A SZIMPLEX MÓDSZER KVADRATIKUS PROGRAMOZÁS ESETÉRE*

Írta: PHILIP WOLFE

1. Bevezetés

Ebben a cikkben „kvadratikus programozáson" több, lineáris egyenlőtlenségek által kifejezett megszorításoknak alávetett valós változó azon értékének a meghatározását értjük, amelyek egy kvadratikus függvény értékét extremálissá teszik. Azonkívül, hogy egy lépést jelent ama bonyolult nem-lineáris programozási feladatok megoldása felé, melyek közgazdasági modelleknél gyakran fellépnek, egy kvadratikus programozásnál használható számolási eljárás számos, önmagában is érdekes problémánál is alkalmazható. Ilyenek:

Regresszió. Észlelési adatoknak legkisebb négyzetek elve alapján való illesztése egy függvényhez, azon feltétel mellett, hogy bizonyos paraméterekről a priori ismeretes, hogy adott egyenlőtlenségi megszorításoknak tesznek eleget (pl. nem-negatívak).

Efficiens termelés. A nyereség maximalizálása lineáris termelési függvények és lineárisan változó határköltségek feltételezése mellett.

„Aktatáska"-probléma. Meghatározni valószínűségi változóknak egy olyan kombinációját, melynek várható értéke adott szám és szórásnégyzete minimális.

Konvex programozás. Egy általános konvex függvény minimumának meghatározása lineáris megszorítások mellett, kvadratikus approximáció segítségével.

A probléma változói alkossanak egy n-dimenziós $x = (x_1, \ldots, x_n)$ vektort (a $'$ jel transzponálást jelent; x-et oszlopvektornak tekintjük, azaz egy n-szer 1-es matrixnak). Legyen A egy m-szer n-es matrix és b egy m-szer 1-es; ekkor a feladat lineáris megszorításait

$$x \geqq 0, \quad Ax = b \tag{1}$$

alakba írhatjuk, azaz

$$x_j \geqq 0 \ (j = 1, \ldots, n), \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

* Econometrica, **27**, 3 (July 1959) 382—398.

Emlékeztetünk arra, hogy lineáris egyenlőség és egyenlőtlenség-megszorítások bármely kombinációja is (1) alakban írható, ha addicionális változókat vezetünk be.

Legyen p egy 1-szer n-es matrix és C egy n-szer n-es szimmetrikus matrix. Az ún. objektív függvényt, azt a (részben) kvadratikus függvényt, melynek szélsőértékét keressük, az (1) megszorítások mellett,

$$f(\lambda, x) = \lambda p x + \frac{1}{2} x' C x \tag{2}$$

vagy

$$f(\lambda, x) = \lambda \sum_j p_j x_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} x_j C_{jk} x_k$$

alakban fogjuk írni, ahol az egyetlen paraméter, λ, amely nem-negatív és valós, alkalmasan megválasztható. Feladatunk mármost a következőképpen fogalmazható meg:

A $\lambda \geqq 0$-ra vonatkozó kvadratikus probléma:

(3) Minimalizálandó $\quad f(\lambda, x) = \lambda p x + \frac{1}{2} x' C x,$

az $x \geqq 0$, $Ax = b$ mellékfeltétel mellett.

Az objektív függvény C-kvadratikus részére egy lényeges megszorítást kell tennünk, hogy biztosítsuk a számolási eljárás sikerét: az f függvény legyen konvex, azaz C legyen pozitív szemidefinit. Ez a feltétel — mely a kutatás mai állásánál nyilvánvalóan lényeges minden nemlineáris programozási szkémánál — biztosítja, hogy a problémánál fellépő bármely *lokális* minimum egyben a keresett *globális* megoldás is. Algebrailag C pozitív szemidefinit volta azt jelenti, hogy

$$x' C x \geqq 0 \qquad \text{minden } x\text{-re.} \tag{4}$$

Közgazdasági problémáknál az előbbi feltétel azt jelenti, hogy minden tevékenységre nem növekvő hozadékot (nonincreasing returns to scale) tulajdonítanak, mivel az x programról az $x + \Delta x$ programra való átmenetkor a határköltség-változás

$$\frac{d}{dt} f(\lambda, x + t\Delta x) = p\Delta x + x C \Delta x + t \Delta x' C \Delta x,$$

amely t-nek nem csökkenő függvénye lesz. A továbbiakban ezt mi is feltesszük. Ennek a tulajdonságnak a kvadratikus programozásban való szerepéről részletesebb felvilágosítás a [4] dolgozatban található.

Több javaslat hangzott el az utolsó két évben kvadratikus programozási problémák numerikus megoldására; azokat, amelyek nagysebességű digitális számológépi számolásra alkalmasnak látszanak, az irodalomjegyzékben [1]—[6] alatt soroljuk fel. BARANKIN és DORFMAN [1] mutatott rá először a kvadratikus probléma lineáris megfogalmazására; jelen dolgozat alapgondolata tőlük származik. 2. fejezetünket megváltoztatott jelöléssel [1] 1. és 3. fejezetéből vettük.

Módszerünk az előbb említett módszerektől elsősorban abban különbözik, hogy a lineáris programozáshoz szabott módszernek csupán számítási skémáját alkalmazza; következőleg egy számológépnél egy lineáris programozás kódját egyszerűen lehet egy kvadratikus programozáshoz kellő kóddá alakítani; az IBM 704 SHARE-lineáris programozási kódjában e célból csupán 11 utasítást kell módosítani.

Az alábbiakban módszerünket két változatban: egy **„rövidítettben"** és egy **„hosszúban"** tárgyaljuk. A „hosszú" változat számítási menete hasonlít a „rövidéhez", azonban arra törekszik, hogy egyrészt a (3) kvadratikus problémát *valamennyi* $\lambda \geqq 0$-ra megoldja, másrészt pedig a „rövid" változat használatakor szereplő bizonyos megszorításokat is elkerüljön. Az alábbi táblázat tartalmazza a két eljárás használhatóságának feltételeit. A szimplex módszer szükséges bázisváltoztatásai számának becslése tapasztalati szám és a 6. fejezetben ismertetetthez hasonló kísérleteken alapszik.

(3) **megoldása**	**„rövid" változattal**	**„hosszú" változattal**
Feltételek	Vagy $\lambda = 0$, vagy C pozitív definit	C pozitív szemidefinit
Megoldást kapunk	rögzített λ értékre	valamennyi $\lambda \geqq 0$ értékre
Ekvivalens lineáris program terjedelme	$m+n$ egyenletig $m+3n$ változóval	$m+n$ egyenletig, $m+3n+1$ változóval
A megoldáshoz szükséges bázisváltoztatások számának becslése	$2(m+n)$	$4(m+n)$

2. Előzetes megjegyzések

Mivel a kvadratikus probléma megoldása részben minden $\lambda \geqq 0$-ra érdekel bennünket, definiáljuk $\lambda \geqq 0$-ra az

$$F(\lambda) = \mathrm{Min} \left\{ \lambda p x + \frac{1}{2} x' C x : x \geqq 0,\ Ax = b \right\}$$

kifejezést. Egész csomó információt kaphatunk $F(\lambda)$-ra vonatkozóan anélkül, hogy értékét kiszámítanánk. Mindvégig feltételezzük persze, hogy léteznek

„lehetséges" x-ek, azaz olyan $x \geqq 0$ értékek, melyekre $Ax = b$. Mindazonáltal kaphatnánk $F(\lambda) = -\infty$-t valamely (s így valamennyi) $\lambda > 0$-ra.

Először is C pozitív szemidefinit voltának egyik fontos következménye az

1. LEMMA. *$x'Cx = 0$-ból következik $Cx = 0$.*

BIZONYÍTÁS: Bármely n-dimenziós y vektorra és bármely t számra $0 \leqq (y+tx)'C(y+tx) = y'Cy + 2ty'Cx$, ahonnan $y'Cx = 0$; $Cx = 0$ ebből azonnal következik.

Ebből következik a

2. LEMMA. *Bármely $\lambda \geqq 0$-ra az összes olyan „lehetséges" x-ek „megoldáshalmaza", melyekre $f(\lambda, x) = F(\lambda)$, egy lineáris sokaságnak a mellékfeltételek halmazával való közös része és px $\lambda > 0$-ra konstans ezen a halmazon.*

BIZONYÍTÁS. Legyenek x és y olyan „lehetséges" pontok, melyekre $f(\lambda, x) = f(\lambda, y) = F(\lambda)$. Legyen $w = y - x$; bármely $0 \leqq t \leqq 1$-re az $x + tw$ pont a mellékfeltételek halmazához tartozik; mivel f konvex és $f(\lambda, x+tw)$ minimális $t = 0$-ra és $t = 1$-re, $f(\lambda, x+tw) = f(\lambda, x)$ minden $0 \leqq t \leqq 1$ értékre, vagyis $\lambda p(x+tw) + \frac{1}{2}(x+tw)'C(x+tw) = \lambda px + \frac{1}{2}x'Cx$, amely $(\lambda pw + x'Cw)t + \frac{1}{2}w'Cwt^2 = 0$-ra egyszerűsödik $[0 \leqq t \leqq 1]$. Így $w'Cw = 0$, ahonnan az 1. lemma következtében

$$\left.\begin{aligned} &cw = 0 \\ &pw = 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{és ebből} \tag{5}$$

Megfordítva világos, hogy ha $f(\lambda, x) = F(\lambda)$, ha w eleget tesz (5)-nek és ha $x + tw$ „lehetséges" megoldás, akkor $f(\lambda, x+tw) = F(\lambda)$, úgy, hogy adott λ-ra a teljes megoldáshalmaz a mellékfeltételek halmazának az $\{x + tw\}$ lineáris sokasággal való közös része. Végül az (5) egyenletből: $px = py$ bármely két megoldásra.

Ha mármost valamely $\lambda > 0$-ra egy olyan „lehetséges" x_λ megoldást választunk, melyre $f(\lambda, x_\lambda) = F(\lambda)$, akkor a 2. Lemma következtében px_λ értéke független x_λ megválasztásától.

1. TÉTEL. *$\lambda \geqq 0$-ra $F(\lambda)$ egy konkáv függvény; px_λ monoton nemnövekvő; és x_λ egy y megoldása a*

$$\mathrm{Min}\,\{y'Cy : y \geqq 0, \quad Ay = b, \quad py \leqq px_\lambda\}$$

problémának.

BIZONYÍTÁS: Mivel $f(\lambda, x)$ lineáris λ-ban, $F(\lambda)$ infimuma egy lineáris függvény-családnak és így konkáv.

px_λ trendje egy példa egy elég általános tényre. Válasszunk valamilyen λ és μ értéket. Mivel x_λ minimalizálja $f(\lambda, x)$-et,

$$\lambda p x_\lambda + \frac{1}{2} x'_\lambda C x_\lambda \leqq \lambda p x_\mu + \frac{1}{2} x'_\mu C x_\mu;$$

és mivel x_μ minimalizálja $f(\mu, x)$-et,

$$\mu p x_\mu + \frac{1}{2} x'_\mu C x_\mu \leqq \mu p x_\lambda + \frac{1}{2} x'_\lambda C x_\lambda.$$

Összeadva az egyenlőtlenségeket és rendezve, azt kapjuk, hogy

$$(\mu - \lambda) p x_\mu \leqq (\mu - \lambda) p x_\lambda,$$

ebből következik, hogy $\mu > \lambda$-ra $px_\mu \leqq px_\lambda$.

Végül, mivel x_λ minimalizálja $\lambda p x + \frac{1}{2} x' C x$-et, minden olyan y, melyre $y' C y < x'_\lambda C x_\lambda$, a $py > px_\lambda$ összefüggést szolgáltatja, amely az utóbbi állítást bizonyítja.

A következő tétel x_λ-nak egy olyan jellemzését adja, amely lehetővé teszi annak kiszámítását. $f(\lambda, x)$ ezen minimalizálási feltételének csupán az elégségességére van szükségünk, mivel a szükségessége már következni fog, ha megállapítottuk, hogy a következő fejezet számítási szkémájának eredményei eleget tesznek ennek a feltételnek, ha a minimum létezik.

2. TÉTEL. *Ha* $x \geqq 0$, $Ax = b$ *és léteznek olyan* $v \geqq 0$ ($n \times 1$-es) és u ($m \times 1$-es) *matrixok, hogy*

(6) $$v' x = 0$$

és

(7) $$Cx - v + A' u + \lambda p' = 0,$$

akkor x *a*

$$\text{Min} \left\{ \lambda p x + \frac{1}{2} x' C x : x \geqq 0, \quad Ax = b \right\}$$

problémának megoldása.

BIZONYÍTÁS: Legyen adva egy $y \geqq 0$, melyre $Ay = b$. Kimutatjuk, hogy $f(\lambda, y) \geqq f(\lambda, x)$. C pozitív szemidefinit voltából következik, hogy

$$(y - x)' C (y - x) \geqq 0,$$

ahonnan

$$y' C y + x' C x \geqq 2 x' C y,$$

vagy

$$y' C y - x' C x \geqq 2 x' C (y - x)$$

és így

$$f(\lambda, y)-f(\lambda, x)=\lambda p(y-x)+\frac{1}{2}y'Cy-\frac{1}{2}x'Cx \geqq (\lambda p+x'C)\,(y-x).$$

Minthogy (7)-ből

$$\lambda p+x'C=v'-u'A,\quad f(\lambda, y)-f(\lambda, x) \geqq v'y-v'x-u'Ay=v'y-0-u'b+u'b$$

((6) és a „lehetségesség" következtében) $=v'y \geqq 0$ (mivel $v, y \geqq 0$).

A (6) és (7) feltételek — melyek speciálisan inkább szükségesek, mint elégségesek — lényegében KUHN és TUCKER „nyeregpont"-tételének feltételeivel azonosak [9]. Jelen formájában az eredmény BARANKIN és DORFMAN-nak ([1], 3. fejezet) tulajdonítható. Valóban, arra a feltételre oly módon juthatunk, hogy $f(\lambda, x)$-et egy differenciálható konvex függvénnyel helyettesítjük, a (7)-beli $Cx+\lambda p'$-t pedig gradiensével.

A kvadratikus probléma említésre méltó jellegzetessége $f(\lambda, x)$ gradiensének linearitása, amely a KUHN-TUCKER feltételek nem-lineáris jellegét a (6) $v'x=0$ relációra korlátozza, amelynek az alábbi

$$v_j > 0\text{-ból következik } x_j=0 \qquad (j=1, \ldots, n) \tag{8}$$

kombinatorikus kifejezés is lehetséges.

Hogy felderíthessük a (8) megszorításoknak a (7) lineáris relációkkal való kapcsolatát és láthassuk, hogyan lehet azokat numerikusan kezelni, szükséges röviden áttekinteni a lineáris programozásnál szereplő szimplex módszer [7] főbb jellegzetességeit:

Ott a cx lineáris formát kívánjuk minimalizálni a $Dx=e$, $x \geqq 0$ (D $p \times q$, C $1 \times q$, e $p \times 1$-es matrix) megszorítások mellett. Feltesszük, hogy a probléma „*lehetséges*", azaz létezik olyan x, mely a megszorításoknak eleget tesz. Könnyen kimutatható, lineáris függőség alapján, hogy létezik egy olyan „lehetséges" x, amelynek legfeljebb p pozitív komponense van. Egy „lehetséges" x el nem tűnő komponenseinek megfelelő, D-ből kiválasztott p oszlopból álló összességet *bázis*nak nevezünk, magát az x-et pedig *bázismegoldás*nak. A szimplex módszernél mindig ilyen bázisokkal dolgozunk; ha adva van egy ilyen bázis, kimutatható:

1. vagy az, hogy a hozzátartozó bázismegoldás a lineáris forma minimális értékét szolgáltatja,

2. vagy az, hogy található egy olyan másik bázis, mely az előzőtől csupán egy oszlopban különbözik és az ehhez tartozó bázismegoldás a lineáris formának kisebb értéket ad,

3. vagy az, hogy egy újabb oszlopvektorral bővíthető a bázis oly módon, hogy található az ezen $p+1$ oszlopvektorhoz tartozó „lehetséges" x-eknek egy olyan sorozata, amelyekre $cx \to -\infty$. Ily módon egy bázis-sorozat

generálható, amely a problémának egy véges vagy végtelen megoldására vezet. Célszerű a probléma megszorításaiban egy „nem-degenerálódási" feltevést bevezetni: azt, hogy bármely „lehetséges" x vektornak legalább p pozitív komponense van. Ez a feltevés bármely bázis oszlopvektorainak lineáris függetlenségét eredményezi. Kimutatták [7], hogy minden megszorítás-halmaz úgy kezelhető, mintha nem-degenerálódó volna. A továbbiakban ezekre az eredményekre fogunk támaszkodni és egy pár helyen, ha szükséges, feltételezzük a nem-degenerálódást.

Visszatérve a kvadratikus problémára, azok a feltételek, hogy egy n-dimenziós x vektor $\lambda \geqq 0$-ra a kvadratikus probléma megoldását adja,

$$\begin{aligned} &Ax = b \\ &Cx - v + A'u + p'\lambda = 0 \\ &x \geqq 0, \quad v \geqq 0 \end{aligned}$$

alakban írhatók (ha $v'x = 0$-tól pillanatnyilag eltekintünk), vagy koefficiensekre szétválasztott formában

$$\text{(9)} \qquad \begin{array}{cccc|l} x \geqq 0 & v \geqq 0 & u & \lambda & \\ \hline A & 0 & 0 & 0 & = b \\ C & -I & A' & p' & = 0 \end{array}$$

alakban, amely $m+n$ egyenletből áll $2n$ nemnegatív változóval és m megszorítás nélküli változóval (λ-t nem tekintjük változónak). A továbbiakban ezen egyenletrendszernek bázismegoldásaival fogunk foglalkozni. Megjegyezzük, feltettük, hogy a megszorítás nélküli u változóhoz tartozó m oszlop valamennyi bázisba be van véve (ez a technikai fogás teszi szükségtelenné u-nak a célból való algebrai eliminálását, hogy a rendszert standard alakra hozzuk); ez azt eredményezi, hogy bármely bázismegoldásban csak az n pozitív változó szerepel x és v-ben.

Tegyük fel egyelőre, hogy a 2. tétel ellenkezője igaz; ha ekkor a kvadratikus problémának van egy megoldása, akkor létezik olyan x, v, u, mely (6) és (7)-nek eleget tesz. Azonban (6)-ból az következik, hogy a $2n$ x és v-ből legalább n komponens eltűnik; és ebből következik BARANKIN és DORFMAN [1] ama fontos eredménye, hogy [9]-nek valamely bázismegoldása a kvadratikus problémának is egy megoldása.

Mivel a szimplex módszer számításmenete alkalmas bázismegoldások meghatározására, ennek megfelelően BARANKIN és DORFMAN javasolták a módszernek oly módon való alkalmazását, hogy (9)-nek egy tetszőleges bázismegoldásából kiindulva $v'x$-et zérusra redukáljuk. A [4] dolgozat ad egy olyan módszert, mely ennek eleget tesz — de az sokkal bonyolultabb és valószínűleg lassúbb is, mint a jelen algoritmus.

Másrészről MARKOVITZ javasolt egy módszert [6] az „aktatáska"-problémára (ez a kvadratikus probléma minden $\lambda \geqq 0$-ra való megoldásával ekvivalens), amely a (9)-nél enyhébb megszorításokkal kezdődik és amely, bár a (8) alatti $v'x=0$ feltételt kihasználja, a változókat változtatni tudja mindaddig, míg (9)-et nem nyeri. Az itt ismertetett módszer kihasználja ezt a szellemes ötletet és a [6]-ban javasolt módszertől csupán abban különbözik, hogy a lineáris programozási alakhoz tartja magát.

3. A számítás menete

Az alábbiakban megadjuk $\lambda px+\frac{1}{2}x'Cx$ $x \geqq 0$, $Ax=b$ mellékfeltételek melletti minimalizálásának számítási algoritmusait. Először a „rövid" változatot adjuk meg, rögzített λ értékre, melynek konvergenciájához az szükséges, hogy vagy $\lambda=0$, vagy C pozitív definit legyen; utána a „hosszú" változatot adjuk meg, mely a kvadratikus problémát „paraméteresen", minden $\lambda \geqq 0$-ra megoldja és amely C pozitív definit voltát nem kívánja meg, azonban két „rövid változat" típusú rekurziót alkalmaz.

„Rövid" változat

Legyenek z^1, z^2 és w n-, n-, illetve m-komponensű vektorok. Az eljárást a

(10) $$Ax + w = b,$$

(11) $$Cx - v + A'u + z^1 - z^2 = -\lambda p',$$

(12) $$x, v, z^1, z^2, w \geqq 0$$

összefüggés-halmazzal kezdjük, mely (9)-nek egy gyengítése.

Kezdés. Mivel $b \geqq 0$, a rendszernek egy kiindulási bázisát képezhetjük a z^1, z^2 és w együtthatóiból. Használjuk fel a szimplex módszert, hogy

(13) $$\sum_i w_i$$

értékét zérusra redukáljuk, miközben v és u-t zérusnak rögzítjük. Hagyjuk el w-t és z^1 és z^2 fel nem használt komponenseit; jelöljük a megmaradó n komponenst Z-vel, azok együtthatóit pedig E-vel. Ezzel most a

(14) $$\begin{aligned} &Ax = b \\ &cx - v + A'u + EZ = -\lambda p' \\ &x, v, Z \geqq 0 \end{aligned}$$

rendszer egy megoldását kaptuk.

Rekurzió. Ha már adva egy bázis és egy bázismegoldás, mely eleget tesz a (14), a (8) alatti $v'x=0$ és a $\sum_{k=1}^{n} Z_k > 0$ feltételeknek, hajtsunk végre egy bázisváltoztatást a

$$\sum_{k=1}^{n} Z_k \tag{15}$$

lineáris alak alább szereplő, (16) *mellékfeltétel* melletti minimalizálására szolgáló szimplex módszer menetében.

(16) $k=1,\ldots,n$-re: ha x_k szerepel a bázisban, nem engedjük meg v_k-t; ha v_k szerepel a bázisban, nem engedjük meg x_k-t.

Befejezés. Ha a (15) alak pozitív, ismételjük meg a rekurziós lépést. A (15) kifejezés legfeljebb $\binom{3n}{n}$ iteráció után eltűnik; ez $Z=0$ értéket eredményez. A befejező bázismegoldás x része a kvadratikus programozási probléma egy megoldása λ-ra.

„Hosszú" változat

Kezdés. Ha a „rövid" változat számítását $\lambda=0$-ra végrehajtottuk, adjunk hozzá p'-t a „rövid" változat adataihoz; így a

$$Ax = b \tag{17}$$

$$Cx - v + A'u + up' + EZ = 0 \tag{18}$$

rendszert kapjuk és adott egy kezdeti megoldásunk is: $u=0$, $Z=0$ és $v'x=0$.

Rekurzió. Ha már adva van egy bázis és egy olyan bázismegoldás, mely eleget tesz (17), (18), $v'x=0$-nak és $Z=0$, hajtsunk végre egy bázisváltoztatást (ha lehetséges) ama szimplex eljárásban, amely a

$$-\mu \tag{19}$$

lineáris alak minimalizálására szolgál a (16) mellékfeltétel és a következő feltétel mellett:

(20) „nem engedünk meg Z_j-t a bázisban".

Befejezés. Ha nem lehet a rekurzió bázisváltoztatását végrehajtani, akkor $\mu=0$, $F(\lambda)=-\infty$ minden $\lambda>0$-ra és a „lehetséges" x-eknek egy olyan halmaza található (vö. 5. pont), melyre $f(\lambda, x)\to\infty$ minden $\lambda>0$-ra.

Ellenkező esetben a rekurzió a véges $0=\mu^0<\mu^1<\cdots<\mu^K$ sorozatot és a hozzájuk tartozó bázismegoldások x részének $x^0, x^1, \ldots, x^K$ sorozatát szolgáltatja; az eljárás legfeljebb $\binom{2n}{n}$ iteráció után az x^∞ vektorral végződik oly módon, hogy $\mu^k \leqq \lambda \leqq \mu^{k+1}$-re a kvadratikus feladat λ-ra szóló megoldása

(21) $$x = \frac{\mu^{k+1}-\lambda}{\mu^{k+1}-\mu^k} x^k + \frac{\lambda - \mu^k}{\mu^{k+1}-\mu^k} x^{k+1};$$

$\lambda \geqq \mu^K$-ra a megoldás

(22) $$x = x^K + (\lambda - \mu^K) x^\infty.$$

MEGJEGYZÉS. E. M. L. BEALE a fenti „rövid" változat egy elegáns módosítását közölte, amely lehetővé teszi az eljárásnak az alkalmazását akkor is, ha a kvadratikus alak csupán pozitív szemidefinit, a pozitív definit helyett. Lényegében abból áll ez, hogy kiszámítjuk C egy „virtuális perturbációjának" hatását, ami abból áll, hogy C_{jj}-t tetszőleges kis δ-ra $C_{jj} + \delta^j$-vel $j = 1, \ldots, n$ helyettesítjük és így az algoritmus úgy használható, mintha pozitív definit alakkal lenne dolgunk.

4. Példa

Mind a „rövid", mind a „hosszú" változattal lefolytatott számításhoz példát adandó, meg fogjuk oldani a következő problémát:

$$\text{Min}\, \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \lambda(x_1 - 2x_3)$$

az $x_1, x_2, x_3 \geqq 0$, $x_1 - x_2 + x_3 = 1$ korlátozások mellett.

Az objektív függvény

$$f(\lambda, x) =$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1+\lambda)^2 + x_2^2 + (x_3 - 2\lambda)^2] - \frac{5}{2}\lambda^2$$

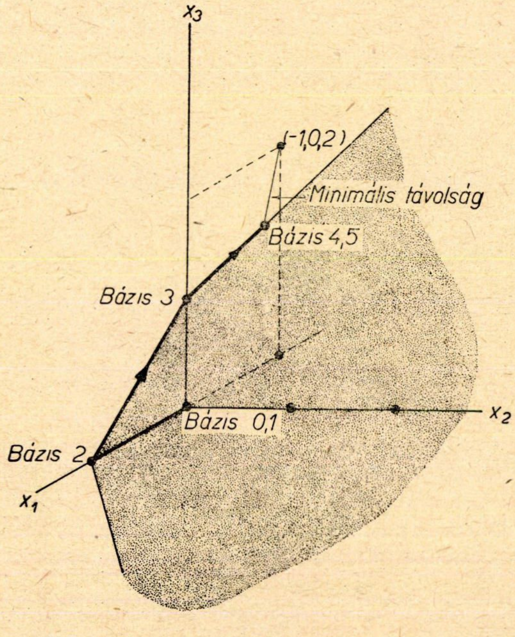
alakban írható és így bármely λ-ra az x megoldás a megszorítások halmazának a $(-\lambda, 0, 2\lambda)$ ponthoz legközelebbi pontja lesz. Ezt illusztrálja $\lambda = 1$-re az 1. ábra és tetszőleges $\lambda \geqq 0$-ra a 2. ábra. Példánk esetén

$$A = [1 \quad -1 \quad 1],$$

$$b = [1],$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

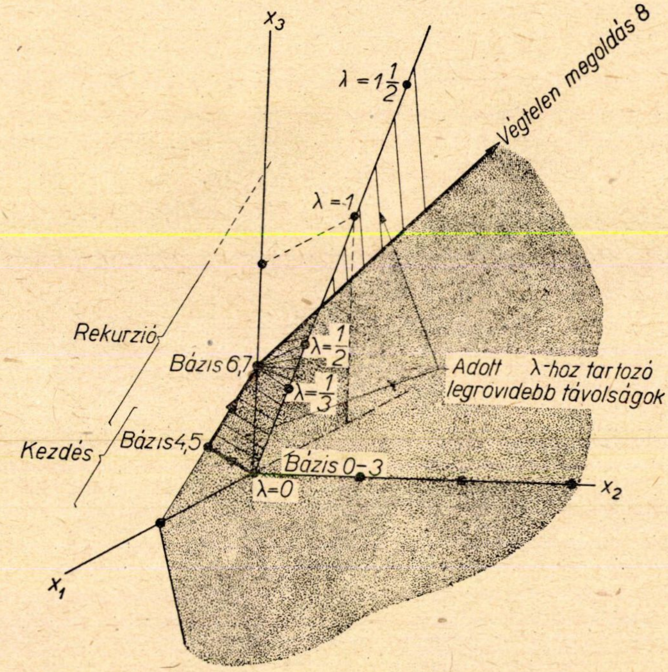
$$p = [1 \quad 0 \quad -2].$$



1. ábra

Mivel C pozitív definit, a „rövid” változat adja a probléma megoldását „tetszőleges λ-ra”. $\lambda = 1$-et véve a (10, 11) képletek a „rövid” változat alábbi kezdeti táblázatát adják:

x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	u	z_1^1	z_2^1	z_3^1	z_1^2	z_2^2	z_3^2	w		
1	—1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	=	1
1	0	0	—1	0	0	1	1	0	0	—1	0	0	0	=	—1
0	1	0	0	—1	0	—1	0	1	0	0	—1	0	0	=	0
0	0	1	0	0	—1	1	0	0	1	0	0	—1	0	=	2



2. *ábra*

Bár a probléma tekintélyes degenerálódást tartalmaz, ΣZ_k minimalizálása simán végrehajtható. Alább megadjuk a változók értékeit az egyes, egymás utáni lépésekre (csupán a bázisváltozók értékei vannak megadva). Először az u változót vezetjük be, mivel az valamennyi bázisban szerepel. Mivel az megszorításnak nincs alávetve, a rendszerből eliminálhattuk is volna; mi azonban benne hagytuk.

Bázis	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	u	z_1^1	z_2^1	z_3^1	z_1^2	z_2^2	z_3^2	w	Σz	
0									0	2	1			1		kezdeti
1							2		2		3			1		
2	1						2		2		4				6	
3			1				1		1		2				3	
4		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{3}{2}$				$\frac{3}{2}$	
5		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$			$\frac{1}{2}$								0	

Az x által (1, 0, 0)-ból (0, 0, 1)-be, majd $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$-be megtett utat az 1. ábrába berajzoltuk.

A „hosszú" változatnál a probléma kezdeti táblázata a következő:

x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	u	μ	z_1^1	z_2^1	z_3^1	z_1^2	z_2^2	z_3^2	w	
1	−1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$=1$
1	0	0	−1	0	0	1	1	1	0	0	−1	0	0	0	$=0$
0	1	0	0	−1	0	−1	0	0	1	0	0	−1	0	0	$=0$
0	0	1	0	0	−1	1	−2	0	0	1	0	0	−1	0	$=0$

Az értékek sorozata a következő:

Bázis	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	u	μ	z_1^1	z_2^1	z_3^1	z_1^2	z_2^2	z_3^2	w	
0									0	0	0				1	„rövid" változat
1							0			0	0				1	
2	0						0				0				1	
3	0		0				0								1	
4	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				$-\frac{1}{2}$						$\frac{1}{2}$			
5	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$									
6			1		$\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$								
7			1	$\frac{1}{2}$			0	$\frac{1}{2}$								
8		t	$1+t$	$\frac{1}{2}+2t$			t	$\frac{1}{2}+t$								

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{x^{\infty}=(0,\ 1,\ 1)}$$

Ezeknek a megoldásoknak az x részét a 2. ábrában felrajzoltuk.

Például, a feladat megoldása $\lambda=\frac{1}{4}$-re (21)-ből adódik az 5. és 6. bázisokhoz tartozó megoldások közötti interpolációként. Az eredmény:

$$x=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}{0-\frac{1}{3}}x^2+\frac{0-\frac{1}{4}}{0-\frac{1}{4}}x^3=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x^3=\left(\frac{1}{8},0,\frac{7}{8}\right).$$

A $\lambda=1$-re szóló megoldás itt a 8. bázisból közvetlenül nyerhető (vö. (22) képlet) $t=\frac{1}{2}$ helyettesítéssel; $\left(0,\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ érték adódik, amely azonos a „rövid" változat eredményével.

5. Bizonyítások

E fejezet célja a 3. fejezetben tárgyalt rekurziók végződéseivel kapcsolatos megállapítások bizonyítása.

Az eljárás elkezdése ($v=0$) és a bázisba belépő x és v megválasztásának (16) mellékfeltétele eleve biztosítják azt, hogy a rekurziók minden egyes lépésénél $v'x=0$ legyen. Meg kell még vizsgálnunk, mi történik akkor, ha valamelyik rekurziónál nem lehet tovább folytatni az előírt minimalizálási eljárást a megadott mellékfeltételek mellett. Az alábbi tétel megadja, hogy mi szükséges ezeknek a feltételeknek az elemzéséhez.

3. TÉTEL. *Legyen A, b, c ugyanaz, mint az* 1. *fejezetben; legyen a Q matrix $n\times n'$-es, a q $1\times n'$-es, és a g $n\times 1$-es. Legyen adva olyan $x\geqq 0$, $v\geqq 0$, melyekre $v'x=0$. Jelöljük x_x-szel x azon komponenseit, amelyek pozitívak és v_x-szel a megfelelő v komponenseket (megjegyezzük, hogy $v_x=0$); jelöljük v_v-vel v pozitív komponenseit és x_v-vel a megfelelő x komponenseket (megjegyezzük, hogy $x_v=0$).*

Ha a

$$qw \tag{23}$$

lineáris forma a

$$\begin{aligned} v_x&=0,\\ x_v&=0 \end{aligned} \tag{24}$$

és

$$\begin{aligned} Ax\qquad\qquad\quad &=b,\\ Cx-Iv+A'u+Qw&=g \end{aligned} \tag{25}$$

lineáris megszorítások mellett minimális, akkor létezik olyan r, melyre $rC=0$, $Ar'=0$ és $qw=rg$.

BIZONYÍTÁS. (Megjegyezzük, hogy (24) pontosan a (18) bázist korlátozó mellékfeltétel lineáris kifejezése.) A bizonyítás azon x, v, u és w mennyiségek részletes struktúrájától függ, melyek qw minimumát szolgáltatják. Már megkülönböztettük az x és v vektorokban az egymásnak megfelelő $x_x > 0$, $v_x = 0$ és az $x_v = 0$, $v_v > 0$ részeket. Maradnak még a megfelelő x_δ, v_δ részek, amelyeknek, bár nem pozitívek, a megszorítások következtében nem *kell* eltűnniük. Alább (26)-ban a (25) megszorítások matrixát particionáljuk x és v előbbi particionálásának megfelelően, előbb függőlegesen, majd vízszintesen, a természetesen kínálkozó módon (mint ahogy $-I$-t particionáljuk diagonális matrixokra).

$$
(26)\qquad
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|l}
 & x_x > 0 & x_\delta \geqq 0 & x_v = 0 & v_x = 0 & v_\delta \geqq 0 & v_v > 0 & u & w \geqq 0 & \\
\hline
s & A_x & A_\delta & A_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & = b \\
\hline
r_x & C_{xx} & C'_{x\delta} & C'_{xv} & -I_x & 0 & 0 & A'_x & & = g_x \\
r_\delta & C_{x\delta} & C_{\delta\delta} & C'_{\delta v} & 0 & -I_\delta & 0 & A'_\delta & Q & = g_\delta \\
r_v & C_{xv} & C_{\delta v} & C_{vv} & 0 & 0 & -I_v & A'_v & & = g_v \\
\hline
 & \parallel & \geqq & & & \geqq & \parallel & \parallel & \geqq & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q &
\end{array}
$$

A tétel feltételei szerint a változók táblázat fölötti értékei minimalizálják azt a lineáris alakot, melynek együtthatói a táblázatban szerepelnek. Az $x_v = 0$ és $v_x = 0$-hoz tartozó oszlopok figyelmen kívül hagyhatók, mivel kikötöttük, hogy ezek a változók eltűnnek.

A táblázattól balra problémánk *duális* lineáris programozási feladata változói állanak [8]. A duális probléma lineáris alakjának együtthatói a táblázat jobb szélén állanak; a duális probléma megszorításait a matrixon függőlegesen olvashatjuk le, konstans együtthatói pedig a táblázat alján állanak. A duális változókra nincs előjelkorlátozás, mivel azok egyenlet-megszorításoknak vannak alávetve. A fenti matrix alatt megadott összefüggéseket kielégítő ezen változók egzisztenciája a lineáris programozás dualitás-tételének következménye [8], akárcsak a két objektív függvény egyenlő volta. Megjegyezzük, hogy ha egy változóról kiderül, hogy nem-zérus (mint pl. az x_x-belieknél) vagy nincs rá megszorítás (mint pl. u-belieknél) a megfelelő duális összefüggés egy egyenlőség.

Részletezve, ezek az összefüggések a következők:

$$
(27)\quad
\begin{array}{lll}
(a) & sA_x + r_x C_{xx} + r_\delta C_{x\delta} + r_v C_{xv} & = 0 \\
(b) & sA_\delta + r_x C'_{x\delta} + r_\delta C_{\delta\delta} + r_v C_{\delta v} & \leqq 0 \\
(c) & -r_\delta I_\delta & \leqq 0 \\
(d) & -r_v I_v & = 0 \\
(e) & r_x A'_x + r_\delta A'_\delta + r_v A'_v & = 0 \\
(f) & [r_x r_\delta r_v] Q & \leqq q \\
\text{és} & & \\
(g) & qw = sb + rg, &
\end{array}
$$

amely azt fejezi ki, hogy az objektív függvények egyenlőek.

A (d) és (c) összefüggésekből mindjárt adódik, hogy $r_v = 0$ és $r_\delta \geqq 0$. Az r_v-t tartalmazó tagokat elhagyva és (a)-t r'_x-szel, (b)-t pedig r'_δ-val szorozva meg jobbról, az

$$
\begin{aligned}
sA_x r'_x + r_x C_{xx} r'_x + r_\delta C_{x\delta} r'_x &= 0, \\
sA_\delta r'_\delta + r_x C'_{x\delta} r'_\delta + r_\delta C_{\delta\delta} r'_\delta &\leqq 0
\end{aligned}
$$

összefüggésekre jutunk, melyek összeadva,

$$
s[A_x r'_x + A_\delta r'_\delta] + [r_x r_\delta] \begin{pmatrix} C_{xx} & C_{x\delta} \\ C'_{x\delta} & C_{\delta\delta} \end{pmatrix} [r_x r_\delta]' \leqq 0
$$

alakban írhatók. Azonban (e) következtében ebben az összefüggésben az első tag eltűnik; a második tag C matrixa egy pozitív szemidefinit matrix főalmatrixa, tehát maga is pozitív szemidefinit, így a második tag valójában zérus; az 1. Lemmából következik, hogy

$$
\begin{pmatrix} C_{xx} & C_{x\delta} \\ C'_{x\delta} & C_{\delta\delta} \end{pmatrix} (r_x r_\delta)' = 0,
$$

vagy

$$
(28)\quad
\begin{aligned}
C_{xx} r'_x + C_{x\delta} r'_\delta &= 0, \\
C'_{x\delta} r'_x + C_{\delta\delta} r'_\delta &= 0.
\end{aligned}
$$

Az (a) egyenletből rögtön kapjuk, hogy

$$
sA_x = 0,
$$

amiből következik, hogy

$$
sb = s[A_x x_x + A_\delta x_\delta + A_v x_v] = sA_x x_x = 0
$$

és a (g) összefüggésből, (28) és $(27e)$ figyelembevételével és az $r = [r_x r_\delta r_v]$ jelölés bevezetésével következik a tétel állítása.

Ezt a tételt felhasználhatjuk a „rövid" változat számításánál a

$$
(29)\quad Q = E, \quad q = (1, \ldots, 1) \quad \text{és} \quad g = -\lambda p'
$$

helyettesítések után. Ha ΣZ_k minimalizálása során, ennek értékét nem lehet tovább csökkenteni a bázismegszorítások figyelembevétele mellett, akkor a 3. tétel feltételei teljesülnek és fennáll a

$$\Sigma Z_k = qw = rg = -\lambda r p'$$

összefüggés, $rC = 0$ mellett. Azaz, vagy abban az esetben, amikor C pozitív definit (ekkor szükségszerűen $r = 0$), vagy abban az esetben, amikor $\lambda = 0$, $\Sigma Z_k = 0$; ezzel a 2. tétel feltételének eleget tettünk és a végső x a kvadratikus probléma megoldása lesz.

Z-nek zérusra való redukálása után, megtartjuk ezt az eredményt a „hosszú" változat számára és $-\lambda$ értékét kezdjük el minimalizálni. A 3. tétel itt

$$Q = p', \quad q = -1, \quad g = 0 \tag{30}$$

helyettesítéssel alkalmazható. Ha a „hosszú" változat rekurziója véges $-\lambda$-minimummal végződik, a 3. tétel feltételének eleget tettünk és azt kapjuk, hogy

$$-\lambda = qw = rg = 0;$$

$-\lambda$ valójában nem csökkent. Így tehát két eset lehetséges: (1) nem alkalmazható oly lépés, amely $-\lambda$-t csökkentené, és (2) $-\lambda$ $-\infty$-re csökkenthető.

(1) *eset*: Itt fel kell használnunk a rendszerünk (26) megszorításaira elérhető nemdegenerálódást, mely azt állítja, hogy bármely megoldásban $m+n$ változó pozitív. Mivel $\lambda = 0$, ezek közül m az u-hoz tartozik és a megmaradt n pedig az $x_\varkappa$ és v_ν-khez; az x_δ és v_δ-ák halmaza üres. Mivel $Ar' = 0$, $Cr' = 0$ és $(27f)$-ből $pr' \leqq -1$, azt kapjuk, hogy tetszőleges t-re

$$\begin{aligned} A(x+tr') &= b \\ C(x+tr') - v + A'u &= 0. \end{aligned} \tag{31}$$

A nemdegenerálódásból következik, hogy $r \geqq 0$; mert egyébként valamely $t \geqq 0$-ra létezne olyan $x+tr'$, mely eleget tesz (25)-nek és eggyel több komponense tűnik el, mint x-nek. Így $x+tr'$ „lehetséges" megoldás minden $t \geqq 0$-ra és

$$f(\lambda, x+tr') = \lambda p x + \frac{1}{2} x' C x + \lambda p' r' t.$$

Mivel $pr' \leqq -1$, $f(\lambda, x+tr') \to -\infty$, ha $t \to \infty$, tetszőleges $\lambda > 0$-ra és a keresett minimum $-\infty$.

(2) *eset*: λ értékei nincsenek korlátozva. Mivel csak véges számú bázissal rendelkezünk, az (x^i, v^i, u^i, μ^i), $i = 1, \ldots, g$ bázismegoldásoknak létezik egy véges sorozata és végül egy olyan $(x^{g+1}, v^{g+1}, u^{g+1})$, hogy $(x^g + tx^{g+1}$, $v^g + tv^{g+1}$, $u^g + tu^{g+1}$, $\mu^g + t)$ megoldás minden $t \geqq 0$-ra. A (16) bázismegszo-

rításból következnek a

$$0 = v^i x^i = v^i x^{i+1} = v^{i+1} x^i = v^{i+1} x^{i+1}, \quad \mu^i < \mu^{i+1} (i = 1, \ldots, g) \tag{32}$$

összefüggések. Ha ármost adva van, hogy $\mu^i \leqq \lambda \leqq \mu^{i+1}$, az

$$x = \frac{\mu^{i+1} - \lambda}{\mu^{i+1} - \mu^i} x^i + \frac{\lambda - \mu^i}{\mu^{i+1} - \mu^i} x^{i+1}$$

pont, mely x_i és x^{i+1}-nek egy konvex kombinációja, „lehetséges" megoldás; könnyen ellenőrizhető, hogy ha v-t, ill. u-t v^i, v^{i+1}, ill. u^i, u^{i+1} ugyanilyen kombinációival tesszük egyenlővé, a keletkező értékhármas a 3. tételt kielégíti és így x a kívánt minimumot szolgáltatja. Ha másrészt $\lambda \geqq \mu^g$ az $x^g + (\lambda - \mu^g) x^{g+1}$, $v^g + (\lambda - \mu^g) v^{g+1}$, $u^g + (\lambda - \mu^g) u^{g+1}$ értékhármas eleget tesz a 3. tételnek és így $x^g + (\lambda - \mu^g) x^{g+1}$ adja a minimumot.

6. Számítások

Bár a fenti eljárást csupán az $Ax = b$, $x \geqq 0$ alakú megszorításokra mutattuk be, arra a tényre hagyatkozva, hogy az összes lineáris egyenlőtlenségmegszorítások ilyen alakban írhatók, a gyakorlati számításoknál van több oly fogás, mely más típusú megszorítások mellett a probléma nagyságrendje csökkentésére szolgálhat. Az alábbiakban hatékonyságuk bizonyítása nélkül ismertetjük ezeket; bizonyításunk szorosan követi az 5. fejezetbeli bizonyítások menetét. A kitűzött probléma megszorításai legyenek a következők:

$$\begin{aligned} A_{11} x_1 + A_{12} x_2 \phantom{{}+ y_2} &= b_1 \\ A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + y_2 &= b_2 \\ A_{31} x_1 + A_{32} x_2 - y_3 &= b_3 \\ x_1, y_2, y_3 &\geqq 0. \end{aligned} \tag{33}$$

(A (33) második és harmadik sora a $\leqq$ és $\geqq$ megszorítások szokásos megfogalmazásai.) A lineáris megszorítások új rendszere (amely a 3. fejezetbeli (9)-nek felel meg) a következő lesz:

$$\begin{array}{cc|cc|c|cccc|c} x_1 \geqq 0 & x_2 & y_2 \geqq 0 & y_3 \geqq 0 & v_1 \geqq 0 & u_1 & u_2 \geqq 0 & u_3 \geqq 0 & \lambda & \\ \hline A_{11} & A_{12} & & & & & & & & = b_1 \\ A_{21} & A_{22} & I & & & & & & & = b_2 \\ A_{31} & A_{32} & & -I & & & & & & = b_3 \\ \hline & & & & -I & A'_{11} & A'_{21} & A'_{31} & p'_1 & = 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{C} & & & & A'_{12} & A'_{22} & A_{32} & p'_2 & = 0 \end{array} \tag{34}$$

Az algoritmus az előzőkhöz hasonlóan folyik le, de a 3. fejezet (16) szabályának következő erősebb változata figyelembevételével:

Ha $(x_1)_k$ szerepel a bázisban, nem engedjük meg $(v_1)_k$-t és megfordítva;

(35) ha $(y_2)_k$ „ „ „ „ „ „ $(w_2)_k$-t „ „

ha $(y_3)_k$ „ „ „ „ „ „ $(u_3)_k$-t „ „ .

Látható, hogy ebben a megfogalmazásban a kitűzött probléma egyenleteinek száma a problémában szereplő nem-gyenge változók számával növekedett csak. Nyilvánvaló egy további redukciós lehetőség: mivel x_2 és u_1 változók megszorítatlanok, algebrailag kiküszöbölhetők az egyenletrendszerből azonos számú egyenlettel együtt, amelyekben együtthatóik zérustól különböznek (ez a redukció a (9) u változójával is végrehajtható lett volna). A kiküszöbölés után erre az általánosított problémára az x_1, y_2 és y_3 összes komponenseinek számával egyenlő egyenletünk marad, épp ugyanannyi, mint az x komponenseinek száma az egyszerű problémánál, vagyis n, ami bármely esetben egyenlő az eredeti probléma egyenlőtlenség-megszorításainak számával is. (Ez szokatlannak tűnnék, ha például a kitűzött problémánál nem volnának egyenlőtlenség-megszorítások; ekkor azonban a megszorítás nélküli változók kiküszöbölési műveletei — és ez *valamennyi* változóra vonatkozik — pontosan megegyeznének az x-re és u-ra való megoldás műveleteivel, a klasszikus LAGRANGE-féle multiplikátoros módszerben.)

Bár a kiküszöbölést egyszerű véghezvinni, számításainkban mégse tettük, mert nem előnyös olyan problémáknál, melyek matrixában több zérus elem szerepel, erősen csökkenteni a nem-zérus elemek számát; és éppen ez utóbbi szám az, amelyik tekintélyes mértékben meghatározza a szimplex módszer bonyolult változatainak számítási sebességét. Erre kell figyelemmel lennünk, ha ilyen jellegű eljárások relatív efficienciáját becsüljük meg; ennél az eljárásnál az adatok zömeként a C elemei (egyszeresen) és az A elemei (kétszeresen) szerepelnek. Az alább leírt terjedelmes problémánál ezeknek az adatoknak a száma számszerint 1660 volna, bár az így keletkező lineáris programozási problémának 204 egyenlete van 714 változóval.

Az IBM 704 számológép SHARE lineáris programozási kódját revideálták a célból, hogy kvadratikus programozási problémák is megoldhatók legyenek. Ez a kód egyaránt használható az előzőkben ismertetett „rövid" vagy „hosszú" változatnál, vagy pedig egy másik változatnál is, amelyben a kvadratikus alak elhagyásával kapható lineáris problémát oldjuk meg előbb, majd ezután keressük a megoldásokat minden $\lambda \geqq 0$-ra. A kódot igen sokféle probléma megoldásában alkalmazták, melyek közül a legterjedelmesebb egy stratégiailag fontos anyag szétosztása volt; e problémában 90 megszorítás mellett

192 változó szerepelt, melyek közül 78 „gyenge” változó volt. E probléma „hosszú” változattal való teljes megoldásához 359 szimplex módszerbeli bázisváltoztatás volt szükséges, melyek 230 percig tartottak.

Irodalom

Az [1]—[6] dolgozatok a nemlineáris problémák számolási eljárásaival foglalkoznak.

[1] BARANKIN, E. W.—DORFMAN, R.: On Quadratic Programming, *University of California Publications in Statistics*, **2** (1958), 285—318.

[2] BEALE, E. M. L.: On Minimizing A Convex Function Subject To Linear Inequalities, *Journal of the Royal Statistical Society* (Ser. B.) **17** (1955), 173—177.

[3] DANTZIG, G. B.: Section 1 of "Recent Advances in Linear Programming", *Management Science* **2** (January 1956), 131—144.

[4] FRANK, M.—WOLFE, P.: An Algorithm for Quadratic Programming, *Naval Research Logistics Quarterly* **3** (March—June 1956), 95—110.

[5] HILDRETH, C.: A Quadratic Programming Procedure, *Naval Research Logistics Quarterly* **4** (March 1957), 79—85.

[6] MARKOWITZ, H.: The Optimization of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints, *Naval Research Logistics Quarterly* **3** (March—June 1956), 111—133.

[7] DANTZIG, G. B.—ORDEN, A.—WOLFE, P.: The Generalized Simplex Method for Minimizing a Linear Form under Linear Constraints, *Pacific Journal of Mathematics* **5** (1955), 183—195.

[8] GOLDMAN, A. J.—TUCKER, A. W.: *Theory of Linear Programming*, Linear Inequalities and Related Systems (H. W. Kuhn and A. W. Tucker, eds.) (1956), 53—97.

[9] KUHN, H. W.—TUCKER, A. W.: Nonlinear Programming, *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (1951), 481—492.

Fordította: Székely Gábor
A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete