{2}$, $\beta = \frac{N-i}{2}$, a keresett valószínűség $\frac{i}{N}$, tehát

$$\frac{i}{N} \binom{N}{\frac{N-i}{2}} p^{\frac{N-i}{2}} q^{\frac{N+i}{2}}$$

éppen annak valószínűségét adja, hogy a részecske az $x=i$ pontból indulva, N lépésben először ért az $x=0$ pontba.

B) VISSZAVERÓ-FALAS ESET

Az (1.3) mátrixot a (2.4) formulában feltüntetett módon szimmetrizálhatjuk, majd egyszerű megfontolások alapján az alábbi sajátértékeket nyerjük:

$$(2.20) \quad \lambda_k = 2\sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{n} \quad (k=1, 2, \dots, n-1),$$

$$\lambda_n = 1.$$

Az elnyelőfalas esettel analóg számítási menettel a Lagrange-féle mátrixpolinomokra az alábbi értékeket kapjuk:

$$(2.21) \quad L_k(P)_{ij} = \frac{2}{n} \frac{p \left(\sqrt{\frac{q}{p}} \right)^i \left(\sin \frac{ik\pi}{n} - \sqrt{\frac{q}{p}} \sin \frac{(i-1)k\pi}{n} \right)}{1 - 2\sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{n}} \cdot$$

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{p}{q}} \right)^j \left(\sin \frac{jk\pi}{n} - \sqrt{\frac{q}{p}} \sin \frac{(j-1)k\pi}{n} \right)}{1 - 2\sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{n}};$$

és

$$L_n(P)_{ij} = \frac{1 - \frac{p}{q}}{1 - \left(\frac{p}{q} \right)^n} \left(\frac{p}{q} \right)^{j-1} \quad \text{minden } i\text{-re.}$$

⁹ Lásd: [8] 694. oldal.

(II) alapján, annak a valószínűsége, hogy a részecske az $x=i$ pontból indulva N lépésben az $x=j$ pontba megy át:

$$(2.22) \quad P_{ij}^{(N)} = \frac{1 - \frac{p}{q}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^n} \left(\frac{p}{q}\right)^{j-1} + 2^{N+1} p^{1+\frac{N-(j-i)}{2}} q^{\frac{N+(j-i)}{2}} n^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} s_k,$$

ahol

$$s_k = \frac{\cos^N \frac{k\pi}{n} \left[\sin \frac{ik\pi}{n} - \sqrt{\frac{q}{p}} \sin \frac{(i-1)k\pi}{n} \right] \left[\sin \frac{jk\pi}{n} - \sqrt{\frac{q}{p}} \sin \frac{(j-1)k\pi}{n} \right]}{1 - 2\sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{n}}.$$

Eredményünk megegyezik a FELLER által közölt eredménnyel¹⁰.

Szimmetrikus bolyongás esetén a keresett valószínűség:

$$P_{ij}^{(N)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos^N \frac{k\pi}{n} \left[\sin \frac{ik\pi}{n} - \sin \frac{(i-1)k\pi}{n} \right] \left[\sin \frac{jk\pi}{n} - \sin \frac{(j-1)k\pi}{n} \right]}{1 - \cos \frac{k\pi}{n}}.$$

(2.22)-ből könnyen látható, hogy $P_{ij}^{(N)}$ az i -től független

$$\frac{1 - \frac{p}{q}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^n} \left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}$$

stacionárius eloszláshoz tart. Ez előre látható volt már a sajátértékek alapján, mivel $\lambda_n = 1$, $\lambda_k < 1$, ($k = 1, 2, \dots, n-1$), így a hatványozás során λ_n kivételével valamennyi λ_k zérushoz közeledik, tehát $P_{ij}^{(N)} = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^N L_k(P)_{ij} + L_n(P)_{ij}$ -ből

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{ij}^{(N)} = L_n(P)_{ij},$$

ami (2.21) alapján valóban a kapott határeloszlás.

3. Bolyongás a síkon elnyelőfalakkal határolt rácstéglalapon.

Tekintsük a szomszédos síkbeli rácspontoknak m sorból és n oszlopból álló téglalapját, amely rácstéglalapot elnyelő rácspontszegéllyel zárunk körül úgy, hogy a teljes rác $m+2$ sorból és $n+2$ oszlopból áll. A sorokat 0-tól

¹⁰ Lásd: [4] 357–358. oldalakon.

$m+1$ -ig, az oszlopokat 0-tól $n+1$ -ig számozzuk. A bolyongás az (1.4)-ben megadott módon történik.

Az egy lépéses átmenet-valószínűségeket $m=3$, $n=4$ esetben az (1.5) hipermátrix tartalmazza.

Könnyű belátni, hogy az (1.5) hipermátrix átrendezéssel a (2.1)-ben megadott alakra hozható.

3. TÉTEL. $P_{(i,j) \rightarrow (\mu, \nu)}^{(N)}$ -nel jelölve annak valószínűségét, hogy a részecske az i -edik pontsor j -edik pontjából a μ -edik pontsor ν -edik pontjába megy át N lépésben, ahol $0 < i < m+1$, $0 < j < n+1$, azaz (i, j) és (μ, ν) egyaránt belső pontok:

$$(3.1) \quad P_{(i,j) \rightarrow (\mu, \nu)}^{(N)} = \frac{2^{N+2}}{(m+1)(n+1)} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{j-\nu}{2}} \left(\frac{r}{s} \right)^{\frac{i-\mu}{2}} \cdot \left\{ \sum_{l=1}^m \sin \frac{il\pi}{m+1} \sin \frac{\mu l\pi}{m+1} \sum_{k=1}^n \sin \frac{jk\pi}{n+1} \sin \frac{\nu k\pi}{n+1} \left(\sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{n+1} + \sqrt{rs} \cos \frac{l\pi}{m+1} \right)^N \right\}.$$

A keresett valószínűséget például az $m=3$, $n=4$ esetben a

$$(3.2) \quad P = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & 0 & s & & & \\ q & 0 & p & 0 & & s & & \\ 0 & q & 0 & p & & & s & \\ 0 & 0 & q & p & & & & s \\ \hline r & & & & 0 & p & 0 & 0 & s \\ & r & & & q & 0 & p & 0 & & s \\ & & r & & 0 & q & 0 & p & & s \\ & & & r & 0 & 0 & q & p & & s \\ \hline & & & & r & & & & 0 & p & 0 & 0 \\ & & & & & r & & & q & 0 & p & 0 \\ & & & & & & r & & 0 & q & 0 & p \\ & & & & & & & r & 0 & 0 & q & p \end{bmatrix}$$

hipermátrix N -edik hatványának elemei szolgáltatják, mégpedig az i -edik blokk sor μ -edik blokkjában a j -edik sor ν -edik eleme.

Legyen

$$(3.3) \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & q & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & s & 0 \\ r & 0 & s \\ 0 & r & 0 \end{bmatrix}.$$

Ekkor a példában szereplő P hipermátrix az alábbi direkt-szorzatok összegeként írható fel:

$$P_{4,3} = A_4 \times E_3 + E_4 \times B_3.$$

BIZONYÍTÁS. Ha a belső rács m sorból és n oszlopból áll, akkor a P hipermátrix a következő alakban írható:

$$P = P_{nm}^1 = A_n \cdot \times E_m + E_n \cdot \times B_m.$$

A hipermátrixok elméletéből ismert tétel alapján P kanonikus előállítása:

$$(V) \quad P = A \cdot \times E + E \cdot \times B = \sum_i \sum_j (\mathbf{u}_i \cdot \times \mathbf{v}_j)(a_i + b_j)(\mathbf{u}_i^* \cdot \times \mathbf{v}_j^*)$$

és

$$(VI) \quad P^N = \sum_i \sum_j (\mathbf{u}_i \cdot \times \mathbf{v}_j)(a_i + b_j)^N, \mathbf{u}_i^* \cdot \times \mathbf{v}_j^*$$

ahol az $\mathbf{u}_i$ és $\mathbf{u}_i^*$ vektorok az A mátrixnak, a $\mathbf{v}_j$, ill. $\mathbf{v}_j^*$ vektorok a B mátrixnak jobb-, ill. baloldali sajátvektorai, az a_i ill. b_j számok az A , ill. B mátrixok sajátértékei, és két vektor direkt szorzatán az

$$\mathbf{u} \cdot \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} v_1 \\ \mathbf{u} v_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u} v_n \end{bmatrix}$$

$n \cdot m$ -dimenziós vektort értjük. P spektrálfelbontásához tehát csak az A_n és B_m mátrixok kanonikus alakjára van szükség, amely viszont megtalálható (2.6)-ban.

Bevezetve a $p' = \frac{p}{p+q}$, $q' = \frac{q}{p+q}$, $r' = \frac{r}{r+s}$, $s' = \frac{s}{r+s}$ jelölést, (ahol $p+q+r+s=1$), (1.3) és (1.16) alapján

$$(3.4) \quad P^N = \sum_i \sum_j (\mathbf{u}_i \cdot \times \mathbf{v}_j) [(p+q)a_i + (r+s)b_j]^N (\mathbf{u}_i^* \cdot \times \mathbf{v}_j^*),$$

ahol $\mathbf{u}_i$ és $\mathbf{u}_i^*$ az A_n mátrix jobb-, ill. baloldali sajátvektorai, a $(p+q)a_i$ számok A_n sajátértékei ($i=1, 2, \dots, n$), a $\mathbf{v}_j$, ill. $\mathbf{v}_j^*$ vektorok a B_m mátrix jobb-, ill. baloldali sajátvektorai, az $(r+s)b_j$ számok a B_m mátrix sajátértékei.

A vektorok direkt-szorzatait részletesen kifejtve, a keresett valószínűsége az alábbi formulát nyerjük:

$$(3.5) \quad P_{(i,j) \rightarrow (\mu, \nu)}^{(N)} = \sum_{l=1}^m v_{il} v'_{l\mu} \sum_{k=1}^n u_{jk} u'_{k\nu} [(p+q)a_k + (r+s)b_l]^N.$$

Figyelembe véve a (2.6) formulát, e valószínűség a (3.1)-ben adott explicit alakot ölti.

¹¹ $n \cdot m$ a P mátrix rendjét jelöli, egy indexnek tekintendő.

Szimmetrikus bolyongás, azaz $p = q = r = s = \frac{1}{4}$ esetén

$$(3.6) \quad P_{(i,j) \rightarrow (\mu, \nu)}^{(N)} = \frac{2^2}{(n+1)(m+1)} \times \\ \times \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n \sin \frac{il\pi}{m+1} \sin \frac{\mu l\pi}{m+1} \sin \frac{jk\pi}{n+1} \sin \frac{\nu k\pi}{n+1} \left[\frac{\cos \frac{k\pi}{n+1} + \cos \frac{l\pi}{m+1}}{2} \right]^N.$$

Utóbbi eredményünk megegyezik JORDAN K. eredményével¹¹.

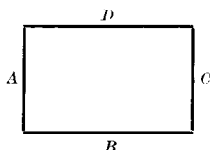
A (3.1) összefüggés alapján könnyen válaszolhatunk arra a kérdésre, mennyi annak valószínűsége, hogy a részecske az (i, j) pontból indulva $N+1$ lépésben a $(\mu, 0)$ határpontban nyelődik el. Nyilván:

$$(3.7) \quad P_{(i,j) \rightarrow (\mu, 0)}^{(N+1)} = q P_{(i,j) \rightarrow (\mu, 1)}^{(N)} = \frac{2^{N+2}}{(n+1)(m+1)} q \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{j-1}{2}} \left(\frac{r}{s} \right)^{\frac{i-\mu}{2}} \cdot \\ \cdot \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n \sin \frac{il\pi}{m+1} \sin \frac{\mu l\pi}{m+1} \sin \frac{jk\pi}{n+1} \sin \frac{\nu k\pi}{n+1} \left(\sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{n+1} + \sqrt{rs} \cos \frac{l\pi}{m+1} \right)^N.$$

Szimmetrikus bolyongásnál:

$$(3.8) \quad P_{(i,j) \rightarrow (\mu, 0)}^{(N+1)} = \frac{1}{(n+1)(m+1)} \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n \sin \frac{il\pi}{m+1} \sin \frac{\mu l\pi}{m+1} \cdot \\ \cdot \sin \frac{jk\pi}{n+1} \sin \frac{k\pi}{n+1} \left(\frac{\cos \frac{k\pi}{n+1} + \cos \frac{l\pi}{m+1}}{2} \right)^N.$$

Eredményeinket felhasználva, számítsuk ki annak valószínűségét, hogy a bolyongó részecske $N+1$ lépésben az



elnyelő téglalap A oldalának valamely pontjában nyelődik el. E valószínűséget megkapjuk, ha a (3.7), ill. (3.8) formulákban μ -szerint összegzünk 1-től m -ig, mivel a baloldali elnyelőfalnak m számú olyan pontja van, ahova a részecske eljuthat. (Az elnyelő korlát csúcspontjaiba a részecske nem tud el-

¹¹ Lásd: [6] 425. oldal.

jutni). A keresett valószínűséget $P_{A(i,j)}^{(N+1)}$ -gyel jelölve szimmetrikus bolyongás esetén:

$$(3.9) \quad P_{A(i,j)}^{(N+1)} = \frac{1}{2^N(n+1)(m+1)} \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n \sin \frac{il\pi}{m+1} \operatorname{ctg} \frac{l\pi}{2(m+1)} \sin \frac{jk\pi}{n+1} \cdot \sin \frac{k\pi}{n+1} \left[\cos \frac{k\pi}{n+1} + \cos \frac{l\pi}{m+1} \right]^N.$$

4. TÉTEL. Q_N -nel jelölve annak valószínűségét, hogy a részecske N lépés után még életben van:

$$(3.10) \quad Q_N = \frac{2^{N+2}}{(n+1)(m+1)} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{j}{2}} \left(\frac{r}{s} \right)^{\frac{i}{2}} \left\{ \sum_{l=1}^m \frac{[1 + (-1)^{l-1}] \left(\frac{s}{r} \right)^{\frac{m+1}{2}}}{\frac{s}{r} - 2 \sqrt{\frac{s}{r}} \cos \frac{l\pi}{m+1} + 1} \cdot \sin \frac{l\pi}{m+1} \sin \frac{il\pi}{m+1} \right\} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{[1 + (-1)^{k-1}] \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{n+1}{2}}}{\frac{p}{q} - 2 \sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{k\pi}{n+1} + 1} \cdot \sin \frac{k\pi}{n+1} \sin \frac{jk\pi}{n+1} \left[\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{k\pi}{n+1} + \sqrt{rs} \cos \frac{l\pi}{m+1} \right]^N \right\}.$$

BIZONYÍTÁS. A fenti valószínűség nyilván annak valószínűsége, hogy a részecske N lépésben az elnyelő falon belüli pontok valamelyikébe megy át, s mivel egymást kölcsönösen kizáró eseményekről van szó, a keresett valószínűség az egyes belső pontokba N lépésben történő átmenetek valószínűségeinek összege.

Ezek a valószínűségek, ha a részecske az i -edik pontsor j -edik pontjából indul, s a blokkok m -edrendűek, a (3.2) alakú hipermátrix N -edik hatványa $[(i-1)m+j]$ -edik sorának elemei, s Q_N éppen e sor elemeinek összege. Q_N kiszámítása céljából a (3.6) formulában egy μ és egy ν szerinti összegezést kell csak végeznünk, azaz

$$(3.11) \quad Q_N = \frac{2^{N+2}}{(n+1)(m+1)} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{j}{2}} \left(\frac{r}{s} \right)^{\frac{i}{2}} \left\{ \sum_{l=1}^m \left[\sum_{\mu=1}^m \left(\sqrt{\frac{s}{r}} \right)^\mu \sin \frac{\mu l\pi}{m+1} \right] \sin \frac{il\pi}{m+1} \right\} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\sum_{\nu=1}^n \left(\sqrt{\frac{p}{q}} \right)^\nu \sin \frac{\nu k\pi}{n+1} \right] \sin \frac{jk\pi}{n+1} \left[\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{k\pi}{n+1} + \sqrt{rs} \cos \frac{l\pi}{m+1} \right]^N \right\}.$$

Ezzel a (3.10)-et bebizonyítottuk, ugyanis a μ vagy ν szerinti összegezés eredménye lényegében már (2.14)-ben megtalálható.

Eredményünk *szimmetrikus bolyongás esetén*, $p = q = r = s = \frac{1}{4}$ helyettesítéssel a

$$(3.12) \quad Q_N = \frac{4}{(n+1)(m+1)} \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sin \frac{il\pi}{m+1} \operatorname{ctg} \frac{l\pi}{2(m+1)} \sin \frac{jk\pi}{n+1} \cdot \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2(n+1)} \left[\frac{\cos \frac{k\pi}{n+1} + \cos \frac{l\pi}{m+1}}{2} \right]^N \right\}$$

alakot ölti, ahol az összegezést csak páratlan l , ill. k -ra kell elvégezni.

5. TÉTEL. *Szimmetrikus bolyongás esetén az elnyelődés előtti lépésszám várható értéke:*

$$(3.13) \quad M(\xi) = \frac{4}{(m+1)(n+1)} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{il\pi}{m+1} \sin \frac{jk\pi}{n+1} \operatorname{ctg} \frac{l\pi}{2(m+1)} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2(n+1)}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} + \sin^2 \frac{l\pi}{2(m+1)}}.$$

BIZONYÍTÁS. Jelölje a ξ valószínűségi változó az elnyelődés előtti lépések számát, ekkor

$$P(\xi \leq N) = 1 - Q_N.$$

Könnyen nyerjük annak valószínűségét is, hogy a részecske pontosan N lépésben nyelődik el.

Nyilván

$$P(\xi = N) = P(\xi > N-1) - P(\xi > N).$$

Ennek alapján például szimmetrikus bolyongás esetén

$$(3.14) \quad P(\xi = N) = \frac{4}{(m+1)(n+1)} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sin \frac{il\pi}{m+1} \sin \frac{jk\pi}{n+1} \operatorname{ctg} \frac{l\pi}{2(m+1)} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2(n+1)} \cdot \left[\left(\frac{\cos \frac{k\pi}{n+1} + \cos \frac{l\pi}{m+1}}{2} \right)^{N-1} - \left(\frac{\cos \frac{k\pi}{n+1} + \cos \frac{l\pi}{m+1}}{2} \right)^N \right].$$

Figyelembe véve, hogy

$$\sum_{N=0}^{\infty} N \left(\frac{\cos \frac{k\pi}{n+1} + \cos \frac{l\pi}{m+1}}{2} \right)^{N-1} \left(1 - \frac{\cos \frac{k\pi}{n+1} + \cos \frac{l\pi}{m+1}}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{\cos \frac{k\pi}{n+1} + \cos \frac{l\pi}{m+1}}{2}},$$

valamint a $2 - \cos \frac{k\pi}{n+1} - \cos \frac{l\pi}{m+1} = \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} + \sin^2 \frac{l\pi}{2(m+1)}$ összefüggést, kapjuk a tétel állítását.

6. TÉTEL. *Annak valószínűsége, hogy az (i, j) pontból induló részecske mozgása meghatározatlan számú lépés után a $(\mu, 0)$ elnyelő pontban ér véget (természetesen a részecskét végül is elnyelő pontnak a $(0, 0)$, $(0, n+1)$, $(m+1, 0)$ és $(m+1, n+1)$ pontok kivételével az elnyelő fal bármely pontját választhatjuk):*

$$(3.15) \quad U_{(i,j) \rightarrow (\mu, 0)} = \frac{2}{m+1} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{j-1}{2}} \left(\frac{r}{s} \right)^{\frac{i-\mu}{2}} \frac{q}{\sqrt{rs}} \sum_{l=1}^m \sin \frac{il\pi}{m+1} \sin \frac{\mu l\pi}{m+1} \frac{\text{sh}(n+1-j) \mathcal{I}_l}{\text{sh}(n+1) \mathcal{I}_l}.$$

BIZONYÍTÁS. A kérdésre válaszolandó, nem kell mást tennünk, mint a (3.6) formulában elvégezni a

$$(3.16) \quad \sum_{N=0}^{\infty} \left[\sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{m+1} + \sqrt{rs} \cos \frac{l\pi}{m+1} \right]^N = \frac{1}{1 - \sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{m+1} - \sqrt{rs} \cos \frac{l\pi}{m+1}}$$

összegezést. Ezután a (3.5) képletben még k (vagy l) szerint is összegezzük.

Bevezetve az $\frac{1}{\sqrt{rs}} - 2 \sqrt{\frac{pq}{rs}} \cos \frac{k\pi}{n+1} = 2 \text{ch } \mathcal{I}_l$ jelölést, a bizonyítandó tételt nyerjük.

Eredményünk $p = q = r = s = \frac{1}{4}$ esetén

$$(3.17) \quad U_{(i,j) \rightarrow (\mu, 0)} = \frac{2}{m+1} \sum_{l=1}^m \sin \frac{il\pi}{m+1} \sin \frac{\mu l\pi}{m+1} \frac{\text{sh}(n+1-j) \mathcal{I}_l}{\text{sh}(n+1) \mathcal{I}_l}.$$

Utóbbi eredményünk megegyezik MC CREA és WHIPPLE eredményével. A nevezett szerzők eredményüket egy hidrodinamikai modell segítségével érték el. Megmutatjuk, hogy eredményük mátrixelméleti úton közvetlenül is kiszámít-

ható a (3.5), ill. (3.6) formulák felhasználása nélkül, ha ismerjük a (3.1) alatti P hipermátrix spektrálfelbontását.

Amikor a (3.5) formulában a (3.6) alatti összegezést elvégezzük, lényegében az alábbi mátrix-összegezést hajtjuk végre:

$$(3.18) \quad E + P + P^2 + \dots = (E - P)^{-1},$$

ahol P -vel a (3.1) alakú nm -edrendű hipermátrixot, E -vel az nm -edrendű egység mátrixot jelöltük.

Az $(E - P)^{-1}$ hipermátrix elemeit az alábbi egyszerű meggondolás alapján nyerhetjük:

$(E - P)^{-1}$ sajátvektorai megegyeznek $(E - P)$ sajátvektoraival (amelyek nem mások, mint P sajátvektorai), sajátértékei pedig $(E - P)$ sajátértékeinek reciprokjai. A P hipermátrix sajátértékeit λ_k -val jelölve ($k = 1, 2, \dots, nm$), az $(E - P)$ hipermátrix sajátértékei az $1 - \lambda_k$ számok, az $(E - P)^{-1}$ hipermátrix sajátértékei pedig az $\frac{1}{1 - \lambda_k}$ számok ($k = 1, 2, \dots, nm$).

Mivel¹²

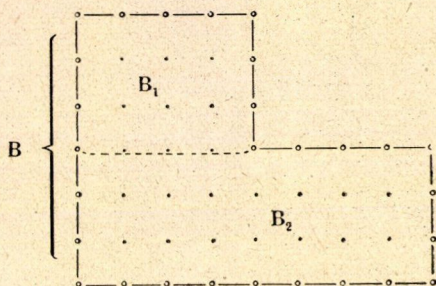
$$\frac{1}{1 - \lambda_k} = \frac{1}{1 - \sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{n+1} - \sqrt{rs} \cos \frac{l\pi}{m+1}},$$

ami megegyezik a (3.15) alatti kifejezéssel, P sajátvektorainak ismeretében (3.16) közvetlenül felírható, s természetesen (3.17) is.

4. Síkbeli elnyelő-falas bolyongás tetszőleges alakú tartományon

Bolyongjon a részecske egy tetszőleges alakú, elnyelő pontokkal határolt rácspon-tartományon. Válaszolni kívánunk arra a kérdésre, mennyi annak valószínűsége, hogy a részecske egy (i, j) belső pontból indulva mozgását egy kiválasztott $(u, 0)$ elnyelő-pontban fejezi be meghatározatlan számú lépés után.

Szemléletesség kedvéért tekintsük az alábbi egyszerű elrendezést:



¹² Mint könnyen látható: $|\lambda_k| < 1$.

Vezessük be az

$$(E-P)^{-1}=R, \quad (E-P_1)^{-1}=R_1, \quad (E-P_2)^{-1}=R_2$$

jelölést. Ekkor

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}.$$

Az R_1 , ill. R_2 reciprok hipermátrixok meghatározásának módját a téglalapon történő elnyelőfalas bolyongásnál ismertettük, ezeket a mátrixokat tehát ismerteknek tekinthetjük.

Az $(E-P)^{-1}$ meghatározása $(E-P')^{-1}$ ismeretében a J. SHERMAN és W. J. MORRISON által kidolgozott mátrixelméleti eljárás ismételt alkalmazásával megoldható. Ezen eljárás szerint, ha az $(E-P')$ és $(E-P)$ mátrixok egyetlen elemében különböznek, mondjuk $(E-P')$ -ben az i -edik sor j -edik eleme a_{ij} , $(E-P)$ -ben az ugyanezen helyen álló elem pedig $a_{ij}+k$, míg a többi elem megegyezik, akkor $(E-P)^{-1}$ -et az

$$(E-P)^{-1} = R - \frac{1}{k^{-1} + r_{ji}} r_i r^j \quad \left(\text{ha } r_{ji} \neq -\frac{1}{k} \right)$$

összefüggés szolgáltatja, ahol $R = (E-P')^{-1}$, r_i , ill. r^j az R mátrix i -edik oszlop-, ill. j -edik sorvektora, r_{ji} R j -edik sorának i -edik eleme. Ez esetben tehát egyetlen diád levonása szolgáltatná $(E-P)^{-1}$ -et.

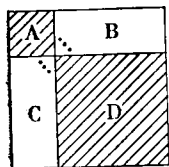
Példánkban $(E-P)$ az $(E-P')$ mátrixtól a diagonál blokkon kívüli 6 elemében különbözik, ennek megfelelően hatszor egymás után kell diádlevonást végeznünk, természetesen mindig az előző diád levonása után kapott reciprok mátrixot tekintve kisebbitendőnek.

Mivel téglalapokból tetszőleges alakú rácsponthalmazok összerakhatóak, eljárásunk tetszőleges tartományra alkalmazható. Az adott tartományt a vázolt példához hasonlóan téglalapok összegére bontjuk, felírjuk a teljes tartományon (példánkban a B tartományon) történő bolyongásnak megfelelő hipermátrixot, amelyben az egyes rész-téglalapokon történő bolyongásnak egy-egy diagonális blokk felel meg, s ezen felül a mátrixnak annyi pozitív eleme lesz, amennyi az egyes rész-téglalapok érintkezési pontjainak kétszeres száma. E pozitív elemeket 0-val helyettesítve, s a kapott diagonál blokkokból álló hipermátrixot a vele azonos rendű egységmátrixból levonva ismert módon invertálható, diagonális blokkokból álló hipermátrixot kapunk. Ezt a mátrixot elemenként módosítva a diagonál-blokkokon kívüli elemekkel, s SHERMAN—MORRISON tételét szukcesszíve alkalmazva meghatározhatjuk a kérdéses valószínűséget tartalmazó reciprok mátrixot. Módszerünk segítségével az egyes konkrét esetekben, természetesen a tartománytól függően, a keresett valószínűség explicit alakban is felírható.

Néhány megjegyzést kell tennünk a célhoz vezető lépések számának esetleges csökkentésére vonatkozólag.

Említettük, hogy a tartomány alakjára rátekintve, előre meg tudjuk mondani, hogy a tisztán diagonális blokkokból álló hipermátrix inverzéből hány diád szukcesszív levonásra lesz szükség. A levonandó diádok száma megegyezik a hipermátrix diagonálblokkokon kívüli elemeinek számával, amely szám viszont az egyes rész-téglalapok (példánkban a B_1 és B_2 tartományok) érintkezési belső pontjainak kétszeres száma. Nem túlságosan bonyolult tartományok esetén egyszerű mátrixelméleti megfontolás alapján a levonandó diádok száma felére csökkenthető. Ezen eljárást röviden az alábbi módon vázoljuk:

A példánkban szereplő $(E-P)$ hipermátrixot sematikusan ábrázolva nem csak az $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$ alakú hipermátrixot könnyű invertálni, hanem az



hipermátrixot is. Ugyanis:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix},$$

tehát itt is csak az A és D hipermátrix-blokkok inverzét kell ismernünk. Ezek után már csak a C blokk elemeinek megfelelő számú diád levonására lesz szükség ahhoz, hogy $(E-P)^{-1}$ -et megkapjuk. Ezzel az eljárással a levonandó diádok száma éppen annyi, mint amennyi az egyes rész-téglalapok (példánkban a B_1 és B_2 tartományok) érintkezési pontjainak száma.

Az $(E-P)^{-1}$ mátrix inverzének meghatározására irányuló vizsgálataink mátrixelméleti szempontból lényegében azon problémára vonatkoznak, hogy ha egy ismert reciprokkal bíró mátrix néhány elemét más elemmel helyettesítjük, hogyan nyerjük az ismert reciprokmátrixból a módosított mátrix reciprokat. Az eddigiekben a kiindulásul szolgáló mátrix kijelölt elemeit egyenként módosítottuk, hogy SHERMAN—MORRISON tételét alkalmazhassuk. E tételt RÓZSA PÁL általánosította, s kidolgozott egy eljárást, amelynek segítségével az ismert reciprokkal bíró mátrix akárhány elemét egyszerre módosítva a reciprokmátrixból egy alkalmasan képezett mátrix levonásával megkapjuk a módosított mátrix reciprokat. Ezen kivonandó mátrix képezése során egy újabb mátrix-invertálási műveletet kell végeznünk, amely egyes esetekben azonban gyorsabban is célhoz vezethet, mint a diádok szukcesszív levonása. Azt, hogy mikor melyik eljárást alkalmazzuk, a mátrix rendjétől, struktúrájától és egyéb gyakorlati (pl. elektronikus gépeknél programozási) szempontoktól kell függővé tennünk. Az alábbiakban röviden vázoljuk a módosított mátrix

reciprokának RÓZSA által kidolgozott módszerét,¹³ a számunkra érdekes esetre vonatkoztatva.

Legyen $A = [a_{ij}]$ N -edrendű kvadratikuss mátrix, amelynek reciprokát ismerjük:

$$A^{-1} = R = [r_{ij}].$$

A módosított mátrix, amelynek reciprokát keressük, legyen $B = A + K$, ahol

$$K = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N e_i k_{ij} e^j = \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{i=1}^{\mu} e_{\alpha_i} k_{\alpha_i \beta_j} e^{\beta_j} \quad \left(\begin{matrix} i=1, 2, \dots, \mu \\ j=1, 2, \dots, \mu \end{matrix} \right),$$

az e_i N -edrendű oszlopvektor i -edik eleme 1, a többi 0, az e^j N -edrendű sorvektor j -edik eleme 1, a többi 0, α_i és β_i azon sorok és oszlopok indexei, amelyekre $k_{\alpha_i \beta_j} \neq 0$.

Ekkor

$$B^{-1} = R - R_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu}^{1, 2, \dots, N} (K^{-1} + R_{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu}^{\beta_1, \dots, \beta_\mu})^{-1} R_{1, 2, \dots, N}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu}.$$

Ha A helyébe a fentebb vázolt $(E-P')$ hiper mátrixot, B helyébe az $(E-P)$ hiper mátrixot tesszük, ahol P a (4.1) hiper mátrixot jelöli, akkor a vázolt példában:

$$K = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & -s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s \\ \hline -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$K^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & -\frac{1}{r} & & \\ & & & & -\frac{1}{r} & \\ & & & & & -\frac{1}{r} \\ \hline -\frac{1}{s} & & & & & \\ & -\frac{1}{s} & & & & \\ & & -\frac{1}{s} & & & \\ & & & -\frac{1}{s} & & \end{array} \right]$$

¹³ Lásd [9] 11–17 oldal.

A (4.1) hipermátrix esetében

$$(E-P)^{-1} = R - R_{7,8,9,10,11,12}^{1,2,\dots,23} (K^{-1} + R_{7,8,9,10,11,12}^{7,8,9,10,11,12})^{-1} R_{1,2,\dots,23}^{7,8,9,10,11,12},$$

ahol $R = (E - P')^{-1}$, P' pedig az a hipermátrix, amelyet a (4.1) alatti P hipermátrixból a bekarikázott 6 elem 0-val való helyettesítése útján nyerünk.

Sematikusan az alábbi mátrixműveleteket kell végeznünk:

$$(E-P)^{-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{[diagonal pattern]} & \text{[empty]} \\ \hline \text{[empty]} & \text{[diagonal pattern]} \\ \hline \end{array} - \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \text{[diagonal pattern]} & \text{[empty]} \\ \hline \text{[empty]} & \text{[diagonal pattern]} \\ \hline \end{array} \right)^{-1} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{[diagonal pattern]} & \text{[empty]} \\ \hline \text{[empty]} & \text{[diagonal pattern]} \\ \hline \end{array}$$

Az üresen hagyott helyeken mindenütt 0 áll.

A zárójelen belüli hatodrendű mátrix inverzének kiszámítása lényegében harmadrendű mátrixok invertálását igényli. Ugyanis mivel az invertálandó mátrix

$$Q = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & & -\frac{1}{r} & \\ & A & & & -\frac{1}{r} & \\ & & & & & -\frac{1}{r} \\ \hline -\frac{1}{s} & & & & & \\ & -\frac{1}{s} & & & D & \\ & & -\frac{1}{s} & & & \\ & & & -\frac{1}{s} & & \end{array} \right]$$

alakú, Q^{-1} kiszámítását elvégezhetjük akár úgy, hogy miután kiszámítottuk A^{-1} -et és D^{-1} -et, kiindulunk az

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$$

mátrixból és szukcesszíve alkalmazzuk a SHERMAN—MORRISON-tételt, amelynek során most hatodrendű diádokat kell szukcesszíve levonnunk, akár úgy, hogy felhasználjuk az alábbi mátrix-azonosságot¹⁴:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & (C - DB^{-1}A)^{-1} \\ (B - AC^{-1}D)^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}.$$

¹⁴ Lásd: [1].

5. Bolyongás síkbeli rács-téglalapon visszaverő falak alkalmazásával

7. TÉTEL. *Annak a valószínűsége, hogy a bolyongó részecske N lépésben az (i, j) pontból az (μ, ν) pontba menjen át:*

$$\begin{aligned}
 P_{(i) \rightarrow (\mu \nu)}^{(N)} = & \frac{2^{N+2}}{mn} r p \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{i-\mu}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{j-\nu}{2}} \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{\left(\sin \frac{il\pi}{m} - \sqrt{\frac{r}{s}} \sin \frac{(i-1)l\pi}{m}\right)}{1 - 2\sqrt{rs} \cos \frac{l\pi}{m}} \cdot \right. \\
 & \cdot \frac{\left(\sin \frac{\mu l\pi}{m} - \sqrt{\frac{r}{s}} \sin \frac{(\mu-1)l\pi}{m}\right)}{1 - 2\sqrt{rs} \cos \frac{l\pi}{m}} \cdot \frac{\left(\sin \frac{jk\pi}{n} - \sqrt{\frac{p}{q}} \sin \frac{(j-1)k\pi}{n}\right)}{1 - 2\sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{n}} \cdot \\
 & \cdot \frac{\left(\sin \frac{\nu k\pi}{n} - \sqrt{\frac{p}{q}} \sin \frac{(\nu-1)k\pi}{n}\right)}{1 - 2\sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{n}} \left(\sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{n} + \sqrt{rs} \cos \frac{l\pi}{m} \right)^N \Bigg\} + \\
 (5.1) \quad & + \frac{2^{N+1}}{n} \frac{1 - \frac{r}{s}}{1 - \left(\frac{r}{s}\right)^m} \left(\frac{r}{s}\right)^{\mu-1} p \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{j-\nu}{2}} \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{jk\pi}{n} - \sqrt{\frac{p}{q}} \sin \frac{(j-1)k\pi}{n} \right) \cdot \\
 & \cdot \left(\sin \frac{\nu k\pi}{n} - \sqrt{\frac{p}{q}} \sin \frac{(\nu-1)k\pi}{n} \right) \left(\sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{n} + \frac{r+s}{2} \right)^N + \\
 & + \frac{2^{N+1}}{m} \frac{1 - \frac{p}{q}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^n} \left(\frac{p}{q}\right)^{\nu-1} r \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{i-\mu}{2}} \sum_{l=1}^m \left(\sin \frac{il\pi}{m} - \sqrt{\frac{r}{s}} \sin \frac{(i-1)l\pi}{m} \right) \cdot \\
 & \cdot \left(\sin \frac{\mu l\pi}{m} - \sqrt{\frac{r}{s}} \sin \frac{(\mu-1)l\pi}{m} \right) \left(\sqrt{rs} \cos \frac{l\pi}{m} + \frac{q+p}{2} \right)^N + \\
 & + \frac{\left(1 - \frac{p}{q}\right) \left(1 - \frac{r}{s}\right)}{\left[1 - \left(\frac{p}{q}\right)^n\right] \left[1 - \left(\frac{r}{s}\right)^m\right]} \left(\frac{p}{q}\right)^{\nu-1} \left(\frac{r}{s}\right)^{\mu-1} .
 \end{aligned}$$

A stacionárius határeloszlás:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{(ij) \rightarrow (\mu\nu)}^{(N)} = \frac{\left(1 - \frac{p}{q}\right) \left(1 - \frac{r}{s}\right)}{\left[1 - \left(\frac{p}{q}\right)^n\right] \left[1 - \left(\frac{r}{s}\right)^m\right]} \left(\frac{p}{q}\right)^{\nu-1} \left(\frac{r}{s}\right)^{\mu-1}.$$

BIZONYÍTÁS. Az (1.6) hipermátrix direkt-szorzatok összegeként az alábbi módon írható fel:

$$P = \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & q & p \end{bmatrix} \cdot \times E_3 + E_4 \cdot \times \begin{bmatrix} r & s & 0 \\ r & 0 & s \\ 0 & r & s \end{bmatrix} = A_4 \cdot \times E_3 + E_4 \cdot \times B_3.$$

m sor és n oszlop esetén pedig

$$(5.2) \quad P = A_n \cdot \times E_m + E_n \cdot \times B_m.$$

Szimmetrikus bolyongás esetén

$$(5.3) \quad P = A_n \cdot \times E_m + E_n \cdot \times A_m,$$

ahol például

$$A_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Az

$$A_n = [u_1, u_2, \dots, u_n] \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{bmatrix},$$

illetve

$$B_m = [v_1, v_2, \dots, v_m] \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \vdots \\ v_m^* \end{bmatrix}$$

spektrálfelbontásokban most

$$(5.4) \quad \begin{aligned} a_k &= 2\sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{n} \quad (k=1, 2, \dots, n-1) \quad \text{és} \quad a_n = p+q, \\ b_l &= 2\sqrt{rs} \cos \frac{l\pi}{m} \quad (l=1, 2, \dots, m-1) \quad \text{és} \quad b_m = r+s, \end{aligned}$$

$$(5.5) \quad \begin{aligned} u_{ik} &= \sqrt{\frac{2}{n}} p \left(\sqrt{\frac{p}{q}} \right)^i \left(\sin \frac{ik\pi}{n} - \sqrt{\frac{q}{p}} \sin \frac{(i-1)k\pi}{n} \right), \\ &\text{ha } i=1, 2, \dots, n-1 \quad \text{és} \quad u_{in}=1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'_{kj} &= \sqrt{\frac{2}{n}} \left(\sqrt{\frac{q}{p}} \right)^j \frac{\sin \frac{jk\pi}{n} - \sqrt{\frac{q}{p}} \sin \frac{(j-1)k\pi}{n}}{1 - 2\sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{n}}, \\ &\text{ha } k=1, 2, \dots, n-1 \quad \text{és} \quad u'_{nj} = \frac{1 - \frac{p}{q}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^n} \left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}. \end{aligned}$$

Analóg kifejezéseket kapunk a $\mathbf{v}_i$ és $\mathbf{v}_j^*$ vektorok megfelelő elemeire, ha az $n=m$, $p=r$, $q=s$ helyettesítést elvégezzük.

Felhasználva a (3.4') formulát, a tétel állítását kapjuk.

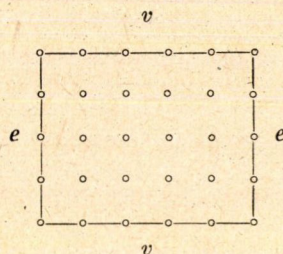
Felírjuk *szimmetrikus bolyongás esetére* annak valószínűségét, hogy a részecske N lépésben kiinduló helyzetébe térjen vissza. Az (5.1) formulából egyszerű számítással kapjuk:

$$(5.6) \quad \begin{aligned} P_{(ij) \rightarrow (ij)}^{(N)} &= \frac{1}{mn} \left\{ 1 + 2 \sum_{i=1}^m \left(\cos \frac{(2i-1)l\pi}{4m} \sin \frac{l\pi}{4m} \right)^2 \left(\cos \frac{l\pi}{m} \right)^{2N} + \right. \\ &\quad + 2 \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{(2j-1)k\pi}{4n} \sin \frac{k\pi}{4n} \right)^2 \left(\cos \frac{k\pi}{n} \right)^{2N} + \\ &\quad + 4 \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{\left(\cos \frac{(2i-1)l\pi}{4m} \cos \frac{(2j-1)k\pi}{4n} \sin \frac{l\pi}{4m} \sin \frac{k\pi}{4n} \right)^2}{\left(1 - \frac{1}{2} \cos \frac{l\pi}{m} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \cos \frac{k\pi}{n} \right)} \\ &\quad \left. \cdot \left[\frac{\cos \frac{l\pi}{m} + \cos \frac{k\pi}{n}}{2} \right]^N \right\}. \end{aligned}$$

6. Síkbeli bolyongás rács-téglalapon elnyelő- és visszaverő falak együttes alkalmazása esetén

Modellünket az alábbi ábra szemlélteti, ahol e elnyelő, v visszaverő falat jelöl. A bolyongási tartományt jelentő rácspontokat m sorban és $(n+1)$ oszlopban helyezzük el, a sorok számozása $1, 2, \dots, m$; az oszlopok számozása: $1, 2, \dots, n+1$.

Az ábrán jelzett esetben az átmenetvalószínűségeket tartalmazó hipermátrix számunkra érdekes része (az elnyelőfalas modelleknél alkalmazott megfontolás alapján) a következő:



$$(6.1) \quad P = \begin{bmatrix} \begin{array}{ccc|c} r & p & 0 & 0 \\ q & r & p & 0 \\ 0 & q & r & p \\ 0 & 0 & q & r \end{array} & \begin{array}{c} s \\ s \\ s \\ s \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc|c} r & & & \\ & r & & \\ & & r & \\ & & & r \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} p \\ p \\ p \\ p \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} s \\ s \\ s \\ s \end{array} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & q & p \end{bmatrix} \times E_3 + E_4 \times \begin{bmatrix} r & s & 0 \\ r & 0 & s \\ 0 & r & s \end{bmatrix} =$$

$$= A_4 \times E_3 + E_4 \times B_3.$$

8. TÉTEL. *Annak valószínűsége, hogy a részecske az (i, j) pontból N lépésben a (μ, ν) pontba megy át:*

$$(6.2) \quad P_{(ij) \rightarrow (\mu\nu)}^{(N)} = \frac{2^{N+2}}{mn} r \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{i-\mu}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{j-\nu}{2}} \left\{ \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\left(\sin \frac{il\pi}{m} - \sqrt{\frac{r}{s}} \sin \frac{(i-1)l\pi}{m} \right)}{1 - 2\sqrt{rs} \cos \frac{l\pi}{m}} \cdot \frac{\left(\sin \frac{\mu l\pi}{m} - \sqrt{\frac{r}{s}} \sin \frac{(\mu-1)l\pi}{m} \right)}{1 - 2\sqrt{rs} \cos \frac{l\pi}{m}} \right\} +$$

$$+ \frac{2^N}{n} \frac{1 - \frac{r}{s}}{1 - \left(\frac{r}{s}\right)^m} \left(\frac{r}{s}\right)^{\mu-1} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{j-\nu}{2}} \sum_{k=1}^n \sin \frac{jk\pi}{n+1} \sin \frac{\nu k\pi}{n+1} \left(\sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{n+1} + \sqrt{rs} \cos \frac{l\pi}{m} \right)^N + \frac{r+s}{2} \left)^N \right\}.$$

BIZONYÍTÁS. m sor és $n+1$ oszlop esetén $P = A_n \cdot E_m + E_m \cdot B_n$. A_n és B_m spektrálfelbontása számunkra már ismert. Felhasználva a (3.4'), (3.5) valamint az (5.3) és (5.4) összefüggéseket, a tétel állítását kapjuk.

Hasonló megfontolás alapján, mint amelyet az elnyelő-falas téglalapon történő bolyongásnál alkalmaztunk, annak valószínűsége, hogy a részecske az (i, j) pontból indulva $N+1$ lépésben a $(\mu, 0)$ pontban nyelődjek el:

$$P_{(i,j) \rightarrow (\mu, 0)}^{N+1} = q P_{(i,j) \rightarrow (\mu, 1)}^N$$

Ennek alapján:

$$(6.3) \quad P_{(i,j) \rightarrow (\mu, 0)}^{(N+1)} = \frac{2^{N+2}}{m \cdot n} q r \left(\frac{r}{s} \right)^{\frac{i-\mu}{2}} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{j-1}{2}} \cdot \left\{ \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{il\pi}{m} - \sqrt{\frac{r}{s}} \sin \frac{(i-1)l\pi}{m} \right) \cdot \left(\sin \frac{\mu l\pi}{m} - \sqrt{\frac{r}{s}} \sin \frac{(\mu-1)l\pi}{m} \right) \cdot \right. \\ \cdot \sin \frac{jk\pi}{n+1} \sin \frac{k\pi}{n+1} \left(\sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{n+1} + \sqrt{rs} \cos \frac{l\pi}{m} \right)^N \Big\} + \\ + \frac{2^N}{n} \frac{1 - \frac{r}{s}}{1 - \left(\frac{r}{s} \right)^m} q \left(\frac{r}{s} \right)^{m-1} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{j-1}{2}} \sum_{k=1}^n \sin \frac{jk\pi}{n+1} \sin \frac{k\pi}{n+1} \left(\sqrt{pq} \cos \frac{k\pi}{n+1} + \frac{r+s}{2} \right)^N.$$

9. TÉTEL. *Annak a valószínűsége, hogy a részecske az (i, j) pontból indulva, meghatározatlan számú lépés után végül a $(\mu, 0)$ pontban nyelődik el:*

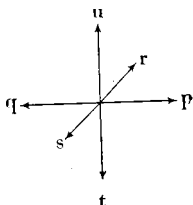
$$(6.4) \quad P_{(i,j) \rightarrow (\mu, 0)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m-1} \left(\sin \frac{il\pi}{m} - \sin \frac{(i-1)l\pi}{m} \right) \cdot \left(\sin \frac{\mu l\pi}{m} - \sin \frac{(\mu-1)l\pi}{m} \right) \frac{\text{sh}(n+1-j)\mathcal{G}}{\text{sh}(n+1)\mathcal{G}_l} + \frac{\text{sh}(n+1-j)\mathcal{G}}{\text{sh}(n+1)\mathcal{G}} \right\} = \\ = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{j}{n+1} \right) + \frac{2}{m} \sum_{l=1}^{m-1} \cos \left(i - \frac{1}{2} \right) \frac{l\pi}{m} \cos \left(\mu - \frac{1}{2} \right) \frac{l\pi}{m} \sin^2 \frac{l\pi}{2m} \frac{\text{sh}(n+1-j)\mathcal{G}_l}{\text{sh}(n+1)\mathcal{G}_l}.$$

ahol $2 \text{ ch } \mathcal{G}_l = 4 - 2 \cos \frac{l\pi}{m}$, $2 \text{ ch } \mathcal{G} = 2$.

BIZONYÍTÁS: A (6.3) formulában N szerint összegezzünk. Hasonlóan, mint az elnyelő falas esetben, most még k szerint is tudunk összegezni, s ezáltal képletünk rövidebb alakot ölt. Egyszerűség kedvéért eredményünket szimmetrikus bolyongás esetére írtuk fel.

7. Bolyongás a 3-dimenziós térben

A síkbeli bolyongásra vonatkozó eredményeink alapján nem nehéz eredményekre jutni 3-dimenziós, elnyelő- vagy visszaverő-fallal ellátott hasáb alakú rácspon-tartományon történő bolyongás esetében. A bolyongó részecske a tartomány bármely belső pontjából a 6 szomszédos pont valamelyikébe lép, rendre p, q, r, s, t, u valószínűségekkel az alábbi irányítás szerint:



Álljon a bolyongási tartomány $c+2$ rétegből, ahol minden réteget egy $b+2$ sorból és $a+2$ oszlopból álló rács téglalap alkot. Ha az elnyelő falakat nem tekintjük, a tartomány c rétegből, rétegenként b sorból és a oszlopból áll.

Ki akarjuk számítani annak valószínűségét, hogy a bolyongó részecske N lépésben az (x_0, y_0, z_0) egész koordinátákkal bíró pontból az (x_1, y_1, z_1) egész koordinátájú pontba jusson, azaz a

$$P_{(x_0, y_0, z_0) \rightarrow (x_1, y_1, z_1)}^{(N)}$$

átmenet-valószínűségeket.

Szemléletesség céljából tekintsük az $a=4, b=3, c=3$ esetet. Ekkor a tartomány belső pontjain történő bolyongás egylépéses átmenet valószínűségeit tartalmazó hipermátrix a következő: (l. 316. old.)

A hipermátrix tehát abc -edrendű és diagonál blokkjait a kétdimenziós bolyongás hipermátrixa alkotja. Ezen összetett hipermátrix direkt szorzatok összegeként a következő alakban írható fel:

$$A_a \times E_b \times E_c + E_a \times B_b \times E_c + E_a \times E_b \times C_c,$$

ahol a fenti példában:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & q & p \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & s & 0 \\ r & 0 & s \\ 0 & r & 0 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ u & 0 & t \\ 0 & u & 0 \end{bmatrix},$$

Az N lépéses átmenet-valószínűségeket ugyanezen összetett hipermátrix N -edik hatványának elemei szolgáltatják.

$P =$

$\begin{matrix} 0 & p & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & q & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} s \\ s \\ s \\ s \end{matrix}$		$\begin{matrix} t \\ t \\ t \\ t \end{matrix}$					
$\begin{matrix} r & & & \\ & r & & \\ & & r & \\ & & & r \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & p & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & q & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} s \\ s \\ s \\ s \end{matrix}$		$\begin{matrix} t \\ t \\ t \\ t \end{matrix}$				
	$\begin{matrix} r & & & \\ & r & & \\ & & r & \\ & & & r \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & p & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & q & 0 \end{matrix}$			$\begin{matrix} t \\ t \\ t \\ t \end{matrix}$			
$\begin{matrix} u & & & \\ & u & & \\ & & u & \\ & & & u \end{matrix}$			$\begin{matrix} 0 & p & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & q & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} s \\ s \\ s \\ s \end{matrix}$		$\begin{matrix} t \\ t \\ t \\ t \end{matrix}$		
	$\begin{matrix} u & & & \\ & u & & \\ & & u & \\ & & & u \end{matrix}$		$\begin{matrix} r & & & \\ & r & & \\ & & r & \\ & & & r \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & p & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & q & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} s \\ s \\ s \\ s \end{matrix}$		$\begin{matrix} t \\ t \\ t \\ t \end{matrix}$	
		$\begin{matrix} u & & & \\ & u & & \\ & & u & \\ & & & u \end{matrix}$		$\begin{matrix} r & & & \\ & r & & \\ & & r & \\ & & & r \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & p & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & q & 0 \end{matrix}$			$\begin{matrix} t \\ t \\ t \\ t \end{matrix}$
			$\begin{matrix} u & & & \\ & u & & \\ & & u & \\ & & & u \end{matrix}$			$\begin{matrix} 0 & p & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & q & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} s \\ s \\ s \\ s \end{matrix}$	
				$\begin{matrix} u & & & \\ & u & & \\ & & u & \\ & & & u \end{matrix}$		$\begin{matrix} r & & & \\ & r & & \\ & & r & \\ & & & r \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & p & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & q & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} s \\ s \\ s \\ s \end{matrix}$
					$\begin{matrix} u & & & \\ & u & & \\ & & u & \\ & & & u \end{matrix}$		$\begin{matrix} r & & & \\ & r & & \\ & & r & \\ & & & r \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & p & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & q & 0 \end{matrix}$

Ennek kiszámításához szükségünk lesz az (V) és (VI) formulák könnyen belátható általánosítására:

LEMMA. Ha az A hipermátrix előállítható

$$A_1 \times E \times \dots \times E + E \times A_2 \times \dots \times E + \dots + E \times E \times \dots \times A_n$$

alakban, akkor

$$(VII) \quad A^N = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_n} (\tilde{u}_{i_1}^1 \times \tilde{u}_{i_2}^2 \times \dots \times \tilde{u}_{i_n}^n) (\tilde{a}_{i_1}^1 + \tilde{a}_{i_2}^2 + \dots + \tilde{a}_{i_n}^n)^N \cdot (\tilde{u}_{i_1}^{*1} \times \tilde{u}_{i_2}^{*2} \times \dots \times \tilde{u}_{i_n}^{*n}),$$

ahol $\tilde{a}_k^k$ az A_k mátrix sajátértékeit, $\tilde{u}_{i_k}^k$, ill. $\tilde{u}_{i_k}^{k*}$ pedig ugyanezen mátrix jobb-, ill. baloldali sajátvektorait jelöli.

10. TÉTEL. Annak valószínűsége, hogy az (x_0, y_0, z_0) rácspontból induló részecske N lépésben az (x_1, y_1, z_1) rácspontba menjen át:

$$(7.1) \quad P_{(x_0, y_0, z_0) \rightarrow (x_1, y_1, z_1)}^{(N)} = \frac{2^{N+3}}{(a+1)(b+1)(c+1)} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{x_0-x_1}{2}} \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{y_0-y_1}{2}} \left(\frac{u}{t}\right)^{\frac{z_0-z_1}{2}} \sum_{k=1}^a \sum_{l=1}^b \sum_{m=1}^c \cdot \sin \frac{x_0 k \pi}{a+1} \sin \frac{x_1 k \pi}{a+1} \sin \frac{y_0 l \pi}{b+1} \sin \frac{y_1 l \pi}{b+1} \sin \frac{z_0 m \pi}{c+1} \sin \frac{z_1 m \pi}{c+1} \cdot \left(\sqrt{pq} \cos \frac{k \pi}{a+1} + \sqrt{rs} \cos \frac{l \pi}{b+1} + \sqrt{tu} \cos \frac{m \pi}{c+1} \right)^N.$$

BIZONYÍTÁS. Felhasználva a (VII) összefüggést, valamint az A_a, B_b , és C_c mátrixok spektrálfelbontására kapott eredményeket, a síkbeli bolyongásnál követett eljárással analóg módon nyertük a keresett valószínűsége a (7.1) összefüggést.

Szimmetrikus bolyongás esetén, azaz $p=q=r=s=t=u=\frac{1}{6}$ esetében összefüggésünk a következő alakot ölti:

$$(7.2) \quad \frac{2^3}{3^N(a+1)(b+1)(c+1)} \sum_{k=1}^a \sum_{l=1}^b \sum_{m=1}^c \sin \frac{x_0 k \pi}{a+1} \sin \frac{x_1 k \pi}{a+1} \sin \frac{y_0 l \pi}{b+1} \sin \frac{y_1 l \pi}{b+1} \cdot \sin \frac{z_0 m \pi}{c+1} \sin \frac{z_1 m \pi}{c+1} \left(\cos \frac{k \pi}{a+1} + \cos \frac{l \pi}{b+1} + \cos \frac{m \pi}{c+1} \right)^N.$$

Ez utóbbi eredményünk megegyezik JORDAN K. eredményével¹⁴.

Annak valószínűsége, hogy a bolyongó részecske az (x_0, y_0, z_0) rácspontból indulva $N+1$ lépésben az $(x_1, y_1, 0)$ pontban nyelődik el, nyilván most:

$$(7.3) \quad P_{(x_0, y_0, z_0) \rightarrow (x_1, y_1, 0)}^{(N+1)} = t P_{(x_0, y_0, z_0) \rightarrow (x_1, y_1, 1)}^{(N)}.$$

A kívánt elnyelődési valószínűséget tehát megkapjuk, ha a (7.1), ill. (7.2) formulákban $z_1 = 1$ -et írunk, és t -vel, ill. $\frac{1}{6}$ -dal szorzunk.

3-dimenziós esetben is válaszolni kívánunk arra a kérdésre, mennyi annak valószínűsége, hogy a bolyongó részecske meghatározatlan számú lépés után egy kijelölt pontban nyelődik el. Eredményünket egyszerűség kedvéért szimmetrikus bolyongás esetére írjuk fel.

¹⁴ Lásd [6].

A (7.2) formulában N szerint összegezve és alkalmazva a

$$3 - \cos \frac{k\pi}{a+1} - \cos \frac{l\pi}{b+1} = \text{ch } \vartheta_{kl}$$

helyettesítést, valamint elvégezve az m -szerinti összegezést, nyerjük:

$$(7.4) \quad P_{(x_0, y_0, z_0) \rightarrow (x_1, y_1, z_1)} = \frac{24}{(a+1)(b+1)} \sum_{k=1}^a \sum_{l=1}^b \sin \frac{x_0 k \pi}{a+1} \sin \frac{x_1 k \pi}{a+1} \cdot \\ \cdot \sin \frac{y_0 l \pi}{b+1} \sin \frac{y_1 l \pi}{b+1} \frac{\text{sh } z_0 \vartheta_{kl} \text{sh } (n+1-z_1) \vartheta_{kl}}{\text{sh } \vartheta_{kl} \text{sh } (n+1) \vartheta_{kl}}.$$

$\frac{1}{6}$ -dal szorozva és a $z_1 = 1$ helyettesítést elvégezve kapjuk a kívánt valószínűséget. Az utóbbi eredményünk megegyezik MC CREA és WHIPPLE eredményével.

Megjegyezzük, hogy az utóbbi eredmény ismét nem csak a (7.3) formulából kiindulva, hanem a 3-dimenziós bolyongásnak megfelelő P hipermátrixot alapul véve az $(E-P)^{-1}$ inverz hipermátrix elemeinek kiszámítása útján az N lépésre vonatkozó formulák kiszámítása nélkül közvetlenül is származtatható, akárcsak a kétdimenziós esetben.

Rámutatunk még, hogy a síkbeli esettel analóg módon, annak valószínűsége, hogy egy megjelölt rácspontból induló részecske végül is egy kijelölt elnyelő-rácspontban fejezze be életét, tetszőleges alakú hasábokból összerakható térbeli rácestartomány esetén kiszámítható.

Kiszámítjuk térbeli bolyongás esetén is annak valószínűségét, hogy a részecske N lépés után még életben van. Jelöljük ezt a valószínűséget Q_N -nel. A síkbeli bolyongásnál követett gondolatmenettel teljesen analóg módon nyerjük az eredményt, amely szimmetrikus bolyongás esetén a következő:

$$(7.5) \quad Q_N = \frac{2^3}{(a+1)(b+1)(c+1)} \sum_{k=1}^a \sum_{l=1}^b \sum_{m=1}^c \sin \frac{x_0 k \pi}{a+1} \sin \frac{y_0 l \pi}{b+1} \sin \frac{z_0 m \pi}{c+1} \cdot \\ \cdot \text{ctg } \frac{k\pi}{2(a+1)} \text{ctg } \frac{l\pi}{2(b+1)} \text{ctg } \frac{m\pi}{2(c+1)} \left[\frac{\cos \frac{k\pi}{a+1} + \cos \frac{l\pi}{b+1} + \cos \frac{m\pi}{c+1}}{3} \right]^N,$$

ahol az összegezést csak páratlan k, l, m -re kell elvégezni.

Ha a ξ valószínűségi változó jelöli az elnyelődés előtti lépések számát akkor

$$P(\xi \leq N) = 1 - Q_N$$

szolgáltatja ξ eloszlásfüggvényét.

Annak valószínűsége, hogy a részecske pontosan N lépésben nyelődik el az elnyelőfal valamelyik pontjában:

$$(7.6) \quad \begin{aligned} P(\xi=N) &= P(\xi>N-1) - P(\xi>N) = Q_{N-1} - Q_N = \\ &= \frac{2^3}{(a+1)(b+1)(c+1)} \sum_{k=1}^a \sum_{l=1}^b \sum_{m=1}^c \sin \frac{x_0 k \pi}{a+1} \sin \frac{y_0 l \pi}{b+1} \sin \frac{z_0 m \pi}{c+1} \cdot \\ &\quad \cdot \operatorname{ctg} \frac{k \pi}{2(a+1)} \operatorname{ctg} \frac{l \pi}{2(b+1)} \operatorname{ctg} \frac{m \pi}{2(c+1)} \cdot \\ &\quad \cdot \left[\frac{\cos \frac{k \pi}{a+1} + \cos \frac{l \pi}{b+1} + \cos \frac{m \pi}{c+1}}{3} \right]^{N-1} \cdot \left(1 - \frac{\cos \frac{k \pi}{a+1} + \cos \frac{l \pi}{b+1} + \cos \frac{m \pi}{c+1}}{3} \right). \end{aligned}$$

A várható elnyelődési lépésszám pedig:

$$(7.7) \quad \begin{aligned} M(\xi) &= \frac{4}{(a+1)(b+1)(c+1)} \sum_{k=1}^a \sum_{l=1}^b \sum_{m=1}^c \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\sin \frac{x_0 k \pi}{a+1} \sin \frac{y_0 l \pi}{b+1} \sin \frac{z_0 m \pi}{c+1} \operatorname{ctg} \frac{k \pi}{2(a+1)} \operatorname{ctg} \frac{l \pi}{2(b+1)} \operatorname{ctg} \frac{m \pi}{2(c+1)}}{\sin^2 \frac{k \pi}{2(a+1)} + \sin^2 \frac{l \pi}{2(b+1)} + \sin^2 \frac{m \pi}{2(c+1)}}. \end{aligned}$$

8. Bolyongás az n -dimenziós térben

A (VII). összefüggés alapján a két- és háromdimenziós bolyongásra vonatkozó eredményeink n -dimenziós rács-téglán történő bolyongásra is általánosítható mind elnyelő, mind visszaverő falas esetben. Itt most csak az elnyelőfalas bolyongással foglalkozunk, s anélkül, hogy teljességre törekednénk, fölírjuk néhány eredményünk n -dimenzióra való általánosítását.

Legyenek a méretek az n -dimenziós elnyelő-fallal övezett téglá belső, el nem nyelő pontjait tekintve, rács-egységben mérve: $a_1-1, a_2-1, \dots, a_n-1$.

10. TÉTEL. *Végezzon a részecske szimmetrikus bolyongást, azaz egy $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rácspontról bármely szomszédos rácspontra lépjen $\frac{1}{2n}$ valószínűséggel. Ekkor annak valószínűsége, hogy a részecske az $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rácspontról N lépésben az $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ rácspontra jusson:*

$$(8.1) \quad \begin{aligned} &\frac{2^n}{a_1 a_2 \dots a_n} \sum_{k_1=1}^{a_1-1} \sum_{k_2=1}^{a_2-1} \dots \sum_{k_n=1}^{a_n-1} \sin \frac{x_1 k_1 \pi}{a_1} \sin \frac{y_1 k_1 \pi}{a_1} \sin \frac{x_2 k_2 \pi}{a_2} \sin \frac{y_2 k_2 \pi}{a_2} \dots \\ &\dots \sin \frac{x_n k_n \pi}{a_n} \sin \frac{y_n k_n \pi}{a_n} \cdot \left[\frac{\cos \frac{k_1 \pi}{a_1} + \cos \frac{k_2 \pi}{a_2} + \dots + \cos \frac{k_n \pi}{a_n}}{n} \right]^N. \end{aligned}$$

Annak valószínűsége, hogy a részecske pontosan N lépésben nyelődjek el valamelyik elnyelő pontban:

$$(8.2) \quad \frac{2^n}{a_1 a_2 \dots a_n} \sum_{k_1=1}^{a_1-1} \dots \sum_{k_n=1}^{a_n-1} \sin \frac{x_1 k_1 \pi}{a_1} \dots \sin \frac{x_n k_n \pi}{a_n} \operatorname{ctg} \frac{k_1 \pi}{2a_1} \dots \operatorname{ctg} \frac{k_n \pi}{2a_n} \cdot \left[\frac{\cos \frac{k_1 \pi}{a_1} + \dots + \cos \frac{k_n \pi}{a_n}}{n} \right]^{N-1} \left(1 - \frac{\cos \frac{k_1 \pi}{a_1} + \dots + \cos \frac{k_n \pi}{a_n}}{n} \right).$$

A várható elnyelődési lépésszám, ha ξ jelöli az elnyelődésig megtett lépések számát:

$$(8.3) \quad M(\xi) = \frac{2^{n-1}}{a_1 \dots a_n} \sum_{k_1=1}^{a_1-1} \dots \sum_{k_n=1}^{a_n-1} \frac{\sin \frac{x_1 k_1 \pi}{a_1} \dots \sin \frac{x_n k_n \pi}{a_n} \operatorname{ctg} \frac{k_1 \pi}{2a_1} \dots \operatorname{ctg} \frac{k_n \pi}{2a_n}}{\sin^2 \frac{k_1 \pi}{2a_1} + \dots + \sin^2 \frac{k_n \pi}{2a_n}}.$$

Hasonló módon általánosíthatók a két- és háromdimenzióra vonatkozó többi eredményeink.

IRODALOM

- [1] AITKEN, A. C.: *Determinants and Matrices*. Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1956.
- [2] MCCREA, W. H.—WHIPPLE, F. J. W.: Random Paths in Two- and Three Dimensions, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **60** (1940), 281—298.
- [3] EGERVÁRY J.: Mátrixfüggvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról. *MTA Mat.-Fiz. Oszt. Közleményei*, **3** (1953), 417—458.
- [4] EGERVÁRY J.: On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice-dynamics, *Acta Sci. Math.* **15** (1954), 211—222.
- [5] FELLER, W. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. Wiley, New York—London, 1950.
- [6] JORDAN, K.: *Fejezetek a klasszikus valószínűségyszámításból*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956.
- [7] LOÈVE, M.: *Probability Theory*. Van Nostrand and Comp. Inc., New York, 1955.
- [8] RÉNYI A.: *Valószínűségszámítás*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
- [9] RÓZSA P.: A mátrixelmélet néhány új tételéről és azok alkalmazásairól a differencia- és differenciálegyenletek megoldására (Kandidátusi disszertáció), Budapest, 1956.
- [10] RÓZSA P.: Megjegyzések egy sztochasztikus mátrix spektrálfelbontásához. *MTA Mat.-Fiz. Oszt. Közleményei* **7** (1957), 199—205.

(Beérkezett: 1959. IX. 9.)

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete