

A CENTRÁLIS HATÁRELOSZLÁSTÉTEL LOKÁLIS ALAKJÁNAK ÁLTALÁNOSÍTÁSÁRÓL

Írta: GYÍRES BÉLA

1. Legyenek a csak egészértékeket felvevő, egymástól független $\xi_1, \xi_2, \dots$ valószínűségi változók egyforma eloszlásúak, nulla várható értékkel és $\sigma > 0$ szórással, azaz legyen

$$(1) \quad P(\xi_\nu = k) = A_k \geq 0 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \nu = 1, 2, \dots),$$

ahol

$$(2) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k = 1, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} k A_k = 0, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 A_k = \sigma^2 > 0.$$

Ha még

$$(3) \quad P(\xi_1 + \dots + \xi_n = k) = A_k^{(n)},$$

$$(4) \quad B_n = \sigma\sqrt{n}, \quad z = \frac{k}{B_n},$$

akkor — amint az közismert — a valószínűségszámítás centrális határeloszlástételének lokális alakja szerint ([1], 237) ahhoz, hogy a $-\infty < k < \infty$ intervallumban k -ban egyenletesen érvényes legyen a

$$B_n A_k^{(n)} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

összefüggés, szükséges és elegendő, hogy ξ_ν ama különböző értékei különbségének legnagyobb közös osztója, amelyeket pozitív valószínűséggel vesz fel, egyenlő legyen 1-gyel.

Ha most az (1) számokkal, mint elemekkel képezzük az

$$(5) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & \cdot \\ \cdot A_{-1} & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \cdot \\ \cdot A_{-2} & A_{-1} & A_0 & A_1 & A_2 & \cdot \\ \cdot A_{-3} & A_{-2} & A_{-1} & A_0 & A_1 & \cdot \\ \cdot A_{-4} & A_{-3} & A_{-2} & A_{-1} & A_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} =$$

$$= L(\dots, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \dots)$$

Toeplitz-féle L -matrixot, amely az (1)-re és (2)-re való tekintettel sztochasztikus matrix és tekintetbe vesszük, hogy (3) alapján

$$(6) \quad A_k^{(n)} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_{\nu}^{(n-1)} A_{k-\nu} \quad (n=2, 3, \dots; A_{\nu}^{(1)} = A_{\nu}),$$

akkor az L -matrixok szorzási szabálya értelmében

$$(7) \quad \mathbf{A}^n = L(\dots, A_{-2}^{(n)}, A_{-1}^{(n)}, A_0^{(n)}, A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \dots)$$

és így a valószínűségszámítás központi lokális határeloszlástétele egyben a (7) matrixnak $n \rightarrow \infty$ mellett vett aszimptotikus viselkedésére is feleletet ad.

A lokális központi határeloszlástételének most már ezen az úton való legmesszebbmenő általánosítását adná egy tetszés szerinti négy irányban végtelen sztochasztikus matrix hatványai aszimptotikus viselkedésének felderítése. E kérdést — tudomásunk szerint — ilyen általánosságban még nem oldották meg. Mi sem vállalkozunk erre, hanem csak a következő speciálisabb jellegű általánosításra:

Legyen most $\mathbf{A}$ hasonló felépítésű sztochasztikus matrix, mint az (5), azzal a különbséggel, hogy az A_k elemek helyébe a négyzetes

$$(8) \quad \mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & \dots & a_{1p}^{(k)} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{p1}^{(k)} & \dots & a_{pp}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

matrixok lépnek.

Elégítsék ki ezek a

$$(9) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \sum_{l=1}^p a_{jl}^{(k)} = 0 \quad (j=1, \dots, p)$$

és a

$$(10) \quad \mathbf{S} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_k > 0$$

feltételeket. A (10) feltétel mellett az $\mathbf{S} - \mathbf{E}$ matrix k -adik sorának és oszlopának elhagyásával kapott D_k főminorára fennáll a $(-1)^{p-1} D_k > 0$ egyenlőtlenség ([2], 316). Kívánjuk meg még, hogy

$$(11) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 \sum_{l=1}^p a_{jl}^{(k)} = \sigma_j^2 \quad (j=1, \dots, p)$$

véges és

$$(12) \quad \sigma^2 = \frac{D_1 \sigma_1^2 + \dots + D_p \sigma_p^2}{D_1 + \dots + D_p} > 0$$

legyen. Ha mint az előbb, $\mathbf{A}^n$ -et a (7) jelöli, amikor is a (6) jobb oldalán szereplő összeg tagjait a (8) matrixok segítségével képezzük, akkor a felsorolt feltételek mellett dolgozatunkban a következő tétel kimutatásával foglalkozunk:

TÉTEL:

$A (-\infty < k < \infty)$ intervallumban k -ban egyenletesen érvényes a

$$(13) \quad B_n \mathbf{A}_k^{(n)} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{0}, n \rightarrow \infty$$

összefüggés, ha még minden j -re a

$$(14) \quad \dots, a_{jl}^{(-2)}, a_{jl}^{(-1)}, a_{jl}^{(0)}, a_{jl}^{(1)}, a_{jl}^{(2)}, \dots \quad (l=1, \dots, p)$$

sorozatok közül legalább egy olyan van, amelyben a nullától különböző elemek felső indexei különbségének legnagyobb közös osztója 1-gyel egyenlő és ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{S}^n = \mathbf{P}.$$

A valószínűségszámítás lokális központi határeloszlástételének most megfogalmazott tételünkben kifejezett általánosítása csak formális jellegű a valószínűségszámítás szempontjából. Következőkben tételünknek valószínűségszámítási interpretációját adjuk. Ez az interpretáció RĚNYÍ ALFRÉDTÓL származik.

Legyenek az egészértékű $\mathcal{I}_{jn}$ ($j=1, \dots, p$; $n=1, 2, \dots$) valószínűségi változók teljesen függetlenek és a $\mathcal{I}_{jn}$ ($n=1, 2, \dots$) változók egyforma eloszlásúak. Legyen továbbá $\{\eta_n\}$ homogén Markov-lánc, az η_n valószínűségi változók lehetséges értékei legyenek az $1, \dots, p$ számok. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{I}_{jn}$ és az η_n változók egymástól függetlenek. A ξ_n valószínűségi változókat értelmezzük a következőképp: legyen $\xi_n = \mathcal{I}_{\eta_n n}$, azaz ξ_n legyen egyenlő $\mathcal{I}_{1n}$ -nel, ill. $\mathcal{I}_{2n}$ -nel, $\dots$, ill. $\mathcal{I}_{pn}$ -nel aszerint, amint $\eta_n = 1$, ill. $\eta_n = 2$, ill. $\dots$, $\eta_n = p$. Legyen továbbá $\zeta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Feltételeink szerint

$$\begin{aligned} & P(\zeta_{n+1} = k, \eta_{n+1} = j | \eta_0 = h) = \\ &= \sum_{r=1}^p \sum_{l=-\infty}^{\infty} P(\zeta_n = l, \xi_{n+1} = k-l, \eta_{n+1} = j, \eta_n = r | \eta_0 = h) = \\ (15) \quad &= \sum_{r=1}^p \sum_{l=-\infty}^{\infty} P(\zeta_n = l, \eta_n = r | \eta_0 = h) \cdot \\ & \cdot P(\xi_{n+1} = k-l, \eta_{n+1} = j | \eta_n = r, \zeta_n = l, \eta_0 = h) = \\ &= \sum_{r=1}^p \sum_{l=-\infty}^{\infty} P(\zeta_n = l, \eta_n = r | \eta_0 = h) P(\xi_1 = k-l, \eta_1 = j | \eta_0 = r). \end{aligned}$$

Ha most

$$(16) \quad P(\zeta_n = k, \eta_n = j | \eta_0 = h) = a_{hj}^{(n)}(k), a_{hj}^{(1)}(k) = a_{hj}^{(k)}$$

és

$$(17) \quad \mathbf{A}_k^{(n)} = (a_{kj}^{(n)}(k)),$$

akkor a (15) alapján

$$(18) \quad a_{hj}^{(n+1)}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{r=1}^p a_{hr}^{(n)}(l) a_{rj}^{(1)}(k-l),$$

tehát fennáll a (6). Így tételünk a $\frac{\xi_n}{\sigma\sqrt{n}}$ határeloszlására vonatkozik. E valószínűesszámítási interpretáció egyben azt is igazolja, hogy a (7) matrixok, tehát a (8) matrixokkal generált (5) matrix hatványai léteznek, ami különben triviális, hiszen sztochasztikus matrixok szorzata ismét sztochasztikus matrix.

2. Legyen

$$(19) \quad f_{jl}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{jl}^{(k)} e^{ikt}.$$

Ha

$$(20) \quad \mathbf{f}(t) = (f_{jl}(t)),$$

akkor nyilvánvalóan

$$(21) \quad \mathbf{A}_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{f}(t) e^{-i\nu t} dt,$$

azaz a (20) matrix a (8) matrixokkal felépített *Toeplitz*-féle (5) matrixszal kapcsolatban ugyanazt a szerepet viszi, mint az eloszlásokhoz tartozó karakterisztikus függvény. Ezért az (5) matrixhoz rendelt (20) matrixot karakterisztikus függvénymatrixnak nevezhetjük.

Ha a (17) matrixhoz tartozó karakterisztikus függvénymatrixot $\mathbf{f}^{(n)}(t)$ -vel jelöljük, könnyű belátni, hogy

$$(22) \quad \mathbf{f}^{(n)}(t) = (\mathbf{f}(t))^n.$$

A (18) és (19) alapján ugyanis

$$\begin{aligned} f_{jl}^{(n+1)}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{jl}^{(n+1)}(k) e^{ikt} = \\ &= \sum_{\alpha=1}^p \left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{j\alpha}^{(n)}(\nu) e^{i\nu t} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{\alpha l}(k-\nu) e^{i(k-\nu)t} \right) = \sum_{\alpha=1}^p f_{j\alpha}^{(n)}(t) f_{\alpha l}(t). \end{aligned}$$

A következőkben a (20) karakterisztikus függvénymatrixszal foglalkozunk.

A (10) alapján

$$\mathbf{f}(0) = \mathbf{S},$$

azaz olyan sztochasztikus matrix, amelynek minden eleme pozitív és a (14) sorozatokra tett feltevés miatt ([1], 65, 2. korollárium)

$$(23) \quad \sum_{i=1}^p |f_{ji}(t)| < 1, \quad 0 < |t| < 2\pi.$$

A (20) matrixnak sajátértékeit abszolútértékben minden t -re nem növekvő sorrendben jelöljük

$$(24) \quad \lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_p(t).$$

A (10) miatt

$$(25) \quad \lambda_1(0) = 1, \quad |\lambda_j(0)| < 1 \quad (j = 2, \dots, p).$$

Mivel a (20) matrix elemei folytonos függvények ([1], 50, 1. tétel), a (24) függvények is azok. FROBENIUS ismert tétele értelmében (l. pl. [3], 75)

$$|\lambda_k(t)| \leq \max_{(j)} \sum_{i=1}^p |f_{ji}(t)| \quad 0 < |t| < 2\pi$$

és így tekintettel a (23)-ra

$$(26) \quad |\lambda_j(t)| < 1 \quad (j = 1, \dots, p), \quad 0 < |t| < 2\pi.$$

1. SEGÉDTÉTEL:

$$(27) \quad |\lambda_1(t)| \leq \vartheta < 1, \quad 0 < \delta \leq |t| \leq \pi.$$

Ugyanis a (23) miatt $\lambda_1(t)$ a 0-nak bizonyos környezetén kívül, folytonosságára való tekintettel, abszolútértékben nem juthat tetszés szerinti közel az 1-hez.

2. SEGÉDTÉTEL:

$$(28) \quad |\lambda_j(t)| \leq \vartheta < 1 \quad (j = 2, 3, \dots, p).$$

Mert e függvények a (25) és (26) miatt abszolútértékben 1-nél kisebbek és folytonosak és így nem juthatnak tetszés szerinti közel abszolútértékben az 1-hez.

3. SEGÉDTÉTEL:

Van a 0-nak olyan környezete, amelyben $\lambda_1(t)$ karakterisztikus egyenletének egyszeres gyöke.

Mert (25) miatt $\lambda_1(0) = 1$ egyszeres gyök és $\lambda_1(t)$ folytonossága miatt a 0-nak meghatározható olyan környezete, amelyben $|\lambda_1(t)| > \vartheta$, ahol ϑ a (28)-ban értelmezett állandó.

A bizonyításokból kiviláglik, hogy a (14) sorozatokra tett feltevésre azért volt szükség, hogy teljesüljön a (27). Könnyű megadni szükséges feltételt ahhoz, hogy $|\lambda_1(t_0)| = 1$, $t_0 \neq 0$ legyen. Igaz ugyanis a következő tény:

Ahhoz, hogy fennálljon a $\lambda_1(t_0) = e^{i\alpha}(t_0 \neq 0)$, szükséges a

$$(29) \quad b_{jl} = e^{i\alpha_{jl}} s_{jl}$$

feltétel teljesülése, ha itt

$$\mathbf{f}(t_0) = (b_{jl}), \quad (s_{jl}) = \mathbf{S}.$$

Legyen ugyanis $x_1, \dots, x_p$ a

$$b_{1j}x_1 + \dots + b_{pj}x_p = e^{i\alpha}x_j \quad (j=1, \dots, p)$$

egyenletrendszernek a triviálistól különböző megoldása. Innen

$$(30) \quad 1 \leq \frac{(|b_{11}| + \dots + |b_{1p}|)|x_1| + \dots + (|b_{p1}| + \dots + |b_{pp}|)|x_p|}{|x_1| + \dots + |x_p|}.$$

Mivel

$$(31) \quad |b_{j1}| + \dots + |b_{jp}| \leq 1,$$

a (30)-ban csak egyenlőség állhat fenn és ez is akkor, ha a (31)-ben egyenlőség van, azaz ha teljesül a (29).

Amennyiben a (14) sorozatokra tett feltétel teljesül, (30) nem állhat fenn egyetlen t -re sem, tehát $|\lambda_1(t)| < 1$, ha $t \neq 0$.

A (29), amint könnyű erről meggyőződni, még nem jelenti azt, hogy $|\lambda_1(t_0)| = 1$. Egy elegendő feltétel ehhez a

$$\alpha_{r_1 r_2} + \alpha_{r_2 r_3} + \dots + \alpha_{r_{k-1} r_k} + \alpha_{r_k r_1} = k\alpha$$

$$(1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k \leq p; k=1, \dots, p)$$

feltételek teljesülése. Ez közvetlenül leolvasható a $\text{Det}(\lambda \mathbf{E} - e^{-i\alpha} \mathbf{f}(t_0))$ polinomból, ha annak λ hatványai szerint kifejtett alakjában a $\lambda=1$ helyettesítéssel élünk és figyelembe vesszük, hogy $\text{Det}(\mathbf{E} - \mathbf{S}) = 0$.

4. SEGÉDTÉTEL:

$$(32) \quad \lambda_1(t) = 1 - \frac{t^2}{2} \sigma^2 + o(t^2), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} o(t^2) = 0,$$

ahol σ^2 -et a (12) értelmezi.

Tételünk kimutatásához elegendő igazolni azt, hogy $\lambda_1(t)$ a 0 pontban kétszer differenciálható és

$$(33) \quad \lambda_1'(0) = 0, \quad \lambda_1''(0) = -\sigma^2.$$

Mert akkor a $\lambda_1(0) = 1$ figyelembevételével (32) épp a $\lambda_1(t)$ függvényre alkalmazott Taylor tételt jelenti.

Differenciáljuk t szerint formálisan az

$$(34) \quad F(t, \lambda_1) = \text{Det}(\mathbf{f}(t) - \lambda_1(t) \mathbf{E}) \equiv 0$$

implicit függvényt.

$$(35) \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} \frac{d\lambda_1}{dt} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \lambda_1} \frac{d\lambda_1}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2} \left(\frac{d\lambda_1}{dt} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} \frac{d^2 \lambda_1}{dt^2} \equiv 0.$$

Ha mint már előbb, a

$$(36) \quad \text{Det}(\mathbf{f}(0) - \mathbf{E}) = \text{Det}(\mathbf{S} - \mathbf{E}) = 0$$

determináns k -adik sorához és oszlopához tartozó aldeterminánst D_k -val jelöljük és figyelembe vesszük, hogy a $\lambda = 1$ az $\mathbf{S}$ -nek egyszeres sajátértéke,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} \right)_{t=0} = - \sum_{k=1}^p D_k \neq 0.$$

Mivel továbbá az a determináns, amely a (36) determinánsból úgy keletkezik, hogy ennek j -edik sorába rendre a $\left(\frac{d}{dt} f_{jl}(t) \right)_{t=0}$ ($l = 1, \dots, p$) számokat helyettesítjük, a (9) feltételre és arra való tekintettel, hogy $\mathbf{S}$ sztochasztikus matrix, nullával egyenlő, következik, hogy

$$(37) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{t=0} = 0.$$

Ugyanis a (37) bal oldala a $j = 1, \dots, p$ esetre a most leírt módon kapott determinánsok összege. Így a (35) első azonosságából máris adódik a (33) első egyenlősége.

Tekintsük most a $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right)_{t=0}$ kifejezést. A (34) alapján ez p^2 számú olyan determináns összegével egyenlő, amelyek közül az előzőek szerint mindazok nullával egyenlőek, amelyeknek egyes sorait a (36) egyes sorai, illetve a (19) matrix egyes sorainak a $t=0$ pontban vett differenciálhányadosai alkotják. Így tehát nullától csak az a p számú determináns különbözhet, amelyek közül a j -ediknek j -edik sorában a (19) matrix j -edik sorának a $t=0$ helyen vett második differenciálhányadosai foglalnak helyet, a többi sorában pedig a (36) megfelelő elemei vannak. Ha a determináns oszlopait a j -edikhez hozzáadjuk és figyelemmel vagyunk a (11) feltételre, arra jutunk, hogy

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right)_{t=0} = - \sum_{j=1}^p D_j \sigma_j^2.$$

Vegyük most tekintetbe azt, hogy $(-1)^{p-1} D_j > 0$ ([2], 316), akkor a (35) második azonosságából a (33) második egyenlőségét kapjuk, ha itt σ^2 -et a (12) értelmezi.

Legyen a (20) matrix *Jordan*-féle normálalakja

$$(38) \quad \mathbf{f}(t) = \mathbf{U}(t) \mathbf{A}(t) \mathbf{U}^*(t),$$

ahol

$$(39) \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & \delta_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & \delta_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_p(t) \end{pmatrix}$$

és

$$\delta_j(t) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad (j=1, \dots, p-1),$$

továbbá az

$$(40) \quad \mathbf{U}(t) = (u_{jl}(t))$$

kielégíti az

$$(41) \quad \mathbf{U}(t) \mathbf{U}^*(t) = \mathbf{E}$$

relációt. Mivel a (40) matrix első oszlopa a (20) matrixnak a $\lambda_1(t)$ -hez tartozó sajátvektora és $\lambda_1(t)$ a nullának elegendő kis környezetében egyszeres gyök, ezért ebben a környezetben a (40) első oszlopának elemei folytonos függvények.

Jelöljük azt a matrixot, amelynek első sorának első eleme 1, a többi pedig nulla, $\mathbf{E}_1$ -gyel.

Ismeretes, hogy az $\mathbf{S}$ sztochasztikus matrixra tett (10) feltétel mellett $\mathbf{S}^n, n \rightarrow \infty$ határérték létezik és az előzőek szerint

$$(42) \quad \mathbf{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{S}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{f}^n(0) = \mathbf{U}(0) \mathbf{E}_1 \mathbf{U}^*(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{U}(t) \mathbf{E}_1 \mathbf{U}^*(t).$$

3. Most bebizonyítjuk az 1 pontban kimondott tételünket. A bizonyítás során azt az utat követjük, amelyet a lokális központi határeloszlástételek bizonyításánál általában követni szoktak (l. pl. [1], 236—239).

A (21) értelmében

$$\mathbf{A}_k^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{f}^n(t) e^{-itk} dt.$$

Hagyjuk el a (39)-ben az argumentumokat és éljünk a

$$(43) \quad \mathbf{A}^n = (b_{jl})$$

jelöléssel. A szorzás végrehajtása után

$$b_{jl} = 0, \quad \text{ha } j > l,$$

$$(44) \quad b_{jl} = \delta_j \delta_{j+1} \dots \delta_{l-1} \sum_{\nu=0}^{n+j-l} \sum_{j \leq \alpha \leq \beta \leq l} \lambda_\alpha^\nu \lambda_\beta^{n+j-l-\nu}, \quad \text{ha } j \leq l.$$

Legyen most $\mathcal{A}_1$ az a matrix, amelynek első sorában rendre a (43) matrix első sorának elemei vannak, míg a többi eleme nulla és $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}^n - \mathcal{A}_1$, akkor a (38) figyelembevételével

$$\mathbf{A}_k^{(n)} = \mathbf{I}_k^{(n)} + \mathbf{J}_k^{(n)}$$

alakban is írható, ahol

$$(45) \quad \mathbf{I}_k^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{U}(t) \mathcal{A}_1(t) \mathbf{U}^*(t) e^{-ikt} dt,$$

$$(46) \quad \mathbf{J}_k^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{U}(t) \mathcal{A}_2(t) \mathbf{U}^*(t) e^{-ikt} dt.$$

Mivel (44) szerint $\mathcal{A}_2$ a (24) sajátértékek közül az elsőt nem tartalmazza és mivel ezekre fennáll a (28), ezért a $\mathbf{J}_k^{(n)}$ matrix általános elmélet c_{jl} -val jelölve és tekintetbe véve a (41) és (44) relációkat,

$$|c_{jl}| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\alpha=2}^p \sum_{\beta=2}^p |b_{\alpha\beta}(t)| dt \leq p \mathcal{G}^n + (p-1) \binom{n}{1} \mathcal{G}^{n-1} + \dots + \binom{n}{p-2} \mathcal{G}^{n-p+2},$$

ahol a bal oldal és ezzel együtt a (46) matrix minden eleme $n \rightarrow \infty$ esetben k -tól függetlenül a nullához tart.

A (45) integrált az $x = tB_n$ helyettesítéssel a

$$2\pi B_n \mathbf{I}_k^{(n)} = \int_{-\pi B_n}^{\pi B_n} e^{-izx} \mathbf{U}\left(\frac{x}{B_n}\right) \mathcal{A}_1\left(\frac{x}{B_n}\right) \mathbf{U}^*\left(\frac{x}{B_n}\right) dx$$

alakra hozhatjuk. Az itt szereplő B_n és z mennyiségeket a (4) értelmezi. A közismert

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx - \frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

integrál figyelembevételével tételünk (13) állításának igazolása annak kimutatásából áll, hogy az

$$\mathbf{R}_n = 2\pi \left[B_n \mathbf{I}_k^{(n)} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \mathbf{P} \right]$$

különbség a $-\infty < k < \infty$ intervallumban k -ban egyenletesen tart a nullmatrixhoz, ha $n \rightarrow \infty$. Ebből a célból $\mathbf{R}_n$ -et négy integrál összegeként állítjuk elő;

$$(47) \quad \mathbf{R}_n = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_4,$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 = (\alpha_{jl}) &= \int_{-A}^A e^{-izx} \left[\mathbf{U}\left(\frac{x}{B_n}\right) \mathcal{A}_1\left(\frac{x}{B_n}\right) \mathbf{U}^*\left(\frac{x}{B_n}\right) - e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbf{P} \right] dx, \\ \mathbf{I}_2 = (\beta_{jl}) &= \int_{A \leq |x| < \varepsilon B_n} e^{-izx} \mathbf{U}\left(\frac{x}{B_n}\right) \mathcal{A}_1\left(\frac{x}{B_n}\right) \mathbf{U}^*\left(\frac{x}{B_n}\right) dx, \\ \mathbf{I}_3 = (\gamma_{jl}) &= \int_{\varepsilon B_n \leq |x| \leq \tau B_n} e^{-izx} \mathbf{U}\left(\frac{x}{B_n}\right) \mathcal{A}_1\left(\frac{x}{B_n}\right) \mathbf{U}^*\left(\frac{x}{B_n}\right) dx, \\ \mathbf{I}_4 = (\delta_{jl}) &= \int_{|x| > A} e^{-izx - \frac{x^2}{2}} dx \cdot \mathbf{P}. \end{aligned}$$

A szereplő ε és A pozitív állandók, amelyekről a későbbiek során diszponálunk. Mivel $\mathbf{P}$ sztochasztikus matrix ([1], 238),

$$|\delta_{jl}| \leq \frac{2}{A} e^{-\frac{A^2}{2}}.$$

(27) miatt és tekintettel a (44)-re,

$$\begin{aligned} |\gamma_{jl}| &\leq \int_{\varepsilon B_n \leq |x| \leq \tau B_n} \left[\left| b_{11}\left(\frac{x}{B_n}\right) \right| + \dots + \left| b_{1p}\left(\frac{x}{B_n}\right) \right| \right] dx \leq \\ &\leq 2\pi\sigma\sqrt{n} \left[\mathcal{G}^n + \binom{n}{1} \mathcal{G}^{n-1} + \dots + \binom{n}{p-1} \mathcal{G}^{n-p+1} \right]. \end{aligned}$$

Ha ε elég kicsiny, a (32)-ből következik, hogy a $|t| \leq \varepsilon$ intervallumban ([1], 239)

$$|\lambda_1(t)| \leq e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

és a 3. segédétel szerint $\delta_1(t) \equiv 0$. Ezért

$$|\beta_{jl}| \leq 2 \int_A^{\varepsilon B_n} \left| u_{j1}\left(\frac{x}{B_n}\right) \bar{u}_{1l}\left(\frac{x}{B_n}\right) \left(\lambda_1\left(\frac{x}{B_n}\right) \right)^n \right| dx \leq 2 \int_A^{\varepsilon B_n} e^{-\frac{x^2}{4}} dx < 2 \int_A^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4}} dx.$$

Mivel a (32) alapján

$$\left(\lambda_1\left(\frac{x}{B_n}\right) \right)^n \rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}, n \rightarrow \infty$$

és mivel a 3. segédétel szerint, ha B_n elegendő nagy és A állandó, $\delta_1\left(\frac{x}{B_n}\right) \equiv 0$ és végül a (42) alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U\left(\frac{x}{B_n}\right) E_1 U^*\left(\frac{x}{B_n}\right) = P,$$

ezért rögzített A mellett z -ben egyenletesen $I_1 \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$.

Ha tehát ε -t elegendő kicsinynek, A -t pedig elegendő nagynak választjuk, I_2 és I_4 tetszőleges kicsinnyé tehetők. Az I_1 , I_3 és $J_k^{(n)}$ integrálok pedig zérushoz tartanak, ha $n \rightarrow \infty$, bármekkorák is legyenek ε és A . Így tehát a (47) összeg tetszés szerinti kicsiny lesz, ha n elegendő nagy. Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

IRODALOM

- [1] B. V. GNYEGYENKO—A. N. KOLMOGOROV: *Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai*, Budapest 1951.
- [2] H. MINKOWSKI: *Zur Theorie der Einheiten in der algebraischer Zahlkörpern*. Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowski, Leipzig—Berlin 1911.
- [3] E. BODEWIG: *Matrix Calculus*, Amsterdam 1959.

(Beérkezett: 1960. VI. 6.)

A Debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem
Matematikai Intézete