NEMLINEÁRIS SPINOR MODELL SCHWINGER-FÉLE EGYENLETEIRŐL

Írta: PÓCSIK GYÖRGY

A közlemény célja egy HEISENBERG típusú egyenlettel és szokásos kvantálással definiált modell GREEN-függvényeire funkcionál differenciálegyenleteket találni. Ezen egyenletek generátora, az egyrészecske-propagátor egyenlete — szemben a kvantumelektrodinamika és PS(PS)-elmélet elsőrendű egyenleteivel — másodrendű; ez a nemlinearitás hatását tükrözi. Megoldásával kapcsolatban jelen közleményben csak néhány megjegyzésre szorítkozunk.

I.

A kvantumtérelmélet elemeiből ismeretes, hogy a fizikai GREEN-függvények centrális jelentőségűek, ismeretükben a rendszerről nyerhető összes információ meghatározható. Ennek következtében igen lényeges olyan zárt egyenleteket találni, melyekből a fizikai GREEN-függvények meghatározhatók. Ilyen elsőrendű, csatolt (funkcionál) differenciálegyenleteket a kvantumelektrodinamikára és a mezon-fermion PS-kölcsönhatásra először J. SCHWINGER (1951) talált ([1], Ch. XVIII.). A SCHWINGER-egyenletek integrálása (lásd pl. S. F. EDWARDS és R. E. PEIERLS klasszikus munkája [2]) a GREEN-függvények ún. folytonos-integrál reprezentációjára vezet. Ezt a nemperturbációs reprezentációt használva sok esetben fontos következtetéseket vonhatunk le a propagátorokra vonatkozóan (analitikus tulajdonságok, renormálás stb.).

A szerző egy előző dolgozatában [3] mezonok és fermionok derivált csatolását is tartalmazó THIRRING-modell renormálási viszonyait vizsgálva, a funkcionál-integrál formalizmus segítségével meghatározta a derivált csatolásból származó többrészecske propagátorokat. Nyitva maradt azonban az öncsatolt spinor-tér nemperturbációs tárgyalásának kérdése. Az itt felvetett probléma kissé általánosabb: keressük az öncsatolt spinor-tér fizikai GREEN-függvényeit azzal, hogy a kvantálás a szokásos, a téregyenletben megjelenő tömeg $m \geqq 0$, és a tér természetesen négydimenziós. Egy ilyen csatolás DYSON-féle értelemben biztos renormálhatatlan ([1], Ch. XV.), kivéve a THIRRING-modell esetét (az egy térdimenzió miatt). Ennélfogva a kérdést perturbációszámítástól mentesen kell tárgyalni. Problémánk azért is érdekes, mert az összes perturbációs közelítésben renormálhatatlan direkt négyfermion kölcsönhatás a fentihez hasonló szerkezetű.

A továbbiakban első lépésként egyenleteket keresünk a fizikai GREEN-függvényekre. Be lehet látni, hogy az egyrészecske-propagátorra talált egyenletből a többrészecske-propagátorok egyenletei már könnyen származtathatók, ezért a legegyszerűbb fizikai GREEN-függvény SCHWINGER-egyenletét fogjuk csak levezetni. Meggondolásainkban a SCHWINGER által bevezetett külső forrás technikát használjuk. Itt jegyezzük meg, hogy a dolgozatban néhány egyenlet bizonyításánál feltételezzük az S-mátrix csatolási állandó szerinti sorbafejthetőségét. Mármost tudjuk, hogy ez jelenleg szigorúan nem áll. Megnyugtató és érdekes azonban az a tény, hogy az említett egyenletek, és így végeredményünk is a formálisan kifejtett S-mátrixot nem használva, csupán a kölcsönhatási- és HEISENBERG-reprezentáció létezéséből is származtatható [4].

II.

Mint említettük, a külső forrás technikát használjuk. E módszer lényege az, hogy a kölcsönhatási HAMILTON-operátorba matematikai segédmennyiségeket, az ún. $\eta(x), \overline{\eta}(x)$ külső spinor-forrásokat vezetjük be, melyekről feltesszük, hogy minden fermionváltozóval antikommutálnak. Így az S-mátrix és a GREEN-függvények is $\eta, \overline{\eta}$ funkcionáljai lesznek; a számítás utolsó lépésében az $\eta, \overline{\eta} \to 0$ határátmenetet vesszük.

A következő kölcsönhatási LAGRANGE-függvényből indulunk ki:

$$L(x) = -H(x) = g\overline{\varphi}_\alpha(x)\overline{\varphi}_\beta(x)\varphi_\beta(x)\varphi_\alpha(x) + \overline{\eta}_\alpha(x)\varphi_\alpha(x) + \overline{\varphi}_\alpha(x)\eta_\alpha(x), \tag{1}$$

ahol a $\varphi(x)$ szabad-tér eleget tesz az

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right)\varphi(x) = 0 \qquad \begin{aligned} &g^{00} = -g^{ii} = 1 \\ &\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \\ &\overline{\varphi} = \varphi^+\gamma^0 \\ &\mu = 0, \ldots, 3 \end{aligned} \tag{2}$$

DIRAC-egyenletnek, φ a

$$\{\varphi_\sigma(x), \overline{\varphi}_\varrho(y)\} = -iS_{\sigma\varrho}(x-y) \tag{3}$$

szerint van kvantálva. Az S^c szabad-részecske GREEN-függvény, mint ismeretes, eleget tesz az

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right)_{\nu\sigma} S^c_{\sigma\varrho}(x-y) = -\delta_{\nu\varrho}\delta(x-y) \tag{4}$$

egyenletnek és $\varphi_\sigma(x)$, $\overline{\varphi}_\varrho(y)$ párosításával hozható kapcsolatba

$$i\overbrace{\varphi_\sigma(x)\overline{\varphi}_\varrho}(y) = S^c_{\sigma\varrho}(x-y). \tag{5}$$

Szükségünk lesz a WICK-algebra alaptételének arra az általánosítására ([5], 34.2 §), mely $(n+1)$ lineáris operátor, $A, B_1, \ldots, B_n$ kronologikus szorzatának vákuum-várhatóértékére vonatkozik; a szokásos jelölésekkel:

$$\langle O|T(AB_1\ldots B_n)|O\rangle = \sum_{1\leq i\leq n} \langle O|T(\overbrace{AB_1\ldots B_i}\ldots B_n)|O\rangle, \tag{6}$$

ahol a $\sum$ kiterjesztendő az összes lehetséges $\overbrace{AB_i}$ párosításra. E tétel a WICK-féle tétel alapján azonnal belátható, mindkét oldalon az $A, B_1, \ldots, B_n$ összes lehetséges komplett párosításainak összege jelenik meg.

Tekintettel arra, hogy az egyrészecske-propagátort éppen az általánosított WICK-tétel alapján akarjuk átalakítani, szükséges egy lineáris (A) és egy nemlineáris $(L(x), S)$ operátor párosítását definiálni. Később be fogjuk látni, hogy

1. az A és $L = O_1 \ldots O_j$ (O_j lineáris) operátorok párosítását az

$$\overbrace{AL} = \sum_{1\leq i\leq j} \overbrace{AO_1\ldots O_i}\ldots O_j \tag{7}$$

relációval célszerű definiálni; pl.

$$\begin{aligned}\overbrace{\varphi_\sigma(x)L}(z) = {} & g\,\overbrace{\varphi_\sigma(x)\bar\varphi_\alpha}(z)\bar\varphi_\beta(z)\varphi_\beta(z)\varphi_\alpha(z) - g\,\overbrace{\varphi_\sigma(x)\bar\varphi_\beta}(z)\cdot\\ & \bar\varphi_\alpha(z)\varphi_\beta(z)\varphi_\alpha(z) + \overbrace{\varphi_\sigma(x)\bar\varphi_\alpha}(z)\,\eta_\alpha(z),\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\overbrace{\bar\varphi_\varrho(y)L}(z) = {} & g\,\overbrace{\bar\varphi_\varrho(y)\varphi_\beta}(z)\bar\varphi_\alpha(z)\bar\varphi_\beta(z)\varphi_\alpha(z) - g\,\overbrace{\bar\varphi_\varrho(y)\varphi_\alpha}(z)\cdot\\ & \bar\varphi_\alpha(z)\bar\varphi_\beta(z)\varphi_\beta(z) - \overbrace{\bar\varphi_\varrho(y)\varphi_\alpha}(z)\,\bar\eta_\alpha(z);\end{aligned} \tag{9}$$

2. ha S-re elfogadjuk a perturbációszámításos

$$S = T\exp\Big(i\int_{-\infty}^{\infty} L(x)\,dx\Big) \tag{10}$$

alakot, akkor $\overbrace{AS}$ természetes definíciója

$$\overbrace{AS} = i\int_{-\infty}^{\infty} dz\, T\Big(\overbrace{AL}(z)\exp\Big(i\int_{-\infty}^{\infty} L(x)\,dx\Big)\Big) = i\int_{-\infty}^{\infty} dz\, T(\overbrace{AL}(z)S). \tag{11}$$

Ezen előkészületek után alakítsuk át az egyrészecske-propagátorral szoros kapcsolatban álló

$$g_{\sigma\varrho}(x,y) = i\langle O|T(\varphi_\sigma(x)\bar\varphi_\varrho(y)S)|O\rangle \tag{12}$$

mennyiséget (g az összes vizsgálhatatlan vákuum-átmeneteket is tartalmazza).

(6), (5), (11), (8) alapján

$$
(13)\qquad g_{\sigma\varrho}(x, y)=i\langle O|\,T(\overparen{\varphi_\sigma(x)\overline{\varphi}}_{\varrho}(y)S)\,|O\rangle+i\langle O|\,T(\overparen{\varphi_\sigma(x)\overline{\varphi}_{\varrho}(y)}S)\,|O\rangle=
$$

$$
=S^{c}_{\sigma\varrho}(x-y)\langle O|S|O\rangle+i\int\limits_{-\infty}^{\infty}dz\,\{g\,S^{c}_{\sigma\alpha}(x-z)\langle O|T(\overline{\varphi}_\beta(z)\varphi_\beta(z)\varphi_\alpha(z)\overline{\varphi}_\varrho(y)S)|O\rangle-
$$

$$
-g\,S^{c\,\prime}_{\sigma\beta}(x-z)\langle O|\,T(\overline{\varphi}_\alpha(z)\varphi_\beta(z)\varphi_\alpha(z)\overline{\varphi}_\varrho(y)S)\,|O\rangle+
$$

$$
+S^{c}_{\sigma\alpha}(x-z)\langle O|\,T(\eta_\alpha(z)\overline{\varphi}_\varrho(y)S)\,|O\rangle\}.
$$

Alkalmazva az $\left(i\gamma^\mu\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}-m\right)_{\nu\sigma}$ operátort, (4) miatt

$$
(14)\qquad \left(i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}-m\right)_{\nu\sigma}g_{\sigma\varrho}(x, y)=-\delta_{\nu\varrho}\delta(x-y)\langle O|S|O\rangle-
$$

$$
-2ig\langle O|\,T(\overline{\varphi}_\alpha(x)\varphi_\alpha(x)\varphi_\nu(x)\overline{\varphi}_\varrho(y)S)\,|O\rangle-i\eta_\nu(x)\langle O|\,T(\overline{\varphi}_\varrho(y)S)\,|O\rangle.
$$

(14) egyenletből már könnyű eljutni a $G_{\sigma\varrho}(x, y)=g_{\sigma\varrho}(x, y)\langle O|S|O\rangle^{-1}$ egyrészecske-propagátor SCHWINGER-egyenletéhez.

Következő feladatunk (14)-ben a nemlinearitás miatt fellépő kifejezést $g_{\nu\varrho}$ variációs deriváltjaival kifejezni. (10) és (1) alapján

$$
(15)\qquad \frac{\delta S}{\delta\eta_\alpha(z)}=i\,T(\overline{\varphi}_\alpha(z)S),\qquad \frac{\delta S}{\delta\overline{\eta}_\alpha(z)}=i\,T(\varphi_\alpha(z)S),
$$

ahol $\dfrac{\delta}{\delta\eta}\left(\dfrac{\delta}{\delta\overline{\eta}}\right)$ jobb (bal) deriváltat jelöl. (15) perturbációszámítás nélkül is igazolható. (15)-ből

$$
(16)\qquad \frac{\delta^2 S}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)\delta\eta_\beta(y)}=i\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)}T(\overline{\varphi}_\beta(y)S)=-i\,T\left(\overline{\varphi}_\beta(y)\frac{\delta S}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)}\right)=
$$

$$
=T(\overline{\varphi}_\beta(y)\varphi_\alpha(x)S).
$$

Most már látjuk, hogy

$$
(17)\qquad \frac{\delta^2 g_{\nu\varrho}(x, y)}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)\delta\eta_\alpha(x)}=i\langle O|\,T(\overline{\varphi}_\alpha(x)\varphi_\alpha(x)\varphi_\nu(x)\overline{\varphi}_\varrho(y)S)\,|O\rangle.
$$

(17)-et (14)-be téve, kapjuk az

$$
(18)\qquad \left(i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}-m\right)_{\nu\sigma}g_{\sigma\varrho}(x, y)=-\delta_{\nu\varrho}\delta(x-y)\langle O|S|O\rangle-2g\frac{\delta^2 g_{\nu\varrho}(x, y)}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)\delta\eta_\alpha(x)}-
$$

$$
-i\eta_\nu(x)\langle O|\,T(\overline{\varphi}_\varrho(y)S)\,|O\rangle
$$

egyenletet. Tegyünk ebbe $g_{\sigma\varrho}$ helyett $G_{\sigma\varrho}\langle O|S|O\rangle$-t, ahol a G fizikai GREEN-függvény az összes sugárzási korrekciót tartalmazza, de nem tartalmazza a nemösszefüggő FEYNMAN-diagrammokat. Ezáltal (18) a komplett GREEN-függvényt tartalmazó formába írható. Mivel

$$\frac{\delta g_{\nu\varrho}(x,y)}{\delta\eta_\alpha(x)} = \frac{\delta G_{\nu\varrho}(x,y)}{\delta\eta_\alpha(x)}\langle O|S|O\rangle + G_{\nu\varrho}(x,y)\frac{\delta\langle O|S|O\rangle}{\delta\eta_\alpha(x)}, \tag{19}$$

vetkezik, hogy

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2 g_{\nu\varrho}(x,y)}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)\delta\eta_\alpha(x)} &= \frac{\delta^2 G_{\nu\varrho}(x,y)}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)\delta\eta_\alpha(x)}\langle O|S|O\rangle - \frac{\delta G_{\nu\varrho}(x,y)}{\delta\eta_\alpha(x)}\cdot\frac{\delta\langle O|S|O\rangle}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)} + \\ &+ \frac{\delta G_{\nu\varrho}(x,y)}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)}\cdot\frac{\delta\langle O|S|O\rangle}{\delta\eta_\alpha(x)} + G_{\nu\varrho}(x,y)\frac{\delta^2\langle O|S|O\rangle}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)\delta\eta_\alpha(x)},\end{aligned} \tag{20}$$

vagyis (18) az

$$\begin{aligned}\left(\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right)_{\nu\sigma} G_{\sigma\varrho}(x,y) &= -\delta_{\nu\varrho}\delta(x-y) - i\eta_\nu(x)\frac{\langle O|T(\overline{\varphi}_\varrho(y)S)|O\rangle}{\langle O|S|O\rangle} - \\ &-2g\left(\frac{\delta^2 G_{\nu\varrho}(x,y)}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)\delta\eta_\alpha(x)} + \frac{\delta G_{\nu\varrho}(x,y)}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)}\,\frac{\delta\ln\langle O|S|O\rangle}{\delta\eta_\alpha(x)} + \right. \\ &\left. + \frac{\delta\ln\langle O|S|O\rangle}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)}\cdot\frac{\delta G_{\nu\varrho}(x,y)}{\delta\eta_\alpha(x)} + \frac{G_{\nu\varrho}(x,y)}{\langle O|S|O\rangle}\,\frac{\delta^2\langle O|S|O\rangle}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)\delta\eta_\alpha(x)}\right)\end{aligned} \tag{21}$$

ormát ölti. Egyszerűbb alakba írni (21)-et, vezessük be a

$$\begin{aligned}\langle\varphi_\alpha(x)\rangle &\equiv \frac{\langle O|T(\varphi_\alpha(x)S)|O\rangle}{\langle O|S|O\rangle} = \frac{1}{i}\,\frac{\delta\ln\langle O|S|O\rangle}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)} \\ \langle\overline{\varphi}_\alpha(x)\rangle &\equiv \frac{\langle O|T(\overline{\varphi}_\alpha(x)S)|O\rangle}{\langle O|S|O\rangle} = \frac{1}{i}\,\frac{\delta\ln\langle O|S|O\rangle}{\delta\eta_\alpha(x)} \\ \langle\overline{\varphi}_\alpha(x)\varphi_\alpha(x)\rangle &\equiv \frac{\langle O|T(\overline{\varphi}_\alpha(x)\varphi_\alpha(x)S)|O\rangle}{\langle O|S|O\rangle} = \\ &= iSp\,G(x,x) = \frac{1}{\langle O|S|O\rangle}\,\frac{\delta^2\langle O|S|O\rangle}{\delta\eta_\alpha(x)\delta\eta_\alpha(x)}\end{aligned} \tag{22}$$

átlagokat. (22)-vel (21) helyett

$$\begin{aligned}&\left\{i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - m + 2g\left(\frac{\delta^2}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)\delta\eta_\alpha(x)} + i\langle\varphi_\alpha(x)\rangle\frac{\delta}{\delta\eta_\alpha(x)} + i\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}_\alpha(x)}\langle\overline{\varphi}_\alpha(x)\rangle + \right.\right. \\ &\left.\left. + iSp\,G(x,x)\right)\right\}_{\nu\sigma} G_{\sigma\varrho}(x,y) = -\delta(x-y)\delta_{\nu\varrho} - i\eta_\nu(x)\langle\overline{\varphi}_\varrho(y)\rangle\end{aligned} \tag{23}$$

írható, vagy rövidebben

$$\left\{i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m + 2g\left\langle\left(\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)} + i\varphi(x)\right)\left(\frac{\delta}{\delta\eta(x)} + i\bar{\varphi}(x)\right)\right\rangle\right\} G(x,y) = \tag{24}$$
$$= -\delta(x-y) - i\eta(x)\cdot\langle\bar{\varphi}(y)\rangle,$$

ahol $\langle\ \rangle$ csak téroperátorokra értendő. Kitűzött feladatunkat ezzel megoldottuk.

Az egyrészecske-propagátor SCHWINGER-egyenletének (24) alakja hasonlít a β-bomlásra (sztatikus határesetben) R. ARNOWITT és S. DESER által felírt egyenlethez [6].

A (23) egyenletet megoldva, az egyrészecske GREEN-függvényt a $G = G(\eta, \bar{\eta}, \langle\varphi\rangle, \langle\bar{\varphi}\rangle, g, x, y)$ alakban kapjuk meg. Fordítva, könnyű látni, hogy $Sp\,G(x,x)$ meghatározza a benne szereplő átlagokat. Pl. $\langle\varphi_\sigma(x)\rangle$-t tekintve, a (13), (14) alatti gondolatmenettel kapjuk, hogy

$$\langle\varphi_\sigma(x)\rangle = \frac{i}{\langle O|S|O\rangle}\int_{-\infty}^{\infty} dz \langle O|T(\varphi_\sigma(x)L(z)S)|O\rangle = \frac{2g}{\langle O|S|O\rangle}\int_{-\infty}^{\infty} dz\, S^c_{\sigma\alpha}(x-z)\cdot$$
$$\cdot\langle O|T(\bar{\varphi}_\beta(z)\varphi_\beta(z)\varphi_\alpha(z)S)|O\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} dz\, S^c_{\sigma\alpha}(x-z)\eta_\alpha(z) = \tag{25}$$
$$= \frac{2g}{\langle O|S|O\rangle}\int_{-\infty}^{\infty} dz\, S^c_{\sigma\alpha}(x-z)\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\alpha(z)} Spg(x,x) + \int_{-\infty}^{\infty} dz\, S^c_{\sigma\alpha}(x-z)\eta_\alpha(z),$$

és

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right)_{\varrho\sigma}\langle\varphi_\sigma(x)\rangle = -\frac{2g}{\langle O|S|O\rangle}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\varrho(x)} Spg(x,x) - \eta_\varrho(x). \tag{26}$$

Innen pedig látható az állítás:

$$\left\{i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m + 2ig\,Sp\,G(x,x)\right\}_{\varrho\sigma}\langle\varphi_\sigma(x)\rangle = -\eta_\varrho(x) - 2g\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\varrho(x)} Sp\,G(x,x). \tag{27}$$

A (27) egyenlet és annak $\langle\bar{\varphi}\rangle$-ra felírt megfelelője, szemben pl. a kvantumelektrodinamikával, felesleges az elméletben. A különbség oka egyszerűen abban rejlik, hogy a kvantumelektrodinamikában az elektromágneses tér átlagára felírt egyenletnek (ami (27) analogonja) van mondanivalója: éppen a foton GREEN-függvényére vezet. Öncsatolt spinor térnél $\eta, \bar{\eta}\to 0$-ra $\langle\varphi\rangle, \langle\bar{\varphi}\rangle\to 0$ következik be, ennek következtében (23)-ban az átlagok adottnak vehetők, mert a fizikai S'_F GREEN-függvényben úgysem fognak szerepelni: $S'_F(x,y) = G(0,0,0,0,g,x,y)$.

IRODALOM

[1] UMEZAWA, H.: *Quantum Field Theory*, North—Holland Publ. Co., Amsterdam, 1956.
[2] EDWARDS, S. F.—PEIERLS, R. E.: Field equations in functional form, Proc. Roy. Soc. (A) **24** (1954), 224.
[3] PÓCSIK, G.: Meson-fermion pv-interaction in the Thirring model, II., *Acta Phys. Hung.*, sajtó alatt.
[4] PÓCSIK, G.: Schwinger's equation for one-body propagator of a selfcoupled spinor field, *Acta Phys. Hung.*, sajtó alatt.
[5] BOGOLIUBOV, N. N.—SHIRKOV, D. V.: *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Inters. Publ., Inc., New York, 1959.
[6] ARNOWITT, R.—DESER, S.: Renormalization of derivative coupling theories, Phys. Rev., **100** (1955), 349.

(Beérkezett: 1960. IV. 20)

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem
Elméleti Fizikai Intézete