A MATEMATIKA ALAPJAINAK EUKLIDÉSZI TERMINUSAI, II.*

Írta: SZABÓ ÁRPÁD

III. A posztulátumok és axiómák

E dolgozat egyik legfontosabb célja, hogy megállapítsuk: mi az értelme a matematikai princípiumok hármas felosztásának az euklidészi „Elemek” legelején, hogyan került egyáltalán sor a princípiumoknak erre az osztályozására? Ezt a kérdést az eddigiekben még éppen csak hogy megközelítettük. Nagyjából tisztáztuk már a „hypothesisek”-nek mint „kiindulásul választott feltevéseknek” a problémáját. Sikerült azt is megvilágítanunk, hogy ezek a „hypothesisek” — a dialektika természetének megfelelően — túlnyomórészt *definíciók* voltak; éppen ezért jelenthetett a „hypothesis” szó nemcsak általában matematikai *alapelvet,* hanem speciálisan *definíciót* is. — A következőkben az euklidészi *posztulátumok* és *axiómák* kérdését kell tisztáznunk. Ezekről eddig csak annyit állapítottunk meg, hogy az a görög terminus, amelyet Euklidés-szövegünk az axiómák megjelölésére használ, „koinai ennoiai”, kimutathatóan későbbi eredetű átírás; e princípium-csoport eredeti görög neve „*axiómata*” volt.

Mindenekelőtt e két görög nevet, az „aitémata” (*αἰτήματα*, posztulátum) és „axiómata” (*ἀξιώματα*) szavak pontos jelentését akarjuk megérteni, anélkül, hogy már most behatóbban vizsgálnánk az EUKLIDÉS-nél felsorolt posztulátumokat és axiómákat.

1. AZ „AITÉMA” SZÓ JELENTÉSE

A *posztulátum* neve EUKLIDÉSnél „aitéma”. A szójelentés ebben az esetben nem kétséges, minthogy az „aiteó” (*αἰτέω*) ige jelentése görögül: „kérni, kívánni, követelni”, s ennek megfelelően „*aitéma*” a „követelést” vagy „követelményt” jelenti. A fontos csak az: egy pillanatra se feledkezzünk meg arról, hogy ez a terminus, éppenúgy mint a megelőző fejezetben vizsgált „hypothesis”, a *dialektikából* származik. Ha meg akarjuk érteni a matematikában használt „aitéma” terminus pontos jelentését, abból kell kiindulnunk: miféle „követelést” vagy „követelményt” jelölt ugyanez a szó a dialektikában.

* A dolgozat I. része a MTA III. Osztályának Közleményei X/4 (1960) számában (441—468. old.) jelent meg. Ennek megfelelően a fejezetek számozása folytatólagos.

Gondoljunk két beszélgető dialektikus vitájára. Az egyik résztvevő feladata, hogy e vita során meggyőzze a másikat egy általa választott tétel (állítás) helyességéről. Ezért olyan premisszákat kell keresnie, amelyeket a másik is elfogad és helyesnek tart; ezekből a premisszákból vezeti aztán le az egyik partner logikus szükségszerűséggel azt a végső tételét (állítását), amelyet kezdetben a másik nem akart elfogadni.[79] Ebből áll a vita során a meggyőzés. Hogy tehát a vita elindulhasson, olyan premisszákat kell találniok a beszélgetőknek, amelyekben mind a ketten megegyeznek, amelyeket mind a ketten bizonyítás nélkül igazaknak tartanak. Ezért *kéri* a beszélgetés egyik résztvevője, hogy valamilyen kezdőtételt a másik is elfogadjon. Figyelemre méltó egyébként, milyen gyakran találkozunk az V. és IV. századi görögök dialektikus vitáiban olyan kifejezésekkel, mint *kérni, kívánni, követelni* vagy *venni (λαμβάνειν)* az egyik oldalról, és *adni, megadni* vagy *nem-adni* a másik oldalról.[80] SÓKRATÉS pl. a „Menón" c. platóni dialógusban — mint már a megelőző fejezetben is láttuk — így szól partneréhez egy vizsgálódás elején:[81] „*engedd meg,* hogy a kérdést egy feltevés alapján vizsgáljam" *(συγχώρησον ἐξ ὑποθέσεως αὐτὸ σκοπεῖσθαι)*; ez más szóval azt jelenti: arra *kéri* partnerét, hogy valamilyen közösen elfogadott állításból indulhasson ki beszélgetésük. Ha ez a *kérés* teljesül, ez azt is jelenti, hogy a kiinduló pontban a vitatkozók megegyeztek. Az ily módon választott kiinduló tétel lesz a „feltevésük" *(ὑπόθεσις)*. Néha azt a körülményt, hogy a vitatkozók — az egyik kérésére — valamilyen kiinduló tételben csakugyan megegyeztek, még azzal is kifejezésre juttatják, hogy az ily módon választott kezdőtételt *ὁμολόγημα*-nak nevezik;[82] „homologéma" az, amiben mind a ketten megegyeztek.

Az „aitéma" tehát olyan kiinduló tétele valamely dialektikus vitának, amelynek elfogadását az egyik partner a másiktól *kérte, követelte.* Ebben a vonatkozásban az „aitéma" szó szinonímája olyan dialektikus kifejezéseknek, mint „hypothesis" vagy „homologéma".

Ha azonban közelebbről vizsgáljuk a görög dialektika terminológiáját, mindjárt figyelmesek leszünk egy lényeges különbségre is: mintha az „aitéma" terminus mégsem pontosan azt jelentené, mint két megnevezett szinonímája, különösen pedig a „homologéma" szó! Az a körülmény ugyanis, hogy az „aitéma" esetében *csak* azt hangsúlyozzák: az egyik fél „követeléséről" van szó, de nem emelik ki egyszersmind azt is: vajon a másik fél *hozzájárult-e* ehhez a „követeléshez"? — mintha arra mutatna: talán az „aitéma" terminus éppen az ilyen *egyoldalú* dialektikus „követelésnek" volt a neve? Hiszen —

79 K. v. FRITZ, i. m. 20.
80 Vö. „Phaidón" 100 B vagy ARISTOT. Phys. Z 9. 239 b 30.
81 „Menón" 86 E 3.
82 Vö. PLATÓN, „Theaitétos" 155 A—B vagy Resp. IV 437 A.

mint már említettem — a másik terminus, a „homologéma" szó éppen azt hangsúlyozza, hogy az ilyen esetben „megegyezésre" jutottak, azaz a másik fél is hozzájárult az egyiknek a „kéréséhez", „követeléséhez". — Ez az „aitéma" szóra vonatkozó sejtésem önként adódik már a két terminusnak — „homologéma" és „aitéma" — egyszerű összehasonlításából is. Szerencsére azonban ebben az esetben nem kell megállnunk a puszta sejtésnél. Forrásunk, PROKLOS félreérthetetlenül meg is mondja, hogy csakugyan így kell értenünk az „aitémát". Ő ugyanis ARISTOTELÉSre (vö. Anal. post. I 10, 76 b 27—34) hivatkozva ezt írja: „Ha pedig az állítás — amelyből ti. valamely dialektikus vita alkalmával ki akarunk indulni — valamilyen ismeretlen tétel, de a feltevés mégis megtörténik *jóllehet a tanuló* (azaz a beszélgetés másik résztvevője) *nem járul hozzá, akkor „aitéma"-ról beszélünk.*[83]

Az „aitéma" tehát a vitának olyan kiinduló tételét jelöli, amelynek elfogadását az egyik fél ugyan „kéri" vagy „követeli", de amelyhez a másik fél *nem okvetlenül járul hozzá.* — Látni fogjuk majd később, hogy az „aitéma" szónak mint a dialektika terminus technicusának ez a jelentése menynyiben alkalmazható az euklidészi posztulátumokra. Egyelőre azonban beérhetjük azzal a megállapítással, hogy az euklidész-*utáni* görög matematika terminológiájában mind az „aiteó" *(αἰτέω)* ige, mind pedig az „aitéma" főnév egyszerűen csak szinonímája volt a „hypotithesthai" *(ὑποτίθεσθαι)*, illetőleg „hypothesis" kifejezéseknek.[84]

2. AZ „AXIÓMA" SZÓ JELENTÉSE

Ha meg akarjuk állapítani az „axióma" *(ἀξίωμα)* szónak mint matematikai terminusnak eredeti pontos jelentését, akkor mindenekelőtt a következő fontos körülményt kell figyelembe vennünk:

Azok az ismert ókori kísérletek, amelyek a matematikai „axióma" lényegét vagy nevét akarják megvilágítani, kétségtelenül mind ARISTOTELÉS hatása alatt állanak.

Bőségesen igazolható ez az utóbbi állítás akár PROKLOS Euklidés-kommentárjából is. Egy alkalommal pl. azt olvassuk nála: „Egyesek pontosabban elhatárolják az *axiómát* a kijelentő állítástól, és ezzel a szóval a közvetlenül, önmagában is meggyőző és világos tételt *(τὴν ἄμεσον καὶ αὐτόπιστον δ' ἐνάργειαν πρότασιν)* jelölik; így értik ezt a kifejezést ARISTOTELÉS *és a matematikusok,* mert szerintük *axióma* és *közös képzet* („ennoia koiné", *ἔννοια κοινή*) egy és ugyanaz."[85] — Egy másik alkalommal viszont — ugyancsak ARISTO-

[83] Proclus 76, 17 kk.
[84] Vö. pl. Archimedis Opera (J. L. HEIBERG) II 124; K. v. FRITZ, i. m. 57.
[85] Proclus 194, 4 kk.

TELÉSre hivatkozva — ezt írja PROKLOS: az „*axióma* nem bizonyítható, de mindenki elfogadja az ilyen állítást lelki alkatánál fogva, mégha egyesek vitatkozó kedvükben kétségbe is vonják az ilyent."[86]

Az a gondolat tehát, hogy a matematikai „axióma" közvetlenül, önmagában is meggyőző és világos tétel — *és hogy az ilyesmit csak az öncélú vita kedvéért szokták egyesek kétségbevonni* — ARISTOTELÉStől származik. Ez az utóbbi, két gondolatjel között kiemelt állítás — amely egyébként távolról sem állja meg a helyét — messzemenően befolyásolta mágának a terminusnak, az „axióma" szónak a megértését is. Világosan kitűnik ez azokból a szavakból, amelyekkel PROKLOS elkezdi az euklidészi axiómákra vonatkozó magyarázatát; ő ugyanis előbb szó szerint idézi azt az öt euklidészi axiómát, amelyet ő is hitelesnek tart, majd így folytatja: *ταῦτ' ἐστὶ τὰ κατὰ πάντας ἀναπόδεικτα καλούμενα ἀξιώματα, καθόσον ὑπὸ πάντων οὕτως ἔχειν ἀξιοῦται καὶ διαμφισβητεῖ καὶ πρὸς ταῦτα οὐδείς.*[87] Magyarra ezt az idézetet valahogy így fordíthatnánk: „Ezek az ún. bizonyíthatatlan axiómák; *axiómák* pedig azért, mert mindenki *igaznak tartja* őket, és nem is kételkedik bennük érvényességüket illetően senki."[88] — Ez a fordítási kísérlet, persze, jóval bőbeszédűbb mint az eredeti, és távolról sem érzékelteti PROKLOS magyarázatának szójátékszerű tömörségét. PROKLOS ugyanis magát az „axióma" szót is meg akarja magyarázni azzal, hogy utal a név etymonjára, az *ἀξιόω* igére, illetőleg ennek az igének egyik jelentésére: „igaznak tart" *(οὕτως ἔχειν ἀξιόω).*

Nem kétséges, hogy PROKLOS magyarázata — legalább elvben — helyes. Az „axióma" főnév csakugyan az *ἀξιόω* ige származéka; ha tehát meg akarjuk érteni a főnév pontos jelentését, az ige jelentéséből kell kiindulnunk. — De vajon ezt tette-e PROKLOS? — Nyilvánvaló, hogy *nem*, mint ahogy ez éppen az előbbi idézetből kétségtelenül megállapitható. Ahelyett ugyanis, hogy elfogulatlanul *kereste* volna a vizsgált szó eredeti jelentését, ragaszkodott előre megfogalmazott naiv és téves elképzeléséhez, és csak ezt akarta igazolni, amikor az „axióma" szó állítólagos etymonjára, az *ἀξιόω* ige idézett jelentésére („igaznak tart") hivatkozott.[89] Az a naiv és téves elképzelés pedig, amelyhez PROKLOS ezúttal is ragaszkodott, nem egyéb, mint a már előbb is említett arisztotelészi gondolat: a matematikai „axióma" érvényességét senki komolyan kétségbe nem vonhatja; ha egyesek mégis kétségbevonják az ilyen matematikai axiómákat, akkor ez csak az értelmetlen és öncélú vitatkozás kedvéért történik. Ezt a gondolatot képviselte PROKLOS etymológiája, ezért származtatta az „axióma" főnevet az *ἀξιόω* = „igaznak tart" igéből.

86 Uo. 182, 17 kk.
87 Uo. 193, 15—17.
88 Vö. P. L. SCHÖNBERGER fordításával: „Proklus Diadochus, Euklid-Kommentar" (herausg. von M. STECK, Halle-Saale 1945) 302.
89 Az igének ehhez a jelentéséhez lásd a Pape-szótárban (1849) felsorolt helyeket.

De ARISTOTELÉSnek a matematikai axiómákról alkotott *téves* elgondolása nemcsak az antik theorétikusokat vezette félre; ugyanilyen károsan befolyásolja ez még ma is a matematika történetiróit. A közelmúltban pl. az egyik jól ismert kutató, K. v. FRITZ[90] lényegében ugyanúgy magyarázta az „axióma" terminust, mint PROKLOS az i. sz. V. században. A különbség szinte csak annyi, hogy a modern kutató az ἀξιόω igének egy valamivel régebbi jelentésére hivatkozott („einschätzen", „für würdig halten"), s ebből akarta levezetni az „axióma" terminusnak azt a matematikai értelmét, amelyet hallgatólagosan ő is éppen olyan „közismertnek", „természetesnek" vett, mint annak idején PROKLOS.

Ezzel az ARISTOTELÉS óta hagyományossá és általánossá lett szómagyarázattal szemben a következő súlyos kifogások támaszthatók:

1. Mint könnyen kimutatható, az „axióma" szó mint terminus technicus éppenúgy a *dialektikából* került át a matematikusok szaknyelvébe, mint a „hypothesis", „horos", „aitéma" stb. kifejezések. Ezért *félrevezető* olyan etymológiai „magyarázatot" keresni e szó jelentésére, amely a legjobb esetben is csak e terminus állítólagos matematikai értelmét világíthatná meg. Ha e terminus eredeti matematikai értelmét keressük, abból kell kiindulnunk: milyen értelemben használták ugyanezt a kifejezést a *dialektikában,* mert valószínű, hogy eredetileg a matematikában is ugyanaz lehetett az értelme. Márpedig bizonyos, hogy ennek a terminusnak *a dialektikában sohasem volt az az értelme, amelyet* ARISTOTELÉS *óta is csak a matematikában tulajdonították neki.*

2. Megvannak a nyomai annak is, hogy e szónak eredetileg a matematikán *belül* sem volt az az értelme, amelyet PROKLOS tulajdonít neki. Kimutatható, hogy az „axióma" terminusnak PROKLOSnál is olvasható *új értelmezése* csak ARISTOTELÉS nyomán lett általánossá.

E fejezetben — éppenúgy, mint az előbb az „aitéma" esetében — egyelőre csak a szó jelentését magyarázzuk meg. Az euklidészi „axiómák" részletesebb tárgyalására később térünk majd vissza.

Valójában egyáltalán nem nehéz megállapitani: mit jelentett az „axióma" szó a *dialektika* terminológiájában? K. v. FRITZ pl. legutóbb ezt írta erről már előbb is említett dolgozatában: „ARISTOTELÉS gyakran használja az „axióma" szót egyszerűen *feltevés, vélemény* vagy *tantétel (Annahme, Meinung, Lehrstück)* értelemben is. A szónak ez a jelentése könnyen érthető az ige aristotelés-előtti jelentésfejlődéséből."[91] — Ezt a megállapitást minden további nélkül magunkévá tehetjük. De még tovább vezet bennünket K. v. FRITZnek

[90] K. v. FRITZ, i. m. 29 kk.
[91] Uo. 35.

egy másik, ugyancsak helyes megjegyzése: „ARISTOTELÉS a Topikában a dialektikus kérdés-felelet játék jellemzése során az ἀξιοῦν igét gyakran arra a tételre vonatkoztatva használja, amelyről a kérdező azt reméli, hogy ezt a felelő is elfogadja. Ha az elfogadás bekövetkezik, akkor ezt a τιθέναι igével jelölik (vö. pl. 155 b 30 kk.; 159 a 14 kk et passim). Ha az ἀξιοῦν-ra a τιθέναι következik, mehet tovább a dialektikus következtetés."[92] Nagy egészében még ezzel a jellemzéssel is egyetérthetünk.

A baj inkább ott van, hogy K. v. FRITZ nem érti magát az ἀξιοῦν igét abban az összefüggésben, amelyet e legutóbbi két idézetben nagyjából helyesen jellemzett. Ahelyett ugyanis, hogy ennek az igének „eredeti" jelentésére hivatkoznánk („einschätzen, für würdig halten"), okosabb lesz elővennünk bármelyik megbízhatóbb görög szótárt (pl. Papet), s mindjárt kiderül belőle, hogy van ennek a szónak olyan közismert jelentése is, mint: „kérni, kívánni, követelni" *(bitten, verlangen, fordern)*.[93] Az ἀξιόω igének ez az utóbbi jelentése az V. és IV. században annyira általános volt, hogy ezt igazában még bizonyítani sem kell. Inkább csak példaképpen idézem a következő két Platónhelyet: Resp. III 406 D: παρὰ τοῦ ἰατροῦ φάρμακον ἀξιοῦν „az orvostól orvosságot *kérni*"; Apol. 19 D: ἀξιόω ὑμᾶς ἀλλήλους διδάσκειν „*kérlek* benneteket, világosítsátok föl egymást". — Nyilvánvaló, hogy éppen ezt jelenti az ἀξιόω ige azokon az Aristotelés-helyeken is, amelyekre K. v. FRITZ az előbbi idézetben hivatkozott: a beszélgetés egyik résztvevője (a „kérdező") azt *kéri* a másiktól (a „felelőtől"), hogy valamilyen tételt közösen elfogadjanak. Ha pedig a másik hozzájárul ehhez a kéréshez, akkor ezt éppen azért jelölhetik a τιθέναι igével, mert ettől kezdve a *kért (követelt)* tétel lesz a beszélgetés „hypothesise".

Kézenfekvő, hogy eredetileg az „axióma" főnév sem jelentett egyebet a dialektika terminológiájában, mint éppen „*követelést*" vagy „*követelményt*". Megvolt ennek a szónak ugyanez a jelentése a dialektikán kívül is. SOPHOKLÉS pl. „axiómá"-nak mondta az istenek *követelését*.[94] Sőt az „axióma" vagy „axiósis" *(ἀξίωσις)* szó jelentett *kérvényt*, írásbeli *folyamodványt* is.[95] — A szónak *ebből* az alapjelentéséből könnyen levezethető ennek a terminusnak egyéb értelmi árnyalata is a dialektika terminológiájában: „*axióma*" az az állítás,

[92] Uo. 32. lap 32. jegyzet.

[93] Nem óhajtom kétségbevonni, hogy ennek az igének „kérni, követelni" jelentése csakugyan kifejlődhetett a K. v. FRITZ által hangsúlyozott „ősjelentésből" („für würdig halten"). De mégis félreértésre adhat alkalmat, ha ezt a *pozitív* értelmű „ősjelentést" a szó további jelentésfejlődésében is hangsúlyozzuk. Mert ez az ige kimutathatóan nagyon sokszor éppen a „*hamis* követelést", ill. „*hamis* feltevést" jelölte, pl. Her. 6, 87; Plat., „Menexenos" 239 stb.

[94] Oidipus Col. 1451.

[95] Lásd a Pape-szótárban felsorolt helyeket.

amelynek elfogadását az egyik beszélgető *kéri, követeli* — éppen úgy, mint az előbb tárgyalt „aitéma" —, ezért *„axióma"* az *állítás feltevés, vélemény, tantétel* is.

Nyomatékosan hangsúlyozom, hogy a régebbi, aristotelés-előtti szóhasználat szerint *nem volt* ennek a kifejezésnek olyan jelentésárnyalata, mintha az „axiómá"-nak nevezett „követelés" vagy „követelmény" *könnyen teljesíthető* lett volna, mintha „axióma" a „hitelt érdemlő" vagy a „természetszerűen igaznak tartott" feltevés volna. Nem, éppen ellenkezőleg! Az a benyomásunk, mintha „axióma" a dialektikában — éppenúgy mint az „aitéma" is — éppen az a „követelés" lett volna, amelyhez a másik partner *nem okvetlenül járult hozzá*. Ezt látjuk pl. a következő Platón-idézetből:[96]

„Hiszen tudod, hogy a matematikusok kinevetnék azt, aki az *egyet* fel akarná osztani, és semmiképpen sem járulnának hozzá kísérletéhez. Mert ha te az *egyet* osztani akarnád, ők inkább megsokszoroznák ugyanazt, mert mindenképpen el akarnák kerülni, hogy az, ami *egy*, ne egy, hanem sok legyen. — S ha aztán valaki megkérdezné tőlük: Ugyan miféle számokról beszéltek, ti különös emberek? Hát hol van olyan *egy*, amilyennek ti *követelitek (περὶ ποίων ἀριθμῶν διαλέγεσθε, ἐν οἷς τὸ ἓν οἷον ὑμεῖς ἀξιοῦτε ἐστι)?* Valami önmagában teljesen egyforma, különbség nélküli, amelynek részei sincsenek? — Vajon mit felelnének erre a kérdésre? — Nemde azt, hogy ők a *csak* gondolatban létező számokról beszélnek, azokról, amelyek másképp, mint gondolati úton meg se közelíthetők."

Látjuk tehát, hogy a matematikusok által *„követelt"* (posztulált) „egy" fogalom valami olyasmi, amit a köznapi gondolkozás nem egykönnyen tesz magáévá. Az *ἀξιόω* szónak ez az itt idézett platóni használata is arra mutat, hogy az „axióma" eredetileg aligha volt valami „önmagában is evidens", „mindenki által természetesnek tartott követelés, állítás".

Az „axióma" szó tehát, mint a görög dialektika terminusa, pontosan ugyanazt jelentette, mint szinonímája, az „aitéma" kifejezés. A dialektika terminológiája szerint egyáltalán semmi különbség sincs olyan kifejezések között, mint *αἰτέω, αἴτημα* egyfelől és *ἀξιόω ἀξίωμα* másfelől.

Ugyanez a megállapítás érvényes az antik matematikára is — feltéve, hogy egyelőre nem vesszük figyelembe magát EUKLIDÉSt és a hozzá kapcsolódó antik tudományos irodalmat. Az „axióma" szó a matematikusoknál is pontos szinonímája az „aitéma" kifejezésnek. Ezt nemcsak az egyes matematikusok szóhasználatából állapíthatjuk meg — különösen pl. ARCHIMÉDÉSéből, akinél a „hypothesis", „hypokeimenon" *(ὑποκείμενον)*, „aitéma", „axióma", „lambanomenon" *(λαμβανόμενον)* stb. szavak *azonos jelentésű szinonímák*[97]

[96] Resp. VII 526.
[97] Vö. K. v. FRITZ, i. m. 57.

—, hanem ugyanezt hangsúlyozza maga PROKLOS is. PROKLOS ugyanis egy alkalommal — miután idézett egy példát arra, hogy ARCHIMÉDÉS az *αἰτέω* terminust egy olyan esetben is használja, amikor ő, PROKLOS maga, inkább „axiómát" mondana — félreérthetetlenül leszögezi: „Mások ugyan a matematika minden kiinduló tételét *axiómának* nevezik, mint ahogy a levezetett tételekre is egységesen a *theóréma* nevet alkalmazzák."[98]

Összefoglalva két legutóbbi fejezetünket, megállapíthatjuk tehát:

1. Az „axióma" szó a dialektika terminológiájában ugyanazt jelentette, mint az „aitéma" kifejezés; mind a két terminus a dialógus egyik résztvevőjének olyan *követelését (feltevését, állítását)* jelölte, amelyhez a másik fél nem okvetlenül járult hozzá.

2. Amiképpen a dialektikában, ugyanúgy a matematikában is szinonímája volt az „axióma" szó az „aitéma" terminusnak. Ez az utóbbi állításunk természetesen csak akkor érvényes, ha eltekintünk magának EUKLIDÉSnek a művétől és az ehhez kapcsolódó antik tudományos irodalomtól. (Hiszen EUKLIDÉSnél ez a két terminus két különálló princípium-csoportot jelöl, amely két csoportot nemcsak egymáshoz viszonyítva különböztettek meg, hanem ugyanakkor elválasztották őket a *definícióktól* is!) Azonkívül úgy látszik, ez a két terminus — „aitéma" és „axióma" — az euklidész-*utáni* matematikában *már nem is volt olyan korlátozó értelmű,* mint a dialektikában. Nincs nyoma annak, hogy az „aitéma" vagy „axióma" terminus még az euklidész-*utáni* matematikában is olyan be-nem-bizonyított állítást jelölt volna, amelyet megkülönböztettek a „homologémá"-tól, vagy „hypothesis"-től. A későbbi matematika nem tett már különbséget „hypothesis" és „aitéma" vagy „axióma" között.

Az eddigiekben természetesen a két összehasonlított terminusnak — az „aitémá"-nak és „axiómá"-nak — még csak a *szójelentését* magyaráztuk meg. A továbbiakban meg kell majd vizsgálnunk azt is: mennyiben érvényes mindaz, amit e két szóról elmondtunk, az euklidészi posztulátumokra és axiómákra. Előbb azonban áttekintjük még a következő fejezetben azokat a legfontosabb ókori magyarázó kísérleteket, amelyek megpróbáltak fényt deríteni az euklidészi posztulátumok és axiómák különbségére.

3. ANTIK MAGYARÁZÓ KÍSÉRLETEK

Bocsássuk előre, hogy a kitűnő ókori kommentátor, PROKLOS, bár több ízben megpróbál fényt deríteni arra a kérdésre, hogy valójában mi is hát a különbség az euklidészi posztulátumok („aitémata") és axiómák között, mégsem ad igazán megnyugtató, történeti jellegű magyarázatot erre a problé-

[98] Proclus 181, 20 kk.

mára, jóllehet kísérletei — több szempontból — figyelemre méltóak és tanulságosak. Az alábbiakban röviden ismertetem PROKLOS három magyarázó kísérletét.

1. PROKLOS egyik, látszólag nagyon találó megkülönböztetése azt állítja, hogy az euklidészi *posztulátumok* csak a geometriára vonatkoznak, az *axiómák* viszont minden mennyiséggel foglalkozó tudományban érvényesek.[99] — Nyilvánvaló, hogy e megkülönböztetés egyik része feltétlenül helytálló: EUKLIDÉS posztulátumai mind geometriai jellegűek. Viszont az előbbi állítás másik része — hogy ti. az euklidészi *axiómák* minden mennyiséggel foglalkozó tudományban érvényesek — már több szempontból kifogásolható. Először is: van az euklidészi *axiómák* között *két* olyan tétel, amelyekről azonnal megállapítható, hogy ezek tisztára geometriai jellegűek; a 7. „koiné ennoia" ti. így hangzik: *„az egymásra illők* (azaz: a kongruens idomok) *egyenlők egymás között"*; a 9. viszont: *„két egyenes nem zár be felületet"*. Ennek a két tételnek csak a geometriában van értelme. Ha tehát mégis el akarnánk fogadni az előbbi magyarázatot az euklidészi *posztulátumok* és *axiómák* különbségéről, kénytelenek volnánk figyelmen kívül hagyni ezt a két idézett „koiné ennoiá"-t; ebben az esetben ugyanis a többi euklidészi „axióma" mind olyan tétel, hogy csakugyan elmondható róla: nemcsak a geometriában, hanem minden mennyiséggel foglalkozó tudományban egyformán érvényes.

Van azonban az előbbi magyarázatnak egy másik gyöngéje is. Feltéve ugyanis, hogy hajlandók volnánk figyelmen kívül hagyni azt a két idézett axiómát, amelyre az előbbi megkülönböztetés sehogy se alkalmazható, és feltéve, hogy valóban abban látnánk az EUKLIDÉSnél olvasható „aitémák" és „axiómák" különbségét, hogy az előbbiek csak a geometriára vonatkoznak, az utóbbiak, az „axiómák" viszont — mint egyenlőségi tételek — jóval általánosabb jellegűek, minden mennyiséggel foglalkozó tudományban egyformán érvényesek, azonnal fölmerül bennünk egy másik, még súlyosabb kétely. Kérdés ti.: miért sorolja fel EUKLIDÉS előbb a speciálisan geometriai jellegű „aitéma"-kat és csak ezek *után* a jóval általánosabb jellegű „axióma"-kat, ha csakugyan ő is abban látja e két princípium-műfaj különbségét, amiben PROKLOS előbb idézett magyarázata? Az euklidészi sorrend aligha támogatja az ismertetett magyarázatot. — Kérdés az is: vajon csakugyan figyelemmel voltak-e már akkor is, amikor az euklidészi „axióma"-kat először megfogalmazták, arra, hogy e tételek nagy része nemcsak a geometriára, hanem pl. az aritmetikára is érvényes: Az EUKLIDÉSnél olvasható aritmetikai tételek ugyanis bizonyítási részükben *sohasem* hivatkoznak egyenlőségi axiómára. Természetesen nagyon jól tudjuk, hogy ma már elképzelhetetlen az aritme-

[99] Uo. 182, 6 kk., vö. 58, 7 kk.

tika egyenlőségi tételek nélkül; sőt a modern tudománynak olyan egyenlőségi tételeket is ki kellett mondania, amelyeket EUKLIDÉS maga sohasem fogalmazott meg, pl. az egyenlőség *reflexivitását* és *szimmetriáját*. De semmi bizonyítékunk sincs arra, hogy EUKLIDÉS egyenlőségi tételeit az aritmetikában is használni akarta volna. Inkább az lehet a benyomásunk, mintha EUKLIDÉS „axiómá"-it *csak* a geometriára értené.[100]

Úgy látszik tehát, PROKLOSnak ez az elsőként említett magyarázó kísérlete olyan időkből származhatik, amikor már az ókoriak maguk sem voltak egészen tisztában azzal: voltaképpen miért is különbözteti meg EUKLIDÉS az „aitéma"-t az „axióma"-tól?

2. Egy másik alkalommal PROKLOS azt állítja, hogy tulajdonképpen háromféle *„axióma"* van: 1. aritmetikai, 2. geometriai és 3. olyan „axióma", amely egyformán érvényes mind a két tudományágban.[101] Mind a három féle axiómát azonnal illusztrálja is egy-egy példával; az „aritmetikai axiómára" példája a következő tétel: „az egység osztója minden számnak". — Nem szükséges részletesebben foglalkoznunk ezzel a Proklos-hellyel, mert amúgyis megállapitható már az első pillantásra, hogy ennek az eszmefuttatásnak egyáltalán semmi köze sincs EUKLIDÉS szövegének történeti interpretációjához. PROKLOS példája az „aritmetikai axiómára" olyan tétel, amely EUKLIDÉSnél egyáltalán sehol sem szerepel. (Magától értetődő aritmetikai állítás ez, amely eo ipso következik a *„szám"*-nak euklidészi meghatározásából: „Elemek" VII def. 2.: „a szám egységekből összetett halmaz".) „Axióma"-nak PROKLOS ezt csak azért nevezte el, hogy egyáltalán legyen valami értelme hármas beosztású „rendszerének". Pár sorral alább bemutatja, hogy ugyanez a „hármas beosztás" alkalmazható az „aitémák"-ra is. Ezzel azonban teljesen föl is forgatja azt a rendszert, amely szerint EUKLIDÉS műve csoportosítja a princípiumokat; a prokloszi hármas beosztású axiómák között lesznek bőségesen euklidészi „aitémák" is, és megfordítva ugyanúgy. Ennek az „ad hoc" megkísérelt rendszerezésnek éppoly kevés köze van magának EUKLIDÉSnek a szövegéhez, mintahogy ARISTOTELÉSnek a matematikai princípiumokról adott magyarázatai is csak *részben* alkalmazhatók az „Elemek"-re.[102]

3. Több figyelmet érdemel az utóbbinál PROKLOSnak egy harmadik magyarázó kisérlete. Két alkalommal ugyanis[103] az euklidészi „aitémák" és „axió-

[100] O. BECKER írja (Grundlagen der Math. 90): „Diese Sätze (az euklidészi axiómák) sind ganz allgemein ausgesprochen, beziehen sich aber wohl zunächst nur auf Raumgrössen, wie Strecken, Winkel, Flächen und dgl. Darauf scheint wenigstens Axiom 7 hinzuweisen."

[101] Proclus 184, 11 kk.

[102] Lásd a Függeléket.

[103] Proclus 178, 12 kk., részletesebben: 181, 5 kk. Vö. A. FRENKIAN, Le postulat chez Euclide etc. 19, 1.

mák" különbségét összehasonlítja a *tételek* („theórémák", *θεωρήματα*) és *feladatok* („problémák", *προβλήματα)* különbségével oly módon, hogy az „aitéma"-kat a *feladatok*kal, az „axióma"-kat pedig a *tételek*kel állítja párhuzamba. E két hêly közül a részletesebb magyar fordításban így hangzik: „az *aitéma* az elé a feladat elé állít bennünket, hogy valamely accidens bemutatásához szerkesszünk, konstruáljunk valamit, ami könnyen és egyszerűen szerkeszthető; az *axióma* viszont [az elé a feladat elé állít bennünket], hogy nevezzünk meg valamely lényeges accidenst, amely a hallgató számára minden további nélkül ismeretes, mint pl. az, hogy a tűz meleg, vagy valamilyen más nagyon világos igazság, amely igazságot ha valaki kétségbevon, vagy azt mondjuk rá, hogy nincs józan esze, vagy azt, hogy fenyítést érdemelne." Mindenekelőtt állapítsuk meg, hogy a posztulátumoknak a feladatokkal és az axiómáknak a tételekkel való párhuzamba állítása *csak* bizonyos megszorításokkal találó. Mint idézetünkből is látható, PROKLOS az „aitéma"-t nem általában a *feladat*tal *(πρόβλημα)*, hanem csak a *konstrukciós* feladattal akarja összehasonlítani. (Érdemes lesz egyszersmind leszögeznünk azt is, hogy a görög matematikai terminológia nemcsak a konstrukciós feladatot, hanem a bizonyítási feladatot is *πρόβλημα*-nak nevezte. Vannak ilyen bizonyítási feladatok EUKLIDÉS szövegében is, pl. Elem. X. App. 27. ed. H., és természetesen bármely tétel is megfogalmazható bizonyítási feladat formájában.) — Ahhoz azonban, hogy PROKLOS összehasonlítása érvényes legyen, nem elég a „feladat" terminust „*konstrukciós* feladat"-nak értenünk; a posztulátumok közül is csak az első háromra szabad gondolnunk, mert csak ezek igazi *konstrukciós* posztulátumok. — Látni fogjuk majd később, hogy az „aitéma" princípium-műfajnak a *konstrukciós* feladatokkal való összehasonlítása csakugyan olyan szempont, amely a történeti kutatást is helyes nyomra vezetheti. Ennek ellenére azonban PROKLOSnak ez a harmadik magyarázata sem helytálló teljes egészében. Hiszen az „axióma" szóról kiderítettük már, hogy ez a terminus eredetileg semmi esetre sem jelölhetett „magától értetődő, természetes igazságot", márpedig PROKLOS legutóbbi idézete éppen azt hangsúlyozza, hogy EUKLIDÉS axiómáit épeszű ember nem vonhatja kétségbe, az ilyesmit csak az értelmetlen, öncélú vita kedvéért szokták egyesek kétségbevonni.

Ha mármost áttekintjük a felsorolt magyarázó kísérleteket, be kell látnunk, hogy ezek közül egyik sem megnyugtató. Nyilvánvaló, hogy ezek a kísérletek olyan időben keletkeztek, amikor már *nem értették* EUKLIDÉS princípium-felsorolási rendszerét. Ezért aztán hol olyan rendszerekkel kísérleteztek, amelyeknek egyáltalán semmi közük sincs EUKLIDÉShez — ilyen pl. a 2. pontban említett magyarázó kísérlet —, hol meg gondos megfigyeléssel igyekeztek megállapítani: mi lehet a különbség „aitéma" és „axióma" között; erre az utóbbira példa az említett 1. és 3. „magyarázat". Csakugyan, ez az alapos megfigyelés részben lényeges különbségeket is észrevett, illetőleg tett egy-egy találó megállapítást különösen az „aitéma"-kra; ilyen pl. az, hogy az 1. magyarázat megállapítja: az „aitémák" mind geometriai jellegű tételek; ugyanígy nyomravezető a 3. kísérletből is az az állítás, hogy a posztulátumoknak — legalábbis egy része valamiképpen a geometriai konstrukcióval függ össze. — Teljes egészében azonban egyik magyarázat sem fogadható el. A történeti kutatás nem állhat meg ezeknél a kísérleteknél, más eszközökkel kell tisztáznia az euklidészi „aitémák" és „axiómák" problémáját.

4. Az euklidészi „aitémák" problémája

A következőkben arra a kérdésre keresek választ: mennyiben világítja meg az „aitéma" terminus szójelentésére adott magyarázatunk („aitéma" = = „olyan követelés, feltevés, állítás, amelyhez a másik fél nem okvetlenül járul hozzá") az euklidészi posztulátumok eredetét? — Hogy e kérdésre felelhessünk, meg kell előbb ismerkednünk az öt euklidészi posztulátum történeti problémájával. E posztulátumok így hangzanak:

„Követeltessék,

1. hogy bármely pontból bármely más ponthoz egyenest húzhassunk,
2. hogy bármely egyenes szakaszt folytatólagosan meghosszabbíthassunk,
3. hogy bármilyen középpontból bármilyen sugárral kört rajzolhassunk,
4. hogy minden derékszög egyenlő legyen egymással,
5. és hogy, ha valamely egyenessel metszünk két másik egyenest oly módon, hogy a belül és a metsző egyenesnek ugyanazon az oldalán fekvő szögek összege kisebb, mint két derékszög, akkor a két egyenes végtelen meghosszabbításának metszéspontja a harmadik metsző egyenesnek azon az oldalán legyen, amelyen a két derékszögnél kisebb összegű szögek fekszenek.

A történeti irodalom ezeknek a posztulátumoknak az értelmét és jelentőségét — legalábbis H. G. Zeuthen egyik alapvető munkája óta[104] — elég egységesen ítéli meg. O. Becker pl. legutóbb ezt írta róluk: „A posztulátumok feladata az, hogy biztosítsák olyan geometriai alapformák matematikai egzisztenciáját, amely alapformákból a további létező geometriai idomok konstruktív úton felépíthetők; ilyen geometriai alapformák az egyenesek, körök és metszéspontjaik. A híres 5. posztulátum pl. a konvergáló egyenesek metszéspontjának létezését biztosítja."[105]

[104] H. G. Zeuthen, Die geom. Konstruktion als Existenzbeweis, *Math. Ann.* 47, 1896, 225—228; *Geschichte der Math. im Altertum und Mittelalter*, Kopenhagen 1896.

[105] O. Becker, *Das math. Denken der Antike*, Göttingen 1957, 19.

De korántsem ilyen egységes már a szakirodalom annak a másik kérdésnek a megítélésében, hogy vajon milyen korból származnak ezek a posztulátumok? P. TANNERY pl. — kiindulva abból a megfigyelésből, hogy ARISTOTELÉS a matematikai posztulátumokat egyáltalán nem említi, és hogy a szerint a meghatározás szerint, amelyet ARISTOTELÉS ad, az „aitéma" még inkább csak a dialektika terminus technicusa lehet — úgy gondolta, hogy legalábbis az első három posztulátum magától EUKLIDÉStől származhatik.[106] Ugyanakkor TANNERY azt a másik elgondolását, hogy a 4. és 5. posztulátum *nem származhatik* EUKLIDÉStől, elég meglepően azzal okolta meg, hogy ezek az utóbbi tételek „nem is méltóak EUKLIDÉShez".[107] — TH. HEATH viszont éppen a 4. és 5. posztulátumot tulajdonította EUKLIDÉSnek, bár elképzelhetőnek tartotta azt is, hogy mind az öt posztulátum magától EUKLIDÉStől származik.[108] — Úgy látszik tehát — bár az egyes posztulátumok eredetét különbözőképpen ítélik meg — TANNERY óta alakult ki az a „communis opinio", hogy a geometriai posztulátumok, vagy legalábbis egy részük, magának EUKLIDÉSnek köszönhetők. Ebben az értelemben írta J. E. HOFMANN is kis összefoglaló munkájában: a posztulátumok magának EUKLIDÉSnek lényeges metodikai kiegészítései lehetnek.[109] — Csak a legutóbbi időkben jelentkeztek olyan törekvések, amelyek megpróbálták a posztulátumokat is az euklidész-*előtti* időkre datálni. K. v. FRITZ pl. azt állította — hivatkozván PROKLOS egyik megjegyzésére (Procl. p. 179) —, hogy EUKLIDÉS első három konstrukciós posztulátuma PLATÓN tanítványától, SPEUSIPPOStól származnék.[110] Bár e gondolat — mint mások is megjegyezték már[111] — elhamarkodott, semmivel sem igazolható feltevés, mégis figyelemre méltó a tendencia maga.

Az utóbbi időben ugyanis egyre több olyan kísérlettel találkozunk, amely az euklidészi posztulátumok előzményeit kutatja. O. BECKERnek sikerült is legutóbb — rendkívül plauzibilis formában — rekonstruálnia az euklidészi 5. és ezzel együtt a 4. posztulátumnak is feltehető „eredeti formáját".[112] Ez a rekonstrukció ugyan önmagában még egyáltalán nem bizonyíték arra, hogy csakugyan voltak posztulátumok már az EUKLIDÉSt megelőző korban is; de természetesen egy ilyen kísérletnek csak akkor van értelme, ha feltesszük, hogy *nem* EUKLIDÉS teremtette meg az „aitéma" nevű princípium-műfajt. —

[106] P. TANNERY, *Mém. Scient.* II 48—63.

[107] Vö: A. FRENKIAN, i. m. 15 és C. THAER, Antike Mathematik 1906—1930 (*Jahresber, über die Fortschr. der klass. Altertumswiss.* begr. von C. BURSIAN, herausg. von A. THIERFELDER, Jahrg. 1943 II Bd. 283—284) 22.

[108] TH. HEATH, *A History of Greek Mathematics*, Vol. I Oxford 1921 375.

[109] J. E. HOFMANN, *Gesch. d. Math.*, I. Teil, Samml. Göschen, Bd. 226, Berlin 1953 32.

[110] K. v. FRITZ, i. m. 97.

[111] Vö. O. BECKER, Archiv f. Begriffsgesch. IV 213.

[112] Uo. 212—218.

Éppen ezen a ponton akarok belekapcsolódni az eddigi kutatásokba. A következőkben mindenekelőtt tisztázni akarom az „aitéma" princípium-műfaj eredetét. E most kezdődő vizsgálat során *nem tárgyalom* az 5. és 4. posztulátum kérdését, minthogy ez — mint már mások is észrevették — külön probléma. Figyelmünket tehát az első három konstrukciós posztulátumra összpontosítjuk. Kérdés: melyik korból származhatnak e posztulátumok?

5. OINOPIDÉS KONSTRUKCIÓI

A történeti kutatás valójában már régen megközelítette a helyes választ legutóbbi kérdésünkre. Tulajdonképpen nem is kell ezúttal egyebet tennem, mint összeállítanom a régebbi kutatóknak néhány erre vonatkozó megállapítását, s aztán levonom belőlük a magától adódó következtetést.

O. BECKER ugyanis, miután — amint szavait föntebb idéztük is — jellemezte az euklidészi posztulátumokat, hogy ti. ezek olyan geometriai alapformák létezését mondják ki, amely alapformákból konstruktív úton fölépíthetők a további létező idomok, ezt írja még:

„A matematikai exisztenciának ez a konstrukciós felfogása még az V. századból, OINOPIDÉStől származik; ő volt az, aki először hajtott végre olyan elemi konstrukciókat, mint pl. adott pontból merőleges lebocsátását valamely adott egyenesre, *csak* körzővel és vonalzóval. Úgy látszik, a platóni iskolában mindenütt, ahol csak tehették, ragaszkodtak ezeknek a geometriai segédeszközöknek, a körzőnek és a vonalzónak a kizárólagosságához."[113]

Rendkívül fontos ez az utalás OINOPIDÉSre, ha az euklidészi posztulátumok előzményeit kutatjuk. PROKLOS ugyanis Euklidés-kommentárjában kétszer is hivatkozik OINOPIDÉSre egy-egy geometriai konstrukcióval kapcsolatban. E hivatkozások annyira lényegesek számunkra, hogy mind a két hely fordítását idézem.

EUKLIDÉS „Elemeiben" az I. könyv 12. tétele (feladata) így hangzik: *„Bocsássunk valamely adott végtelen egyenesre valamely adott rajta kívül eső pontból merőlegest."* — Ehhez a tételhez fűzi PROKLOS a következő megjegyzést:[114] „Ezt a problémát először OINOPIDÉS kutatta, mivel hasznát látta az asztronómiában. A merőlegest ő még régiesen *gnómón szerinti vonalnak* hívja, mivel a *„gnómón"* (a napóra mutatója) derékszöget zár be a *horizónnal.*" — PROKLOS másik OINOPIDÉSre vonatkozó megjegyzése az „Elemek" I. könyve 23. tételéhez (feladatához) kapcsolódik; e másik tétel így hangzik: *„Szerkesszünk valamely adott egyenes adott pontjába egy megadott egyenesvonalú szöggel egyenlő szöget."* PROKLOS ehhez a következő megjegyzést

113 O. BECKER, *Das math. Denken der Antike* 19 k.
114 Proclus 283, 7 kk.

fűzi: „Ez is olyan probléma, amelyre, EUDÉMOS tanúsága szerint, először OINOPIDÉS bukkant rá."[115]

Amint látjuk, mind a két probléma (feladat) annyira meglepően egyszerű, hogy az első pillantásra nem is értjük, miért volt egyáltalán érdemes ezekkel kapcsolatban megemlíteni OINOPIDÉS nevét? Csakugyan olyan kezdetleges lett volna még OINOPIDÉS korában is, tehát i. e. 440 körül, a geometria, hogy még ilyen egyszerű szerkesztéseket se ismertek volna?[116] Ez bizony egyáltalán nem valószínű. Hiszen OINOPIDÉS csak alig valamivel idősebb kortársa lehetett annak a chiosi HIPPOKRATÉSnek, akinek rendkívül magasfokú és fejlett geometriai tudását már jól ismerjük.[117] Úgy látszik, másképp kell értenünk PROKLOSnak OINOPIDÉSre vonatkozó megjegyzését is.

TH. HEATHnek erre vonatkozó feltevéseit „három" pontban foglalhatjuk össze. Bár tulajdonképpen mind a három pont csak egyetlenegy állítást tartalmaz három különböző megfogalmazásban, mégis idézem őket mind szerzőjük szavai szerint:[118]

1. OINOPIDÉS lehetett az első, aki az említett feladatokat csak vonalzóval és körzővel oldotta meg;
2. bizonyára ő volt az első, aki ezekre a feladatokra inkább *elméleti*, mintsem gyakorlati megoldást talált;
3. OINOPIDÉS jelentősége abban állhatott, hogy *a módszert elméleti szempontból* tökéletesítette.

Véleményem szerint e feltevések nagyon valószínűek. Tulajdonképpen csak az első ponthoz kell megjegyzést fűznöm. Hogyan értsük azt az állítást, hogy OINOPIDÉS lehetett az első, aki az említett feladatokat csak körzővel és vonalzóval oldotta meg? Forrásunk, PROKLOS egy szóval sem beszél vonalzóról és körzőről! De HEATH feltevése mégsem alaptalan, csak kifejezésmódját kell egy kissé jobban megvilágitanunk. — Nem kétséges, hogy EUKLIDÉSnek az a két konstrukciós feladata (Elem. I. 12 és 23), amely alkalmat adott PROKLOSnak arra, hogy OINOPIDÉSt megemlítse, *csak elméleti szempontból érdekes*. Bizonyos, hogy ugyanennek a két feladatnak *gyakorlati* megoldását már nagyon régen ismerték a görögök előtti időkben is, ugyanúgy, ahogy a vonalzót és a körzőt is nagyon régen használták már a kézművesek az elméleti matematika keletkezése előtt is. Az euklidészi feladatok inkább azt akarják megmutatni: hogyan oldhatók meg ezek a konstrukciós

115 Uo. 333, 5—6.

116 A. D. STEELE, Über die Rolle von Zirkel und Lineal in der griech. Mathematik Quell. u. Studien etc. B 3 (1936) 287 kk.; 304.

117 B. L. V. D. WAERDEN, *Erwachende Wiss.* 213—214.

118 TH. HEATH, i. m. I 175.

problémák az *első három posztulátum alapján.* Gyakorlati szempontból ugyanis az első három posztulátum nem egyéb, mint a vonalzó és körző használatának szentesítése a geometriai konstrukciókban.[119] Bármely pontból húzhatunk bármely más ponthoz egyenest (1. posztulátum), és bármely egyenes szakaszt folytatólagosan meghosszabbíthatunk (2. posztulátum), mert használhatjuk a vonalzót; ugyanígy bármely középpontból bármilyen sugárral kört is rajzolhatunk (3. posztulátum), mert meg van engedve a körző használata is. — Az az állítás tehát, hogy OINOPIDÉS az említett geometriai feladatokat „csak vonalzóval és körzővel oldotta meg", egyértelmű azzal, hogy: OINOPIDÉS *ismerte és tudatosan alkalmazta* EUKLIDÉS *három első posztulátumát.* Sőt valószínű, hogy ezeket a posztulátumokat éppen OINOPIDÉS állította fel, mert különben ugyan mi értelme volna HEATH azon állításának, hogy „bizonyára ő volt az első, aki ezekre a feladatokra inkább *elméleti* mintsem gyakorlati megoldást talált"? És miben állhatott volna különben „a módszer elméleti szempontból való tökéletesítése", ha nem éppen abban, hogy OINOPIDÉS felállította a három első euklidészi posztulátumot? — Ha mégis kétségbevonnánk ezt a magyarázatot és a három első euklidészi posztulátumot későbbi időre datálnánk, akkor kénytelenek volnánk egyszersmind PROKLOSnak OINOPIDÉSre vonatkozó szavait is tévedésnek minősíteni, mert másképp ez a hagyomány megnyugtatóan alig magyarázható.

6. EUKLIDÉS HÁROM ELSŐ POSZTULÁTUMA

De mi értelme volt egyáltalán a posztulátumok felállításának? — Azt hiszem, az a válasz, amelyet erre a kérdésre a történeti irodalom eddig adott, nem egészen megnyugtató. Nagyjából ugyanis a következő gondolatmenettel szokták magyarázni a konstrukciós posztulátumok eredetét.[120] Az antik geometria valóban létezőknek csak azokat az idomokat tartja, amelyek megkonstruálhatók. Ezért kell mindenekelőtt posztulátumokban kimondani azoknak a legegyszerűbb geometriai alapformáknak a létezését — tehát az egyenesekét, körökét és metszéspontokét —, amelyekből a további létező geometriai idomok konstrukciós úton előállíthatók. — Még abban az esetben is, ha ezt a magyarázatot minden fenntartás nélkül magunkévá tennénk, felmerülne a kérdés: mi lehetett a történeti oka annak, hogy a „matematikai exisztenciát" éppen ebben a formában fogalmazták meg? És miért nevezik azokat a tételeket, amelyek a legegyszerűbb geometriai alapformák létezését kimondják, posztulátumoknak, görögül „aitémata"-nak? Hiszen ez a terminus a dialektikában — mint már

119 Vö. J. E. HOFMANN, i. m. 32.

120 A következőkhöz lásd O. BECKER, *Mathematische Existenz,* Halle a. d. S. 1927. 130 kk.

láttuk — olyan „követelményt", „állítást" jelölt, amelyhez a másik fél *nem okvetlenül járult hozzá.* Mennyiben érvényes a szó jelentésének magyarázata az euklidészi posztulátumokra?

A három első euklidészi posztulátum olyan egyszerű, könnyen elgondolható követelményt mond ki, hogy kezdetben talán csakugyan hajlandók volnánk kétségbevonni: valóban úgy kell-e érteni ezúttal is az „aitéma" terminust, mint ahogy azt egyik korábbi fejezetünkben magyaráztuk? Ugyan mi oka lehetett volna a dialektikus vita másik partnerének arra, hogy ezekhez a követelményekhez ne járuljon hozzá? — Azt hiszem, ezekre a kérdésekre nagyonis egyértelmű választ adhatunk, ha figyelembe vesszük PROKLOS Euklidés-kommentárjának néhány, éppen a posztulátumokra vonatkozó paszszusát. A következőkben PROKLOS szövegét idézem:

„Az a lehetőség, hogy bármely pontból bármely más ponthoz egyenest húzhatunk, következik abból, hogy a vonal a pont *folyása,* az egyenes pedig egyenletes, irányát-nem-változtató *folyás.* Képzeljük el tehát, hogy a pont egyenletes és legrövidebb *mozgást* végez és így jutunk el a másik ponthoz, s ezzel már teljesült is az első követelmény (= aitéma) minden különösebb gondolati nehézség nélkül. Képzeljük el hasonlóképpen, hogy valamely pont által határolt egyenes szakasz végpontja legrövidebb egyenletes *mozgást* végez, s így teljesül a második aitéma könnyű és egyszerű úton. Ha viszont azt gondoljuk el, hogy valamely egyenes szakasz egyik végpontja nyugalomban marad, míg másik végpontjával *mozgást* végez nyugalomban maradt végpontja körül, akkor teljesült a harmadik követelmény (= aitéma)." [121]

Nem volna érdemes most fennakadnunk azon, hogy ez a Proklos-idézet két olyan definícióra is utal, amelyeket EUKLIDÉS szövege egyáltalán nem őrzött meg számunkra; az egyik definíció ti.: „a vonal a pont *folyása*", a másik pedig: „az egyenes vonal a pontnak egyenletes, irányát-nem-változtató *folyása*". Sokkal érdekesebb ennél most az, hogy PROKLOS az első három euklidészi posztulátum állítólagos „egyszerűségét" bizonyos *mozgásformák* egyszerűségével magyarázza. Csakugyan, az említett posztulátumok „követelménye" mozgás nélkül megvalósíthatatlan. — Dehát valóban olyan egyszerű, problémátlan valami-e a *mozgás,* mint amilyennek azt PROKLOS idézete feltüntetni szeretné? — Igazában még a késői kommentátor, PROKLOS is nagyon jól tudja, hogy az említett mozgásformák korántsem olyan könnyen elgondolhatók. Ez derül ki következő szavaiból: [122]

„Ha meg valaki nehézséget támasztana azzal a kérdéssel: hogyan viszszük be mi a mozgást a geometria mozdulatlan világába, és hogyan állíthatjuk, hogy az, aminek egyáltalán nincs része (ti. a pont) mozog, h i s z e n

[121] Proclus 185, 8 kk.
[122] Uo. 185, 25 kk.

ez teljességgel lehetetlen, akkor megkérjük az illetőt, ne nehezteljen ránk túlságosan... A mozgás ti., amelyről mi beszélünk, nem anyagi, hanem képzeletbeli (görögül: „fantasztikus"). Csakugyan nem járulhatunk hozzá ahhoz, hogy az, aminek nincs része (a pont) anyagi mozgást végezzen, de képzeletbeli mozgást végezhet. Hiszen ez oszthatatlan *Nus* (= az Értelem) is mozog, ha nem is éppen a térben stb., stb."

Szerencsére nem kell interpretálnunk PROKLOS „megnyugtató szavait", amelyek az idézet vége felé egyre obskurusabbakká lesznek. Számunkra sokkal fontosabb most az a tény, hogy ez a legutóbbi idézet — legalább részben — egy olyan dialektikus vitát reprodukál, amelyben szóhoz jutnak azok a beszélgető partnerek is, akik a posztulált mozgást „elgondolhatatlannak" tartják. PROKLOS ugyan a partnerek kifogását úgy értelmezi, mintha ezek csak a pontnak, a nem-anyagi valaminek a mozgása ellen tiltakoznának, és mintha ez a tiltakozás leszerelhető lenne azzal, hogy van az anyagi mozgáson kívül „képzeletbeli" mozgás is. — De vajon abban az időben, amikor OINOPIDÉS feltehetően megfogalmazta a három első euklidészi posztulátumot — az i. e. V. század közepe táján —, nem valami más meggondolás alapján vonták-e kétségbe egyesek *minden* mozgás elméleti lehetőségét? — Közismert, hogy a dialektika megteremtői, az eleaták ki tudták mutatni a „mozgás" fogalmában az ellentmondást, s ezért minden érzéki tapasztalás ellenére tagadták a mozgás elméleti lehetőségét; éppen azt állították, hogy a mozgás *elgondolhatatlan*, mint ZÉNÓN az V. század első felében tömören megfogalmazta: „a mozgó test sem ott nem mozog, ahol van, sem pedig ott nem mozog, ahol nincs".[123]

Ha tehát arra gondolunk, hogy az eleai tanítás szerint a „mozgás" ellentmondásos valami, és mint ilyen *elgondolhatatlan*, egyszerre megértjük azt is: miért kellett felállítania OINOPIDÉSnek az első három posztulátumot Mozgás nélkül egyáltalán nem lehetséges geometriai konstrukció. Vagyis, ha *elméletileg* lehetővé akarjuk tenni a konstrukciót, akkor meg kell engednünk legalább azokat a legegyszerűbb mozgásformákat, amelyek feltétlenül szükségesek a legelemibb geometriai formák (egyenesek, körök stb.) létrehozásához. Az első három posztulátum („aitéma") éppen ezeknek a legegyszerűbb geometriai konstrukcióhoz is múlhatatlanul szükséges mozgásformáknak a megengedését „követeli". Érthető az is, hogy ezt a „követelményt" nem nevezik „hypothesis"-nek vagy „homologémá"-nak, mert *mozgásról*, azaz ellentmondásos valamiről lévén szó, ezúttal függőben marad a dialektikus vitában résztvevő másik partnernek a hozzájárulása a felállított követelményhez. Csakugyan arról van tehát szó — legalábbis az első három euklidészi posztulátum esetében —, amit PROKLOS ARISTOTELÉSre hivatkozva így fogalmazott meg: „Ha

123 DIELS—KRANZ, Vorsokratiker, I 29 B 4.

pedig az állítás — amelyből ti. valamely dialektikus vita alkalmával ki akarunk indulni — valamilyen ismeretlen tétel, de a feltevés mégis megtörténik, *jóllehet a tanuló* (azaz a beszélgetés másik résztvevője) *nem járul hozzá, akkor ‚aitéma'-ról beszélünk.*"[124]

Ezzel, úgy gondolom, sikerült legalább nagy vonalakban tisztáznunk az euklidészi „aitéma" nevű princípium-műfajnak az eredetét, bár ebben az összefüggésben a feltehetően *későbbi* 5. és 4. posztulátum kérdésével nem foglalkozhattunk. — A következő fejezetben az euklidészi „axiómák" történeti problémáját vizsgálom.

7. Az euklidészi axiómák

A szójelentés magyarázata során megállapítottuk: az „axióma" szó, mint a görög dialektika terminusa, pontosan ugyanazt jelentette, mint szinonímája, az „aitéma" kifejezés. A dialektika terminológiája szerint egyáltalán semmi különbség sincs olyan kifejezések között, mint *αἰτέω, αἴτημα* egyfelől és *ἀξιόω, ἀξίωμα* másfelől. — Kérdés: alkalmazható-e a szónak ez a jelentése az euklidészi axiómákra is, amelyek fentebbi megállapításaink szerint csak később, az EUKLIDÉS utáni korokban kapták a „koinai ennoiai" megjelölést?

Ha az „axióma" terminus eredetileg az euklidészi „koinai ennoiai" esetében is olyan „követelményt" („feltételes érvényű állítást") jelölt, amelyhez a theóretikus vita másik résztvevője nem okvetlenül járult hozzá, akkor ez más szóval azt jelenti, hogy az euklidészi axiómák olyan állításokat tartalmaznak, amelyeknek helyessége bizonyos szempontból kétségbevonható. Dehát mennyiben kételkedhetik valaki az euklidészi axiómák helyességét illetően? Hiszen ARISTOTELÉS szerint — amint erre már utaltunk — csak az értelmetlen, öncélú vitatkozás kedvéért szokták egyesek kétségbevonni a matematikai axiómák állításait. — Nézzük meg közelebbről EUKLIDÉS axiómáit.

EUKLIDÉS mai szövegében összesen kilenc axiómát találunk. A princípiumoknak ez a csoportja feltűnően egységes. Eltekintve ugyanis a legutolsótól, a kilencediktől, a többi nyolc mind az *egyenlőségről* állít valamit. Éppen ez a feltűnő egyöntetűség volt az oka annak, hogy a legtöbb kutató a 9. axiómát ki is rekesztette a princípiumoknak ebből a csoportjából;[125] ezzel valószínűleg csak később egészítették ki az euklidészi axiómákat. (A 9. axiómával nem foglalkozom e dolgozat keretében.) A többi euklidészi axióma tehát mind *egyenlőségi tétel.* Mint más összefüggésben rámutattam már, egyenlőségi tétel a 8. axióma is, bár formájában némileg különbözik a többitől: „az egész

[124] Lásd a 83. jegyzetet.

[125] Vö. J. L. HEIBERG, *Euclides, Elementa* I. 1883 p. 10 és O. BECKER, *Die Grundlagen der Math.* 90.

nagyobb, mint a rész".[126] Ez az állítás ti. „negatív egyenlőségi tétel" azért, mert a teljes gondolat, amit ki akar fejezni, tulajdonképpen ez: „a rész *nem egyenlő* az egésszel, az egész nagyobb, mint a rész".

Azt hiszem, könnyű lesz megértenünk, miért nevezték az EUKLIDÉSnél olvasható egyenlőségi tételeket „axiómáknak", ha összehasonlítjuk őket olyan másfajta egyenlőségi tételekkel, amelyeknek az antik dialektika terminológiája szerint „homologémata" volt a nevük. PLATÓN „Theaitétos" c. dialógusában ugyanis „homologémata" néven szerepel a következő két egyenlőségi tétel:[127]

1. „egy dolog sem nagyobbá sem kisebbé nem lesz, sem tömegében sem szám szerint, amíg *egyenlő önmagával*",

2. „amihez semmi nem járul hozzá, és amiből semmi el nem vétetik, az nem növekedhet és nem is csökkenhet, hanem *önmagával egyenlő* marad".

Ha alaposabban megvizsgáljuk ezeket az állításokat, mindjárt látjuk, hogy ezek tulajdonképpen az „önmagával egyenlő" fogalmára adnak kettős definíciót. Az első tétel kimondja, hogy az „önmagával egyenlő" fogalma kizárja annak a dolognak a nagyobbá vagy kisebbé válását, amelyre ezt a megjelölést alkalmazzák. A második tétel megfordítja ezt az állítást és azt mondja ki, hogy éppen az a dolog „egyenlő önmagával", amely sem nagyobbá, sem kisebbé nem lesz.

Nem csoda, hogy ezeknek a tételeknek az antik dialektikában „homologémata" volt a nevük, mert az ilyen esetekben a dialektikus vita résztvevőinek a megegyezése *(ὁμολογεῖν)* csakugyan kézenfekvő volt. Ezek az állítások ugyanis pusztán *formális tételek.* Az első közülük csak más szavakkal fogalmazza meg azt, hogy mit értsünk az „önmagával egyenlő" fogalmán, a második tétel pedig egyszerűen megfordítja ugyanezt a definíciót, felcserélvén a szubjektumot és predikátumot. — Nyilvánvaló, hogy az antik dialektikusok éppen az ilyen formális tételeket tarthatták „különösen erős állításoknak" (vö. PLATÓN, „Phaidón" 100 A), mert ezek nem valamilyen praktikus-empirikus tapasztalat általánosításai, hanem *puszta gondolati konstrukciók,* amelyek éppen olyan ellentmondásmentesek, mint ősképük, PARMENIDÉS híres tétele: *τὸ ὂν ἔστιν,* „a létező van".

Ezzel szemben vizsgáljuk meg most az euklidészi egyenlőségi axiómákat! Ezek magyar fordításban így hangzanak:

„1. Azok, amelyek ugyanazzal a mennyiséggel egyenlők, egymás között is egyenlők.

2. Ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek is egyenlők lesznek.

[126] *Matematikai Lapok* X. (1959) 72—121.
[127] „Theaitétos" 155 A.

3. Ha egyenlőkből egyenlőket vonunk ki, a maradékok is egyenlők.

[4. Ha nem-egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek nem-egyenlők lesznek.

5. Ugyanannak a mennyiségnek a duplái egyenlők egymás között.

6. Ugyanannak a mennyiségnek a felerészei egyenlők egymás között.]

7. Az egymásra-illők (azaz: a kongruens idomok) egyenlők egymás között.

8. Az egész nagyobb mint a rész."

Nincs ezek között a tételek között egyetlenegy olyan *csak formális állítás* sem, mint amilyenek az előbb tárgyalt platóni „homologémák". Ellenkezőleg! Ezek a tételek mind olyan viszonyt írnak le két dolog között („egyenlő"), ami bizonyos értelemben már szinte önmagában is *ellentmondásos*. Mert egyáltalán nem magától értetődő az, hogy két különböző dolog — ami tehát távolról sem ugyanaz, hiszen azért „két" dolog és nem *egy*! — mégis *egyenlő* egymás között. Magától értetődő a spekulatív gondolkozás számára csak az, hogy valamely dolog *önmagával* egyenlő, de nem az, hogy ez a dolog még egy *másikkal* is egyenlő legyen![128] — Azonkívül ezek az euklidészi egyenlőségi tételek még olyan állítások is, amelyeknek helyességét csak *empirikus tapasztalattal, érzéki észrevevéssel* ellenőrizhetjük. A 7. axióma pl. azért igaz, mert látásunk, szemünk győz meg arról, hogy az egymásra illeszthető (kongruens) idomok egyenlők. Ugyanez érvényes a 8. axiómára is. Azt, hogy „az egész nagyobb mint a rész", a geometriai idomok esetében[129] ugyancsak érzékszerveinkkel állapíthatjuk meg.

Gondoljunk mármost arra, hogyan ítélték meg az antik dialektika megteremtői, az eleai filozófusok az *érzékszervek útján nyert tudást*, az *empirikus tapasztalást?* Maga PARMENIDÉS erről a kérdésről így nyilatkozott: „Ne hagyd, hogy a sokat tapasztalt megszokás erre az útra kényszerítsen! Ne bízd magad céltalan látásodra, zúgó füledre és nyelvedre! Ne ezekkel, hanem értelmeddel döntsd el a sokat vitatott kérdést, amelyet eléd tárok!"[130] Az eleaták minden érzéki megismerést, empirikus tapasztalatot elutasítottak, mert ki tudták mutatni minden ilyen eredetű „tudásban" az ellentmondást. Szerintük igazi megismerés csak az lehet, amely függetleníteni tudja magát minden érzéki tapasztalástól, s amelyhez csak gondolati úton juthatunk el. — Úgy látszik, ennek az eleai elgondolásnak a jegyében érthetővé lesz az is, miért nevezhették az

128 Természetesen más a helyzet akkor, ha az „egyenlő" fogalmát így határozzuk meg: „*egyenlő* két véges halmaz akkor, ha elemeik kölcsönösen és egyértelműen leképezhetők egymásra". Ebben az esetben viszont éppen az „önmagával egyenlő" fogalma nem magától értetődő, mert ehhez még azt is ki kell mondanunk, hogy *minden halmaz elemei önmagukra is kölcsönösen és egyértelműen leképezhetők.*

129 Az euklidészi axiómák eredetileg *geometriai* tételek; lásd fentebb a 100. jegyzetet.

130 Lásd a 67. jegyzetet.

előbb tárgyalt platóni egyenlőségi tételeket „homologémata”-nak (mert ezek csak *formális gondolati konstrukciók*, amelyekhez — legalábbis *látszólag* — minden empirikus tapasztalat *nélkül* jutunk el), és miért kapták az euklidészi egyenlőségi tételek az „axiómata” nevet? — Mert ezek az utóbbiak egészen nyilvánvalóan érzéki észrevevéseinkből származnak, empirikus tapasztalataink általánosításai. Csakugyan megtörténhetett tehát az, hogy a dialógus egyik résztvevője „kérte”, „követelte” ezeknek az egyenlőségi tételeknek az elfogadását, alapulvételét, mert ezeket az állításokat minden empirikus tapasztalat igazolni látszott. De egyáltalán nem volt bizonyos az, hogy a dialógus másik résztvevője — ha magáévá tette PARMENIDÉS tanítását — hozzájárul-e ezekhez az euklidészi egyenlőségi tételekhez? — Ezért volt ezeknek a princípiumoknak régi nevük: „axiómata” — „követelmények”, azaz ugyanolyan kiindulásul választott és be-nem-bizonyított állítások, mint a *posztulátumok.*

*

Az előbbiekben arra a következtetésre jutottunk, hogy az euklidészi „koinai ennoiai” régi és eredeti neve az „axiómata” terminus nagyon jól értelmezhető az eleai filozófia jegyében. Felmerül mármost a kérdés: vajon nem éppen az eleaták voltak-e azok, akik — mint ARISTOTELÉS és PROKLOS gondolták — „az értelmetlen és öncélú vita kedvéért kétségbevonták ezeknek az axiómáknak a helyességét”? — Vagy meg is fordíthatjuk ugyanezt a kérdést: vajon nem éppen az eleai tanítással szemben kellett-e a legrégibb görög matematikusoknak ilyen „egyenlőségi követeléseket” (axiómákat) felállítaniok.

Úgy látszik, erre az utóbbi kérdésre könnyen felelhetünk. Csakugyan tudjuk, hogy éppen az eleaták egészen más értelemben tárgyalták az „egyenlőség” problémáját, mint az előbb idézett euklidészi axiómák. Legutóbb — több mint negyedszázaddal ezelőtt — O. BECKER így írt erről a kérdésről:[131]

„ZÉNÓN paradoxona Achillésről és a teknősbékáról megfogalmazható mint halmazelméleti probléma. E szerint a felfogás szerint a paradoxon értelme a következő: ha Achillés utoléri a teknősbékát, akkor az általa megtett út — jóllehet ez sokszorosa a teknősbéka által ugyanezen idő alatt megtett útnak — minden egyes pontjában egyértelműen és megfordíthatóan leképezhető a teknősbéka által megtett út pontjaira. A két futó által ugyanazon időben elfoglalt pontok kölcsönösen és egyértelműen megfelelnek egymásnak. Ez pedig nem más, mint az ismert halmazelméleti tény: *két aktuálisan végtelen halmaz ekvivalens (gleichmächtig) lehet akkor is, ha közülök az egyik valódi része a másiknak.*”

[131] Math. Existenz 144. Ez a történeti felismerés azonban még ennél is jóval régibb keletű; vö. P. TANNERY, Revue Philosophique XX p. 385, *1885* és B. RUSSEL, The Principles of Mathematics, Vol. I § 331 p. 350 és §§ 340—341 p. 358 360, Cambridge *1903.*

Bizonyosak lehetünk afelől, hogy ZÉNÓN paradoxonának ez a halmazelméleti interpretációja a legkevésbé sem „anakronizmus". Más összefüggésben rámutattam legutóbb már arra is, hogy ZÉNÓN antik formában csakugyan meg is fogalmazta azt a tényt: „két aktuálisan végtelen halmaz ekvivalens még akkor is, ha közülök az egyik valódi része a másiknak."[132] Csak ebben az értelemben adható ugyanis megnyugtató magyarázat arra az arisztotelészi híradásra, hogy ZÉNÓN *bebizonyította:* a fele idő egyenlő (= ekvivalens) a duplájával".[133] — Sőt, ezzel a zénóni tétellel kapcsolatban utaltam már arra is: a 8. euklidészi axiómát — „az egész nagyobb, mint a rész" — bizonyára éppen ez ellen a zénóni paradoxon ellen kellett felállítaniok az antik matematikusoknak. Nem akarom ezúttal megismételni régebbi érveimet, amelyek ezt az elgondolásomat támogatják, inkább csak kiegészítem őket a következőkkel.

Mint ismeretes, EUKLIDÉS nyolc egyenlőségi axiómájából a modern kiadó, J. L. HEIBERG kirekesztette a 4., 5. és 6.-at. Az 5. és 6. esetében hivatkozott PROKLOSra (196, 25), aki éppen úgy, mint ő, ezeket az axiómákat fölöslegeseknek tartotta;[134] sőt HEIBERG ugyanezzel a megokolással interpolációkat is vélt fölfedezni EUKLIDÉS két tételében (Elem. I. 37 és 38), minthogy ezek a tételek — a bizonyítási részben — majdnem szó szerint idézik a két kirekesztett axiómát. — Nem kétséges, hogy ebben az esetben mind PROKLOSnak, mind HEIBERGnek feltétlenül igaza van abban: a két kirekesztett axióma (az 5. és 6.) fölösleges EUKLIDÉS szövegében; az egész euklidészi geometria fölépíthető ezek nélkül is. A kérdés csak az: hogyan került mégis ez a két fölösleges axióma EUKLIDÉS szövegébe? P. TANNERYnek az az elgondolása, hogy mind ezt a két axiómát, mind pedig EUKLIDÉS többi princípiumát csak később, *utólag* absztrahálták volna az „Elemek" szövegéből,[135] aligha helyes. Hiszen közismert — amint ezt más összefüggésben maga P. TANNERY is hangsúlyozta —, hogy éppen ellenkezőleg: az euklidészi princípiumok között sok olyan akad, amely régebbi korok hagyománya, s amelyeket EUKLIDÉS szinte csak a hagyomány iránti tiszteletből vett be művébe.

Ez lehet az eset az 5. és 6. axiómával is: „ugyanannak a mennyiségnek a duplái egyenlők egymás között" és „ugyanannak a mennyiségnek a felerészei egyenlők egymás között". Mi adhatott mármost alkalmat — egyszer valamikor — arra, hogy ilyen tételeket állítsanak fel valamely mennyiség *dupláinak* és *felerészeinek* egymás közötti egyenlőségéről? — Csak *egy* olyan eset ismeretes az antik irodalomból, amely alkalmat adhatott e tételek felállítására. ZÉNÓN előbb is említett paradoxona ti. — ARISTOTELÉS híradása szerint

[132] Lásd a 126. jegyzetet.
[133] DIELS—KRANZ, I 29 A 29 (= ARISTOT., Phys. Z. 9.239b 33).
[134] Vö. J. L. HEIBERG, i. m. p. 91.
[135] Mém. Scient. II 53.

— így hangzott: „a *fele* idő egyenlő a *duplájával*". Ez a paradoxon tehát éppen valamely mennyiség *duplájának* és *felerészének* „egyenlőségét" mondja ki. Utaltam legutóbb már arra is, hogy ZÉNÓN ezt a paradoxont tulajdonképpen vonalszakaszokkal szemléltette, vonalszakaszokon mutatta meg, hogyan lehet valamely szakasz felerésze „egyenlő" a duplájával, az egész szakasszal.

Gondoljunk mármost arra: hogyan próbálták cáfolni az antik theóretikusok ZÉNÓNnak ezt az abszurd állítását? Pusztán *elméleti* úton a paradoxon állítása *cáfolhatatlan*. ARISTOTELÉSnek és tanítványainak „cáfolatai" csak azt mutatják, mennyire *nem értették már* e cáfolatok szerzői az eleai dialektika lényegét. Valódi cáfolat ZÉNÓN paradoxonára csak az lehetett, hogy empirikus, tapasztalati tényekből indultak ki, s ezek alapján fogalmazták meg *bizonyíthatatlan* és *csak* véges halmazok esetére érvényes tételeiket a zénóni paradoxon mindenegyes részletével szemben.

Ha erre a feltevésre gondolva vizsgáljuk EUKLIDÉS axiómáit, lehetetlen észre nem vennünk, hogy nem kevesebb, mint *négy* egymást követő axióma valójában nem is egyéb, mint ZÉNÓN említett paradoxonának empirikus cáfolata. Ez a *négy* axióma, amely tulajdonképpen csak ZÉNÓN paradoxonára vonatkoztatva lesz érthetővé, a következő:

5. Ugyanannak a mennyiségnek a *duplái* egyenlők egymás között.

6. Ugyanannak a mennyiségnek a *felerészei* egyenlők egymás között.

7. Az *egymásra-illők* (= a kongruensek) egyenlők egymás között. — ZÉNÓN ábráján ti. *nem illettek egymásra* azok a vonalszakaszok, amelyeket ő mégis „egyenlőknek", azaz *ekvivalenseknek* állított.

8. Az egész *nagyobb*, mint a rész. — ZÉNÓN paradoxona szerint ti. az *egész* és a *rész* „egyenlők" (= ekvivalensek) voltak.

Nyilvánvaló, hogy ebből a négy tételből igazában csak a 8. nélkülözhetetlen az euklidészi geometria felépítéséhez. Ha nagyon szigorúak akarnánk lenni, kirekeszthetnénk nemcsak az 5. és 6.-at, hanem ugyanígy a 7.-et is, hiszen EUKLIDÉS maga ezt az utóbbit is mindössze csak *kétszer* használja,[136] s még ezekben az esetekben is elkerülhette volna a használatát. — Mégis, *történeti* szempontból aligha volna helyes kirekeszteni ezt a legutóbb felsorolt axiómacsoportot. Ezeket a princípiumokat valószínűleg még az i. e. V. században akkor állították föl ugyanebben a sorrendben, amikor a görögök először tettek kísérletet a geometria axiómatikus megalapozására éppen ZÉNÓN elméletileg cáfolhatatlan paradoxonaival szemben. EUKLIDÉS pedig ezeket a tételeket éppen olyan meggondolatlanul, csak tradíciótiszteletből vette föl művébe, mint az „egyenes vonal" és a „sík felület" definícióját, vagy a *ἑτερόμηκες, ῥόμβος, ῥομβοειδές, τρίπλευρα, πολύπλευρα* stb. terminusokat.[137]

[136] K. v. FRITZ, i. m. 76 k.

[137] Vö. P. TANNERY, Mém. Scient. II 540—544 és 48—63.

Összefoglalva az eddigieket, a következőket állapíthatjuk meg EUKLIDÉS axiómáiról:

EUKLIDÉS egyenlőségi tételei empírikus eredetű állítások, amelyeknek helyessége csak érzéki észrevevéssel ellenőrizhető. Ezért ezek a tételek nem is elégítik ki az eleaták igényeit, s ezért nevezték őket a dialektikus-theóretikus vita terminológiája szerint „követelményeknek": *axiómata*. Minthogy azonban a PLATÓN utáni időkben egyre kevésbé értették már az eleai dialektika lényegét, megpróbáltak új értelmet adni a matematikában is az „axióma" terminusnak. Arra hivatkoztak ugyanis, hogy ezeknek az axiómáknak a helyességét éppen úgy nem lehet kétségbevonnia józaneszű embernek, mint ahogy kétségbevonhatatlan tény a tűz melegsége.[138] Így lett az „axióma" a kétségbevonhatatlan, a természetes igazság neve. A régi terminusnak ez az átértékelése szorosan összefüggött azzal, hogy ARISTOTELÉS ZÉNÓN geniális paradoxonait is „szofizmáknak" minősítette. Mivel azonban a többértelmű „axióma" szó még így is kényelmetlen volt EUKLIDÉS szövegében, nemsokára kicserélték ezt az új terminussal: „koinai ennoiai" = „minden ember számára közös képzetek". Ezzel viszont sikerült elleplezniök nemcsak magának a kifejezésnek, hanem ennek az egész princípium-műfajnak is a dialektikus eredetét.

IV. Az euklidészi princípiumok hármas beosztása

Eddigi vizsgálataink előkészítették a választ arra a kérdésre: mi az értelme a matematikai princípiumok hármas felosztásának az euklidészi „Elemek" legelején, és hogyan került egyáltalán sor a princípiumoknak erre az osztályozására? — Annyit máris megállapíthatunk, hogy e hármas beosztás — úgy látszik — még abból az időből származik, amikor először kísérelték meg a geometria elméleti megalapozását. A következőkben éppen a *geometriának* ezt az elméleti megalapozását kell közelebbről megvizsgálnunk. — Mindenekelőtt emlékeztetnem kell azonban arra, amit legutóbb az *aritmetika* elméleti megalapozásáról mondtam.

1. AZ ANTIK ARITMETIKA HIÁNYOS MEGALAPOZÁSA

Az euklidészi „Elemek" VII. könyve előtt olvasható aritmetikai definíciókkal kapcsolatban legutóbb a következőket írtam:[139] „Az euklidészi aritmetika első két definíciója — az *egy* és a *szám* — minden jel szerint az eleai filozófia hatására vall. E definíciók megfogalmazását döntő mértékben befolyásolta az osztás problémája, illetőleg az eleai filozófia oszthatatlansági dog-

[138] Proclus 181, 8 kk.
[139] *Matematikai Lapok* X (1959) 91 k. és 97 k.

mája. — Hasonlóképpen az eleai filozófia szerves továbbfejlesztései más fontos aritmetikai definíciók is, mint pl. *páros szám, páratlan szám, része valamely számnak* (μέρος, def. 3), *részei valamely számnak* (μέρη, def. 4), *törzsszám* és *összetett szám*. A döntő probléma, amely egyáltalán szükségessé tette ezeknek a definícióknak a felállítását, minden egyes esetben az „oszthatóság" filozófiai kérdése volt. Az első görög matematikusok ugyanis ragaszkodtak a legfontosabb eleai tanítás értelmében az ellentmondásmentesség elvéhez. Ezért előbb a *szám* definíciójával — az *egy* megsokszorozásával — megteremtették az *absztrakt sok* fogalmát, majd pedig, hogy az oszthatóságnak ezáltal újra felmerülő problémáját ellentmondásmentesen megoldják, az eleaták példájára dichotomikus definíciókat vezettek be. — Úgy látszik, ez volt a kezdete a görög aritmetika definíciós megalapozásának még az i. e. V. század első felében."

E megállapításokat kiegészíthetjük most a következőkkel. Az antik matematikusok azt a „hypothesis-alkalmazást", amelyet e dolgozat második részében behatóbban vizsgáltunk, tulajdonképpen csak az aritmetika területén használhatták nagyobb nehézségek nélkül.[140] Láttuk már, hogy a dialektikus vita legelső hypothesise mindig a *definíció,* az „elhatárolás" volt, minthogy éppen ez biztosította a szóban forgó fogalom ellentmondásmentességét. Érthető az is, hogy az eleai dialektika örökösei az „elhatárolás"-ban (a definiálásban) előnyben részesítették az *absztrakt* fogalmakat, mert természetszerűleg úgy látták, hogy ezeknél érhetik el legkönnyebben a gondolat ellentmondásmentességét. Könnyen beláthatta pl. akárki, hogy az olyan absztrakt fogalmak, mint a „szép" vagy az „egyenlő" sohasem lehetnek azonosak önmaguk ellentéteivel. De minél konkrétebb volt valamely fogalom — azaz minél inkább érezték közelségét a tapasztalati világhoz — annál inkább fenyegetett az ellentmondásosság veszélye. (Az eleai filozófia felismerése szerint a tapasztalati világ dolgai mind ellentmondásosak.) — Érthető viszont az is, hogy a *számokat* „absztraktabb" valaminek tartották, mint a *geometriai idomokat.* Ami a számokat illeti, hivatkozhattak arra, hogy az aritmetika nem ismer *látható* és *tapintható testű* számokat;[141] a számok csak gondolati elemek, amelyek másképp mint gondolati úton nem is közelíthetők meg.[142] De ugyanezt nem mondhatták el a geometriai idomokról, mert ezeket csak *szemléletesen* tudták elképzelni.

Ez a lényeges különbség a nem-látható számok és a szemléletes geometriai idomok között volt az oka annak is, hogy az ókorban *nem* alakulha-

[140] A geometria elméleti megalapozásának nehézségeire utaltam már legutóbbi dolgozatomban is; lásd a megelőző jegyzetet.

[141] PLATÓN, Resp. VII 525 D.

[142] Uo. 526.

tott ki az aritmetika axiómatikája. Az ókoriak *nem* tudatosították magukban azt, hogy az aritmetika is felhasznál olyan alapelveket, amelyek nem következnek aritmetikai definícióikból. Az aritmetikának az a felépítése, amelyet EUKLIDÉS „Elemeiből" ismerünk, arra vall, hogy az ókoriak azt hitték magukról: az aritmetikában egyáltalán nem is használnak empírikus eredetű alapelveket. Sőt, úgy látszik, még azt is, hogy az euklidészi egyenlőségi axiómák nemcsak a geometriában, hanem pl. az aritmetikában is érvényesek, csak utólag ismerték fel. Mindenesetre ezeknek az axiómáknak a felállítására nem az aritmetika, hanem a geometria megalapozása adott alkalmat.

2. A TÉR TUDOMÁNYA

Kezdetben úgy látszott, mintha a geometriára egyáltalán nem is lehetne alkalmazni az eleaták alapelveit. Az eleai ZÉNÓN számos érvet tudott felsorolni annak a bizonyítására, hogy a *tér* fogalma ellentmondásos.[143] Ebből viszont az következett, hogy az eleatáknak tagadniok kellett a tér létezését.[144] Ha pedig tagadjuk a teret magát, akkor nem is lehetséges a tér tudománya, a geometria. Mert ha a „tér" ellentmondásos fogalom, akkor azok közé a dolgok közé tartozik ez is, amelyek eleai felfogás szerint érzékszerveink útján tapasztalhatók ugyan, de amelyek az ellentmondásmentes gondolkozás számára felfoghatatlanok, azaz megismerhetetlenek. Ilyennek tartották az eleai filozófusok pl. a „mozgást". Nyilvánvaló, hogy tudták ők is: a mozgás a *gyakorlatban* lehetséges, lépten-nyomon bizonyítja ezt érzéki észrevevésünk. Az, hogy mégis *tagadták* a mozgást, csak annyit jelenthet, hogy úgy gondolták: a mozgás az érzékszervek útján tapasztalható, de a logikus, ellentmondásmentes gondolkozás számára felfoghatatlan, elgondolhatatlan. (Ezt jelenti az az eleai tétel, hogy a mozgás csak „hamis látszat", olyasvalami, amiről nem lehet igazi tudásunk.) Minden jel szerint így kell értenünk azt a másik eleai tételt is, hogy „nincs tér". A térre vonatkozó tudásunk ugyanúgy ellentmondásos, mint a mozgásra vonatkozó tapasztalatunk. Más szóval: eleai felfogás szerint úgy kellene megítélnünk a térre vonatkozó tudást is, mint a mozgásra vonatkozó tapasztalatot: ezek csak érzékeléseink eredményei.

Úgy látszik, a görög matematika legrégibb theóretikusai eredetileg átvették az eleatáktól a „térre vonatkozó tudásnak", a geometriának ilyenfajta megítélését is. Legalábbis erre mutat az a tény, hogy JAMBLICHOS egyik híradása szerint PYTHAGORAS a geometriát *ἱστορίη*-nek tartotta.[145] Mert ha meg-

143 Vö. W. CAPELLE, *Die Vorsokratiker*, Leipzig 1935, 172 k.

144 PLATÓN, „Theaitétos" 180 E.

145 JAMBLICHOS, De vita Pythagorica 89. A hely magyarázatához lásd Á. SZABÓ. Deiknymi als math. Terminus für *beweisen*, MAIA X (1958) 106—131 és A. FRENKIAN, uo. XI (1959) 243—245.

gondoljuk, hogy egyrészt a pythagoreusok tudományukat, különösen pedig a számokról szóló tanítást a *μαθήματα* névvel jelölték,[146] másrészt pedig, hogy a *ἱστορίη* csak látásból származó empirikus tudást jelenthet,[147] akkor nyilvánvaló, hogy mi az értelme JAMBLICHOS megjegyzésének: abban az időben, amikor a geometria még nem *μάθημα*, csak *ἱστορίη* volt, nem is tartották ezt még elméleti jellegű tudománynak, csak empírikus, főként látásból származó (szemléletes) ismeretnek. Csakugyan, még PROKLOS, az euklidészi „Elemek" késői kommentátora is tudott arról, hogy a geometriát nem mindjárt kezdetben, csak valamikor később ismerhették el igazi matematikai diszciplinának, de még akkor is csak az aritmetikát követő második helyre tették. Erre mutatnak PROKLOS következő szavai: „Hogy a geometria is része az egész matematikának, és hogy *második helyen áll az aritmetika után*..., ezt kimutatták már a régiek is, nem szükséges itt részleteznünk."[148] Ugyanez volt az aritmetika és geometria rangsorolása PLATÓNnál is.[149] Sőt, kimutathatjuk PLATÓN műveiből azt is, hogy mind a „tér" problémájának, mind pedig a „térről szóló tudománynak", a geometriának ez a megítélése kétségtelenül az eleai filozófia öröksége volt.

3. PLATÓN A TÉRRŐL ÉS A GEOMETRIÁRÓL

Ha meg akarjuk érteni, hogyan ítélte meg PLATÓN a geometriát mint tudományt, vázlatosan ismertetnünk kell ebben az összefüggésben előbb PLATÓNnak a *tudásra* vonatkozó elgondolásait általában.[150]

Mint ismeretes, PLATÓN megkülönbözteti a változó, érzékelhető világot, a „láthatót" *(ὁρατόν)* az igazi létezőtől, amely utóbbi csak „elgondolható" *(νοητόν)* E kettéosztás értelmében a következő érdekes elméletet mutatja be az „Állam" c. dialógusban[151] a *tudásról*, a *nem-tudásról* és a *vélekedésről*. Minthogy a megismerő mindig *valamit* (valamilyen létezőt, *ὄν*) ismer meg, a *tudás* csak a *létezőre* vagy más szóval az *elgondolhatóra*, a *νοητόν*-ra vonatkozhatik, a *nem-tudás* pedig a *nem-létezőre*. A *vélekedés (δόξα)* viszont, minthogy ez a *tudás* és *nem-tudás* közé esik, éppen azokra a dolgokra vonatkozik, amelyek a *létezés* és *nem-létezés* között vannak; a létezés és nem-létezés között van egész érzékelhető világunk, amely keletkezik és elmúlik, vagyis

146 ARISTOTELÉS, Met. 5 cap. 5. Vö. B. L. v. d. WAERDEN, Math. Ann. 120 1947—49 127 és K. REIDEMEISTER, *Das exakte Denken der Griechen* 52.

147 Vö. B. SNELL, *Die Ausdrücke für den Begriff des Wissens in der vorplat. Philosophie*, Berlin 1924 59—71; A. FRENKIAN, *Revue des Études Indo-européennes*, Bucarest—Paris 1938, 468—474.

148 Proclus 48, 9 kk.

149 „Epinomis" 990 C—D.

150 Vö. Á. SZABÓ, „Eleatica", *Acta Ant. Acad. Scient. Hung.* III (1955) 98 kk.

151 Resp. V 476 E—477 B.

mindaz, amit PLATÓN *láthatónak (ὁρατόν)* nevez. — PLATÓN szerint tehát az érzékszerveinkkel megismerhető világról nincs igazi tudásunk, csak *vélekedésünk (δόξα).* — Nem kétséges, hogy ezek a „platóni" gondolatok tulajdonképpen *teljes egészükben* még magától az eleai PARMENIDÉStől származnak. (Bőségesen igazolható ez az állításom egyszerűen PARMENIDÉS tanítókölteményének ránk maradt töredékeiből is; csak a rövidség kedvéért tekintek el ezúttal a részletesebb interpretációtól.)

PLATÓN azonban nemcsak átvette, hanem részben tovább is fejlesztette PARMENIDÉS rendszerét. Különösen érdekes ebből a szempontból a „Timaios" c. dialógusnak egyik részlete,[152] amely nemcsak gondolatmenetében, hanem szinte még terminológiájában is szó szerint egyezik PARMENIDÉSszel. Ezúttal is hangsúlyozza PLATÓN, hogy a valóban létezőt, amely nem keletkezett és nem múlik el, és amely nem is változik soha (azaz: önmagával mindig azonos marad), csak értelmünkkel *(νόησις)* ismerhetjük meg, mert ez nem látható és az érzékszervek számára egyáltalán nem hozzáférhető; a láthatót és a folyton változót viszont csak érzékeléssel és vélekedéssel tudjuk megragadni *(δόξῃ μετ' αἰσθήσεως περιληπτόν).* — Amint látjuk: a gondolatmenet eddig még ugyanaz, mint az a másik, amelyiket az előbb az „Állam" c. dialógus nyomán foglaltunk össze. — Lényeges különbség azonban, hogy a „Timaios" dialógus nem elégszik meg a világ *kettéosztásával* láthatóra *(ὁρατόν)* és csak elgondolhatóra *(νοητόν).* E kettő közé ékelődik ezúttal, mint harmadik valami: a „tér", amely éppen olyan változatlan és örök ugyan, mint a platóni igazi létező, a *νοητόν*, de amelyben mégis minden mozgás, keletkezés és elmúlás végbemegy.[153] Sőt azt is kiemeli ezúttal PLATÓN, hogy az a fajta megismerés, amely erre a közbülső harmadik valamire, a „tér"-re vonatkozik, nem azonos sem azzal a tiszta gondolkozással, amellyel az igazi létezőt megismerjük, sem pedig azzal a vélekedéssel, amellyel az érzékelhető világ dolgait ragadjuk meg; a teret PLATÓN szerint érzékszerveink igénybevétele *nélkül* ugyan, de mégis „fattyú-gondolkozással" ismerjük meg *(μετ' ἀναισθησίας ἁπτὸν λογισμῷ τινι νόθῳ).*[154] Hogy pedig PLATÓN e „fattyú-tudáson" csakugyan a geometriát értette, arról meggyőzhet bennünket e „Timaios"-részlet összehasonlítása az „Állam" c. dialógus egyik passzusával.[155] Itt ugyanis PLATÓN a geometriai megismerést a „dianoia" *(διάνοια)* szóval jelöli, hangsúlyozván, hogy ez a „dianoia" magasabbfokú ugyan mint a puszta vélekedés *(δόξα),* de alacsonyabbfokú, mint a tiszta intellektuális megismerés *(νοῦς).*

[152] A következőkhöz lásd PLATÓN „Timaios" 52 A—B és 50 C—D.

[153] A „tér" platóni körülírásaihoz lásd A. FRENKIAN, Le postulat chez Euclide etc. 25 és E. ZELLER, Die Philosophie der Griechen II 1, 4. Ausg. 1889 722, jegyzet.

[154] „Timaios" 52 B.

[155] Resp. VI 511 D—E és VII 533 E—534 A.

PLATÓNnak ezeket a fejtegetéseit a geometriáról, mint „fattyú-tudásról" a következőképpen magyarázhatjuk. Az eleaták kezdetben egyszerűen tagadták a tér létezését. Miután felismerték az ellentmondást az érzékelhető világ jelenségeiben — tehát mindenekelőtt az olyan fogalmakban, mint „mozgás", „változás", „keletkezés", „elmúlás" stb. — rá kellett jönniök arra is, hogy ellentmondásos az a két fogalom is, amely az előbbiektől elválaszthatatlan, ti. a „tér" és az „idő" fogalma. Minthogy viszont az, ami ellentmondásos, egyszersmind *elgondolhatatlan* is, tagadniok kellett a tér valóságos létezését.

Ezzel a felfogással szemben PLATÓN előbb ismertetett gondolatai *későbbi, differenciáltabb* fejlődési fokra vallanak. A „tér" fogalmát most már nem sorozzák ugyanabba a kategóriába, mint az érzéki világ jelenségeit, amelyek keletkeznek és elmúlnak. Éppen ellenkezőleg, most már azt hangsúlyozzák, hogy a tér éppen olyan örökkévaló és változatlan, mint a „csak elgondolható" *(νοητόν)*, egyszersmind azonban „befogadója" és „dajkája" is a keletkezésnek,[156] mert az érzéki világ jelenségei mind benne játszódnak le. A térnek ebből a kettős természetéből — hogy ti. egyfelől változatlan és örökkévaló, mint a *νοητόν*, másfelől pedig, mint „befogadó tartály" szorosan összefügg az érzéki világ jelenségeivel — következik a geometria „fattyú-tudás" jellege. Ezt a „fattyú" jelleget PLATÓN a geometria művelőinek beszédmódján is felismerni vélte. Mint az egyik alkalommal írta:[157] a geometerek nevetséges és kényszeredett kifejezéseket használnak; úgy tesznek, mintha kutatásuk célja valami cselekvés, „szerkesztés" volna; arról beszélnek, hogy „négyszögesítenek", vonalat „húznak" és felületeket „illesztenek egymásra", holott e tudomány igazi célja: örökkévaló és változatlan dolgoknak, nem pedig olyasmiknek a megismerése, amik keletkeznek és elmúlnak.

4. A GEOMETRIA ELMÉLETI MEGALAPOZÁSA

Azt hiszem, PLATÓNnak a térre és a geometriára vonatkozó gondolatai megvilágíthatják részben azt a folyamatot is, amely már a PLATÓNt megelőző időkben a geometria elméleti megalapozásához vezetett. A geometria elméleti megalapozása azzal kezdődhetett, hogy revízió alá vették az eleaták véleményét a *térről*. Amíg a teret ugyanolyan ellentmondásos valaminek tartották, mint az érzékelhető világ jelenségeit — amíg tehát „tagadták" a tér létezését — egyáltalán nem volt lehetséges a geometria mint tudomány. Ebben az időben a geometria csak *ἱστορίη*, empírikus, látásból származó (szemléletes) ismeret lehetett.

Egy idő múlva azonban észre kellett venniök, hogy a „tér" esetében egy rendkívül érdekes absztrakció is lehetséges. Hogyan jön ugyanis létre

156 Lásd a 153. jegyzetet.
157 Resp. VII 527 A—B.

„térélményünk”? Természetesen mindig az érzékelhető világ jelenségeivel kapcsolatban, tehát olyan dolgokkal összefüggésben, amelyek a térben foglalnak helyet, benne mozognak, változnak, keletkeznek és elmúlnak. De vajon gondolatban nem abszrahálható-e a *tér* a benne levő dolgoktól? És vajon az így elképzelt *tér* nem hasonlít-e már a „csak elgondolhatóhoz”, a *νοητόν*-hoz? Úgy látszik, a geometriának, mint a térről szóló tudománynak az elméleti megalapozása éppen úgy kezdődött, hogy megpróbáltak kialakítani valamiféle absztrakt „tér-szemléletet” az érzéki észrevevések igénybevétele *nélkül.* (Említettük már, hogy PLATÓN is azt állította: a teret érzéki észrevevés nélkül, *μετ᾽ ἀναισθησίας*, fattyú-tudással, *λογισμῷ νόθῳ*, ismerjük meg.)[158] Régebben tehát azt hangsúlyozták, hogy a geometria *ἱστορίη*, azaz látásból származó (szemléletes) és empírikus ismeret; most viszont, amikor az absztrakt teret magát — a bennük levő dolgok nélkül — akarták megismerni, le akartak mondani a tér megismerésében minden érzéki észrevevésről, még a látásról is. Nemcsak egyszerűen a *mozgást* akarták teljesen száműzni a geometriából — amint ez látható pl. az euklidészi „Elemek” I. könyvének definícióiból[159] —, hanem ugyanígy lehetőleg a *szemléletességet* is. TH. HEATH pl. utalt már arra, hogy az „egyenes vonal” euklidészi definíciója tulajdonképpen kísérlet a fogalom körülírására *minden szemléletesség megkerülésével.*[160]

Érthető viszont, hogy azok a kísérletek, amelyek a „tér” fogalmát a „csak elgondolható”, a *νοητόν* közelébe akarták hozni, többé-kevésbé mind kudarcra voltak kárhoztatva. A térrel együtt adva voltak olyan ellentmondásos tények is, amelyek az eleaták módszerével megoldhatatlanoknak bizonyultak. Az egyik ilyen nehézségre más összefüggésben utaltam már.[161]

Rendkívüli nehézséget okozott ti. már egyszerűen a térnek *végtelen oszthatósága* is, amely gondolatban mindenesetre lehetséges. Ebből ugyanis arra a következtetésre kellett jutniok az antik theóretikusoknak, hogy nemcsak az anyagban, hanem még a térben — tehát a geometriában sincs valami olyasmi, amit *legkisebbnek* lehetne nevezni.[162] Viszonylag könnyű volt — mindaddig, amíg csak számokról beszéltek — a pusztán gondolatban létező *egy*re hivatkozni, amely osztatlan és legkisebb; de nem találtak ilyen legkisebb egységet a geometriában. Mint PROKLOS írja: „a geometriában egyáltalán nincs olyasmi, ami a *legkisebb* volna, és ott, ahol az osztás végtelenül folytatható, ott megvan az irracionális (az ésszerűtlen, *τὸ ἄλογον*) is.”[163] Semmi akadálya sem

158 Lásd a 154. jegyzetet.
159 J. E. HOFMANN, i. m. 32 és A. D. STEELE, i. m. 308.
160 TH. HEATH, i. m. I 373.
161 *Matematikai Lapok* X (1959) 101 kk.
162 Proclus 60, 11 kk.
163 Uo. 60, 15.

volt annak, hogy az aritmetikában az *egy*ből és a *számok*ból induljanak ki, mert ezeknek nem volt anyaguk, és mint pusztán gondolati elemek ellentmondásmentesek lehettek, de a geometriában természetesen nem találtak ilyen egyszerű elemeket, amelyekből kiindulhattak volna. „Világos, hogy a számok anyagtalanabbak és tisztábbak, mint a geometriai mennyiségek, és hogy ezért a számok alapja (principiuma, *ἀρχή*-ja) is egyszerűbb, mint a geometriai mennyiségeké" — írja PROKLOS.[164] — Ezek a nehézségek okozták azt, hogy az euklidészi geometriának már a legelső definíciói — a „pont" és a „vonal" meghatározásai — sem sikerülhettek. Mint éppen ezzel a kettővel kapcsolatban K. REIDEMEISTER írta:[165] „A pont és a vonal sem a szemlélet sem a gondolkozás számára nincs adva. Egynémely geometriai fogalom evidens; evidens az is, hogy ezeket a fogalmakat ellentmondásmentes rendszerbe akarják foglalni. De azokat a kezdeteket, amelyekből levezethető volna a tervezett elmélet, csak keresik mint ellentmondásmentes kiegészítését annak, ami evidens." — Tulajdonképpen csak azzal kellene még kiegészítenünk ezt a jellemzést, hogy a görög theóretikusok legfeljebb *részben* találták meg azokat az egyszerű és ellentmondásmentes alapokat, amelyekre felépíthették a geometriát, mint elméleti tudományt. Hiszen a *pont* euklidészi definíciója értelmében — „pont az, aminek nincs része" — tulajdonképpen tagadniok kellett volna a teret is.[166]

Pedig a tér végtelen oszthatósága igazában nem is volt az egyetlen és legsúlyosabb olyan nehézség, amellyel a görögöknek a geometria elméleti megalapozása során meg kellett küzdeniök. A „tér" fogalmával ugyanis — bármennyire absztraktnak gondolták is ezt — adva volt egy másik ugyanilyen ellentmondásos fogalom is: a „mozgás". A geometria legkisebb mennyiségéhez, a *pont*hoz csak a „végtelenül folytatható osztás" gondolatán keresztül juthattak el, márpedig ezt az utóbbit ésszerűtlennek, irracionálisnak érezték. Amikor viszont a *pont*ból akartak kiindulni, hogy ebből vezessék le az összetett geometriai mennyiségeket, egyszerre elkerülhetetlenné lett a *mozgás*. Amellett a térrel együtt adva voltak olyan empírikus tények is, amelyekre vonatkozó állításaikat csak az érzékszervek által nyújtott tapasztalatokból kiindulva fogalmazhatták meg; lásd az euklidészi egyenlőségi axiómák problémáját.

Azt hiszem, éppen ezek a nehézségek ösztönözték a görög matematikusokat arra, hogy megteremtsék — egyelőre csak magának a geometriának *axiómatikus megalapozását*. Össze kellett ugyanis mindenekelőtt állítaniok azokat a pusztán empírikus tényeket, amelyek ugyan távolról sem elégítették

[164] Uo. 95, 23 k.
[165] Das exakte Denken der Griechen 12.
[166] Vö. ezzel *Matematikai Lapok* X (1959) 98 kk.

ki az eleatáknak tisztán intellektuális megismerésre törekvő igényeit, de amelyek nélkül a térről szóló tudomány, a geometria mégis elképzelhetetlen volt. Hangsúlyozták tehát, hogy a geometria tényei — a „vonalak", „szakaszok", „metszéspontok", „szögek", „idomok" stb. — egyáltalán *nem* azonosak azokkal az alakzatokkal, amelyeket érzékszerveinkkel is tapasztalhatunk, pl. láthatunk,[167] hanem ezek igazában csak *gondolati elemek*, ugyanúgy mint a számok. Majd megpróbálták ezeknek az alakzatoknak a definícióiban elkerülni lehetőleg még a szemléletességet is.

Hogy viszont a geometriai konstrukciót lehetővé tegyék, felállították az első három euklidészi *posztulátumot*. Ezekkel engedélyezték legalább azt a minimális *mozgást*, amely nélkül a geometriát egyáltalán nem tudták volna felépíteni. — A *vonalzó* és *körző* kizárólagosságához való ragaszkodás, úgy látszik, nem is egyéb, mint arra irányuló törekvés, hogy a geometriában megengedett mozgásformákat a minimumra korlátozzák. — A posztulátum görög neve, az „aitéma" szó egyszersmind utalt is azonban arra, hogy ezekkel a „követelményekkel" tulajdonképpen már át is törték azokat a korlátokat, amelyeket az ellentmondásmentesség elvéhez való szigorú ragaszkodás — legalábbis az eleaták számára még — jelentett. A konstrukcióval, illetőleg a *mozgással* már valami „ellentmondásos elem" is került a geometriába.

A következményeknek egy másik — az „axiómata" nevű — csoportjával viszont olyan empírikus állításokat tettek meg egyelőre csak a geometria alapjává, amelyek csak véges halmazok esetében érvényesek. Úgy látszik, mindaddig, amíg e princípium csoport régi nevét, az „axiómata" szót *nem* cserélték fel az újabb keletű elnevezéssel („koinai ennoiai"), tudhatták azt is, hogy ezek a princípiumok nemcsak bizonyíthatatlanok, hanem az eleaták módszerével még cáfolhatók is. Hiszen ezeket a tételeket — minden valószínűség szerint — éppen ZÉNÓN paradoxonai *ellen* kellett felállítaniok.

Ez lehetett a matematikai princípiumok euklidészi hármas beosztásának az eredete.

5. A KRONOLÓGIA KÉRDÉSÉHEZ

Még egy történeti kérdést kell ebben az összefüggésben legalább röviden érintenünk. — Említettük, hogy az euklidész-*utáni* görög matematikai terminológia *nem tett* már különbséget „hypothesisek", „aitémák" és „axiómák" között. Ebben az időben mind e három kifejezés, mind pedig a matematikai princípiumok egyéb még lehetséges megjelölése már csak tetszőlegesen felcserélhető szinoníma volt. (Különösen tanulságos ebben a viszonylatban ARCHIMÉDÉS szóhasználata.) Úgy látszik tehát, a matematikai princípiumoknak

[167] PLATÓN, Resp. VI 510 D.

tárgyalt hármas beosztása *csak* EUKLIDÉSre érvényes. Mi lehet ennek a ténynek történeti magyarázata?

Induljunk ki PLATÓNnak egyik már említett megjegyzéséből.[168] PLATÓN nemcsak azt állítja egy alkalommal, hogy a matematikusok bizonyos feltevéseket („hypothesis") tesznek meg kutatásuk alapjává, hanem egyszersmind megjegyzi azt is, hogy „nem is adnak ezekről aztán számot sem maguknak, sem másnak, minthogy ezeket — véleményük szerint — úgyis mindenki tudja már". — Az a PLATÓN tehát, aki egyébként a matematikát olyan nagyra tartotta, észrevette azt is, hogy maguk a matematikusok a princípiumok, a „hypothesisek" további problémájával szemben szinte közömbösek. Ezért gondolta PLATÓN, hogy ezeknek a matematikai „hypothesisek"-nek a mélyebb vizsgálata már nem is a matematika, hanem egy szerinte magasabbrendű tudománynak, a dialektikának a feladata volna. Így gondolkozott egyébként erről a kérdésről ARISTOTELÉS is.[169]

Ez a matematikus közömbösség a princípiumok filozófiai problémájával szemben megfigyelhető már az EUKLIDÉSszel egykorú pitanéi AUTOLYKOSnál is. P. TANNERY hívta fel először a figyelmet arra, hogy AUTOLYKOS művében („De sphaera quae movetur") egyáltalán nem tesz különbséget *definíció* és *posztulátum* között.[170] Kiegészítettem legutóbb ezt a megfigyelést azzal, hogy AUTOLYKOS *nem is adott nevet* bizonyítás nélkül előrebocsátott princípiumainak.[171] Úgy látszik tehát, nem tartotta szükségesnek, hogy *osztályozza* azokat a be-nem-bizonyított alapelveket, amelyeket munkája előtt felsorolt. Jól összevág ezzel a ténnyel az is, hogy a görög matematikusok az euklidész-utáni korokban sem törekedtek az egyes princípium-műfajok pontos terminológiai megkülönböztetésére. A matematika szempontjából szinte csak *egy* megkülönböztetés volt lényeges, az ti., hogy a princípiumok bizonyítás *nélkül* is igaznak tartott tételek, s ezért előrebocsátandók; a theóremák viszont bizonyítandók, azaz olyan állítások, amelyeket a princípiumokból kell levezetniök. Az egyes princípium-műfajok gondosabb megkülönböztetésére irányuló vitát a matematikusok, úgy látszik, átengedték a filozófusoknak.

Látjuk tehát, hogy a görög matematikusok — legalábbis azok, akiknek műveit ismerjük — EUKLIDÉS kivételével soha nem törekedtek az egyes princípium-műfajok szigorú és következetes megkülönböztetésére. Kérdés: vajon éppen ezért nem magától EUKLIDÉStől származik-e a princípiumok tárgyalt hármas beosztása? — Úgy gondolom, e feltevés *ellen* szólnak a következők:

168 Resp. VI 510 C—D.

169 Lásd PLATÓN, Resp. 510 C — 517 D és ARISTOT. Met. *Γ* 3 1005 a 19 kk.

170 P. TANNERY, *Mém. Scient.* II 58. Vö. Autolyci, De sphaera quae movetur liber. De ortibus et occasibus libri duo, ed. Fr. HULTSCH, Lipsiae 1885, Index s. v. „horoi".

171 Studi it. di fil. class. XXX 1958 10 k.

1. ARISTOTELÉS többször tárgyalja műveiben az ún. bizonyító tudományok, közöttük a matematika alapelveit is, sőt megpróbálja osztályozni is ezeket az alapelveket. Ez tehát arra mutat, hogy az euklidész-*előtti* korokban csakugyan az egyes princípium-műfajok gondosabb megkülönböztetésére törekedhettek.

2. Láttuk fentebb, hogy már az i. e. V. században ismerte és tudatosan alkalmazta OINOPIDÉS az első három euklidészi posztulátumot, sőt e posztulátumok valószínűleg magától OINOPIDÉStől származnak. Valószínű tehát, hogy azok a görög matematikusok, akik OINOPIDÉS óta „Elemeket" állítottak össze, legalább e három posztulátumot mindig mint külön csoportot bocsátották munkájuk elé.

Úgy gondolom tehát, a princípiumok hármas beosztása EUKLIDÉS művében valójában csak *tradició.* A „hypothesisek", „aitémák" és „axiómák" megkülönböztetése nem is annyira a matematika, mint inkább a *filozófia* szempontjából volt lényeges. Fontosnak e megkülönböztetést igazán csak akkor érezhették, amikor előbb az aritmetika, majd később még inkább a geometria elméleti megalapozása során a matematikusok elhatárolták tudományukat az eleai filozófiától. Ebben az időben csakugyan nem volt lényegtelen az, hogy vajon a „mozgás" eleai tagadásával szemben foglalnak-e állást a matematikusok a *posztulátumok*ban, vagy a végtelen halmazok vizsgálatából levont eleai következtetések ellen a *nyolc első axiómában.* Később azonban, ahogy a matematika egyre inkább függetlenedett a filozófiától, a princípiumok megkülönböztetésének a kérdése is mindinkább veszített a jelentőségéből. Most már nem annyira a matematikusok, mint inkább a filozófusok foglalkoztak ezzel a kérdéssel. (Lásd pl. ARISTOTELÉSt!)

EUKLIDÉS tehát a princípiumok hármas beosztását olyan régebbi matematikusoktól vehette át, akik már előtte is állítottak össze „Elemeket". Mint ismeretes, ilyenek voltak: a chiosi HIPPOKRATÉS, LEÓN és a magnesiai THEUDIOS.[172]

A geometria elméleti megalapozása a matematikának az eleai dialektikából való kiszakadása, függetlenné válása során alakult ki. Ezért tud olyan kevés, *történetileg is felhasználható* lényeges gondolatot mondani a matematikai princípiumok mibenlétéről az az ARISTOTELÉS, aki az eleai dialektikát is oly kevéssé értette meg, hogy ZÉNÓN paradoxonait puszta szofizmáknak minősítette.

[172] Proclus 66, 7—8; 66, 20—23; 67, 12—16.

V. A korai görög matematika néhány problémája új megvilágításban

A megelőző fejezetekben olyan magyarázatot kíséreltem meg a görög matematika axiómatikájának kialakulására, amely magyarázat új megvilágításba helyezheti a korai görög tudomány egyéb történeti problémáit is. Anélkül, hogy ezeket a kérdéseket már itt részletesebben tárgyalni akarnám, csak röviden utalok ezúttal néhány ilyen problémára.

1. Konstrukció és matematikai exisztencia

Az antik matematikatörténet egyik fontos kérdése pl.: hogyan merült fel egyáltalán az ókorban a *matematikai exisztencia* problémája? — Úgy látom, ezt a kérdést a történeti irodalom eddig még soha nem is vetette fel elég pregnáns formában. Ehelyett olyan *féligazságokból* indultak ki, amelyek nem megoldották, inkább csak elkendőzték az igazi történeti problémát.

Mint ismeretes, általában H. G. Zeuthen maradandó érdemének tartják, hogy megvilágította az ókoriak exisztencia-bizonyításának elveit.[173] O. Becker pl. így írt erről a kérdésről:[174] „Zeuthen kutatásai szerint az ókoriak exisztencia-bizonyításának egyetlen és állandóan használt eszköze a *konstrukció* volt. Minthogy pedig az antik matematika csak geometria volt (az aritmetikát és algebrát is geometriai formába öltöztették), ez a konstrukció *idomok szerkesztését* jelentette. Mindig két alapvető konstrukcióból indultak ki: két adott pont összekötése egy egyenessel és körszerkesztés adott pont körül adott rádiusszal. Két euklidészi posztulátum mondja ki, hogy ezek a szerkesztések *lehetségesek*, vagyis ami egyértelmű ezzel: hogy az így szerkesztett alakzatok *léteznek* stb."

Bármennyire plauzibilisek is ennek az idézetnek egyes állításai, rá kell itt mutassak e koncepció gyöngéjére. Mert igaz ugyan, hogy a görög matematika túlyomórészt geometria volt, és valóban a görögök az aritmetikát, algebrát is — legalábbis utólag — „geometrizálták."[175] De vajon az aritmetikában is *mindig szerkesztésből* állott-e az exisztencia-bizonyítás? — Nyilvánvaló, hogy *nem*! Zeuthen *téved,* amikor azt állítja, hogy az antik exisztencia-bizonyítás egyetlen és mindig alkalmazott eszköze a konstrukció, azaz a geometriai szerkesztés volt. Vegyük pl. az euklidészi aritmetika következő két érdekes tételét: VII 31. *Minden összetett számnak osztója valamely prímszám,* és IX 20. *Több prímszám van, mint a prímszámok bármely adott (= véges) halmaza.* — Nem kétséges, hogy e tételek bizonyítása exisztencia-bizonyítás. Mert az első esetben abból áll a bizonyítás, hogy megmutatjuk, bármely tet-

[173] H. G. Zeuthen, *Math. Ann.* 47 (1896) 222—228.
[174] O. Becker, *Math. Existenz* 1927, 130.
[175] Vö. O. Neugebauer, Quell. u. Studien etc. B 3 (1936) 245—259.

szőleges összetett szám, pl. *a* esetében *van* egy olyan prímszám (pl. *f* vagy *g*), amely osztója *a*-nak. — Hasonlóképpen a másik tétel esetében a bizonyítás abból áll, hogy megmutatjuk, a prímszámok bármely adott (= véges) halmaza esetében *van* még legalább egy olyan prímszám, amely nem eleme a prímszámok vizsgált halmazának.

EUKLIDÉS e tételek esetében a keresett szám exisztenciáját *nem* geometriai konstrukcióval bizonyítja. Sőt kérdéses: vajon nem a mi gondolkozásunkat magyarázzuk-e bele az antik szövegbe, ha e tételekkel kapcsolatban a szó bármiféle értelmében „konstrukcióról” beszélünk?

ZEUTHEN elméletének egy másik gyöngéjére A. FRAJESE hívta fel a figyelmet.[176] Emlékeztetett ugyanis arra: EUKLIDÉS az ókori hagyomány szerint a platóni filozófia követője volt.[177] De hogyan lehetséges, hogy a platóni filozófia híve a konstrukciót az exisztencia bizonyítékának tartsa? — kérdezi FRAJESE. Hiszen a geometriai szerkesztés csak *láthatóvá* — szinte megfoghatóvá — tesz valamit, PLATÓN pedig éppen a „láthatótól” tagadta meg az igazi létezést! — nem kétséges, hogy FRAJESE kifogása nagyonis indokolt.

Úgy gondolom azonban, a megelőző fejezetek értelmében a matematikai exisztencia problémáját is egészen új oldalról világíthatjuk meg. — Beszéltünk már arról, hogyan értették az exisztenciát (a valódi létezést) az eleai és a platóni filozófia hívei. A létező *(τὸ ὄν)* — vagy más néven az egy *(τὸ ἕν)* — exisztenciája az eleaták számára egyáltalán nem volt problematikus. PARMENIDÉS ezt a tételt indirekt úton bizonyította: kimutatta ugyanis az ellentmondást a másik két tételben: „a létező nincs” és „a létező van is meg nincs is”.

Hasonló volt az exisztencia-bizonyítás az aritmetikában is — azzal a különbséggel, hogy itt még előbb az „absztrakt soknak”, a „számnak” a fogalmát kellett megteremteni oly módon, hogy az *egyet* gondolatban megsokszorozták.[178] (Az eleaták kezdetben tagadták a „sok” létezését is; amíg pedig nem volt „sok” — azaz „szám” —, nem volt lehetséges természetesen az aritmetika sem.) Felállították tehát a következő aritmetikai definíciót: „a szám egységekből összetett halmaz.” E definíció alapján pedig most már az aritmetikában is indirekt úton bizonyíthatták az exisztenciát.

A görög aritmetikában tehát valamely szám exisztenciáját *nem* szerkesztéssel (konstrukcióval) bizonyították be, hanem oly módon, hogy kimutatták az ellentmondást abban az állításban, amely kétségbevonja a kérdéses szám létezését. Az elemek VII. 31 tétel értelmében pl. *van* minden összetett számra olyan prímszám, amely osztója ennek az összetett számnak, mert az az állítás,

[176] A. FRAJESE, *La matematica nel mondo antico*, Roma 1951 p. 92.
[177] Proclus 68, 20 kk.
[178] Vö. *Matematikai Lapok* X (1959) 81—98.

hogy „nincs ilyen szám", ellentmond a szám definíciójának. — Hasonlóképpen a prímszámok bármely adott (= véges) halmaza esetében *van* még legalább egy olyan prímszám, amely nem eleme a vizsgált halmaznak, mert az az állítás is, amely tagadja ezt a tételt, ellentmondásra vezet.

Az az állítás tehát, hogy a görög aritmetikában az exisztencia-bizonyítás egyetlen és mindig alkalmazott eszköze a szerkesztés (konstrukció) lett volna, nem állja meg a helyét. A görög aritmetika jelentős részében az exisztenciát logikai úton, indirekt bizonyítással mutatták ki.

Kétségtelenül igaz viszont az, hogy a „matematikai exisztencia" fogalma új értelmet kapott a geometriában, a térről szóló tudományban. Mert a létezés kritériuma az eleai filozófia szerint az *ellentmondásmentesség* volt; ezt a kritériumot pedig a geometriában már kevésbé lehetett alkalmazni, mint az aritmetikában. Hiszen láttuk már, hogy a „pont", a „vonal", sőt még maga a „tér" fogalma is ellentmondásos. A geometriában tehát praktikus-empirikus tényekből kellett kiindulniok a matematikusoknak. Ezért épül a geometriai exisztencia-bizonyítás legtöbbször csakugyan konstrukcióra. Minden szerkesztést pedig igyekeznek visszavezetni két *alapvető* szerkesztésre, az egyenes és a kör szerkesztésére, azaz a három első euklidészi posztulátumra, amelyek valójában *exisztencia-posztulátumok.*

Bár a görögök ily módon a geometriai exisztenciát csakugyan a szerkeszthetőség — pontosabban az euklidészi posztulátumok alapján való szerkeszthetőség kérdésévé tették, az eleai és platóni filozófia szempontjából ez a fajta exisztencia továbbra is problematikus maradt. Ezért panaszkodott PLATÓN — mint fentebb egy idézetben láttuk már —, hogy a geometerek kifejezésmódja, amely mindig a szerkeszthetőségről beszél, félrevezető látszat, hiszen a geometriai alakzatok a szerkesztéstől függetlenül léteznek. Mást jelentett tehát a matematikai exisztencia már PLATÓN korában is pusztán csak a matematika, és mást a filozófia szempontjából.

2. AZ ÚN. PLATÓNI REFORM

Egy másik érdekes probléma, amely — úgy gondolom — az elmondottak alapján új megvilágításba kerül: a platóni filozófiának és a matematikának egymáshoz való viszonya. Érdemes lesz röviden visszapillantanunk arra, hogyan ítélték meg ezt a kérdést régebben.

Még 1913-ban publikálta H. G. ZEUTHEN egyik fontos cikkét, amely bennünket ezúttal inkább csak a címe miatt érdekel: „Sur les conaissances géométriques des Grecs *avant la réforme platonicienne.*"[179] Mint a címből is

[179] Oveisigt det kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, 1913 No. 6. 431—473.

kiderül, ZEUTHEN úgy gondolta, hogy volt a görög geometria története során egyszer egy „platóni reform"; sőt a cikk ezt a bizonyos reformot egyenesen magának PLATÓNnak tulajdonította. ZEUTHEN véleménye szerint ugyanis PLATÓN, bár nem közvetlenül csak tanítványain keresztül, de mégis lényeges befolyást gyakorolt a geometria fejlődésére. Tizenkét évvel később így foglalta össze O. TOEPLITZ azoknak a történészeknek a véleményét erről a kérdésről, akik ZEUTHÉN „reform-theóriáját" vallották:[180]

„PLATÓNnak természetesen nem voltak matematikai felfedezései; az az ókori hagyomány, amely neki tulajdonítja a dódekaéder felfedezését, tévedés. PLATÓN *azonban általános irányelveket adott a matematikának; az „Elemek" axiómatikus felépítése; a szerkesztésben a vonalzó és körző kizárólagosságához való ragaszkodás, és az analytikus módszer:* PLATÓN *műve.* PLATÓN *körének nagy matematikusai,* THEAITÉTOS *és* EUDOXOS, *az ő hatására teremtették meg az ún. euklidészi geometriát.*"

Mint az idézet kiemelt szavaiból látjuk, a történészek ebben az időben hajlandók lettek volna szinte az egész rendszeres görög matematikát annak a „platóni reformnak" a számlájára írni, amelyet ZEUTHEN valósággal mérföldkőnek tartott a tudomány történetében. 1927-ben még O. BECKER is annyira ZEUTHEN elképzelésének a hatása alatt állott, hogy úgy gondolta: PLATÓN működésével új korszak kezdődött a matematika történetében. Akkoriban így írt erről:[181]

„Nagy egészében a matematika PLATÓN előtt szemléletes és formához kötött (mint ZEUTHEN mondta: „érzékletes geometria") volt. A feltűnő (szimmetrikus és ehhez hasonló) alakzatok tulajdonságait vizsgálták, anélkül, hogy e vizsgálatok rendszeresek lettek volna. A szerkesztések is önkényesek és szabályozatlanok voltak („becsúsztatás", mindenféle kinematikus konstrukciók, pl. az élisi HIPPIAS quadratrixa). PLATÓN *vezette be azt az általános reformot, amelynek az axiómatikus módszert és a matematikai exisztenciának a szerkeszthetőséggel való definícióját köszönhetjük.*"

ZEUTHEN elmélete a „platóni reformról" az elmúlt évtizedek során általánossá, sőt csaknem kizárólagossá lett. Jó példa lehet erre O. TOEPLITZ esete, aki a következő gondolatmenet alapján próbálta kisebb mértékben revideálni ZEUTHEN elméletét:

Ha csakugyan volt a tudomány történetében egy olyan gyökeres „platóni reform", mint ZEUTHEN gondolta, akkor a görög geometria fejlődésében két nagy korszak különböztethető meg: egy empírikus korszak a reform *előtt*, és egy theóretikus a reform *után*. „Elképzelhető volna azonban — írta továbbá TOEPLITZ —, hogy e két korszak közé egy átmeneti fokot iktassunk; ti. egy

[180] „Mathematik und Antike" az „Antike" c. folyóiratban 1925 I 175—203.
[181] „Mathematische Existenz" 250.

olyan fokot, amelyen ugyan bizonyítanak már, de még nem teszik fel rendszeresen a kérdést: mennyi az a bebizonyíthatatlan minimum (axióma), amely elégséges minden bizonyításhoz. Hogy egy ilyen fokozat a tudomány történetében is elképzelhető, arra többször példát ad iskoláink matematika-tanítása,"[182]

Természetesen, ha TOEPLITZ nyomán ilyen átmeneti fokot iktatunk a matematika két nagy korszaka közé, akkor ezáltal erősen csökken már a feltételezett „platóni reform" jelentősége. Ennek a harmadik fokozatnak a megkísérelt közbeiktatása azonban TOEPLITZ részéről valójában nem volt több, mint lélektani előkészítés a „ZEUTHEN-theória" következő revíziójához:

„Elképzelhető volna az is, hogy a nagy matematikusok, még azok is, akik PLATÓN akadémiájához tartoztak, *nem* PLATÓN *ösztönzésére hajtották volna végre a reformot, hanem a matematika belső lényegének engedelmeskedve, és hogy* PLATÓN *lett volna az, aki tőlük tanult, amikor módszerüket az általános ismeretelméletre alkalmazta.*"[183]

A ZEUTHEN-theóriának ez a revíziója meglehetősen hűvös fogadtatásra talált. O. BECKER pl. csak a következőt jegyezte meg TOEPLITZ idézett gondolatára:[184]

„E hipotézist se bizonyítani, se cáfolni nem lehet, mivel olyan kevés hiteles egykorú forrás áll a rendelkezésünkre. Annyit azonban mégis bizonyosra vehetünk, hogy PLATÓN *volt az első, aki világosan felismerte: a matematika elemi felépítéséhez szigorú módszeresség kell*; *ezzel pedig a pozitív matematikai kutatás fejlődését is döntő mértékben elősegítette.*"

Nem csodálkozhatunk azon, hogy O. BECKER 1927-ben még annyira hangsúlyozta az egykorú hiteles források hiányát s ebben látta a platón-előtti matematika megismerésének nagy akadályát. A páros és páratlan elméletét, ezt az V. századból származó tételsorozatot csak 1936 óta ismerjük, éppen O. BECKER egyik kitűnő dolgozata nyomán.[185] Annál különösebb viszont, hogy O. BECKER ZEUTHEN theoriáját az állítólagos „platóni reformról" még később sem akarta feladni. 1951-ben pl. egyik recenziójában bírálta B. L. van der WAERDENnek azt a feltevését, hogy az euklidészi „Elemek" VII. könyve még az i. e. V. századból származik, megjegyezvén, hogy: „a VII. könyv mai tökéletes formája talán későbbi átdolgozás eredménye, egy olyan átdolgozásé, amelyet talán az Akadémia matematikusainak köszönhetünk."[186] Nem kétséges,

[182] I. m. 201.

[183] Uo. 201—202.

[184] „Mathematische Existenz" 250, 2. jegyzet.

[185] Quell. u. Studien etc. B 3 (1936) 533—553. Vö. O. BECKER, Grundlagen der Mathematik 1954, 38 kk.

[186] Gnomon 23 (1951) 38 kk.

hogy BECKER maga is tisztában volt azzal: mennyire indokolatlan ez a szkepszise. Éppen azért rögtön hozzá is fűzte előbbi megjegyzéséhez: „Persze, B. L. van der WAERDEN joggal hivatkozhatnék arra, hogy egy olyan szigorú logikával felépített rendszernél, mint EUKLIDÉS VII. könyve, aligha szabad különbséget tennünk tartalom és forma között." — Az előbbi megjegyzés tehát, amely szerint EUKLIDÉS VII. könyvét az Akadémia matematikusai „átdolgozták volna", csak arról tanúskodik, hogy BECKER még 1951-ben sem akarta feladni ZEUTHEN régi elméletet: PLATÓN kortársai gyökeres reformot hajtottak végre az egykorú matematikában.

Azt hiszem, e dolgozat utolsó fejezetében nem szükséges még egyszer összefoglalnom véleményemet a „platóni reform" kérdéséről. Fontosabb lesz talán ehelyett rámutatnom e túlhaladott elméletnek az eredetére.

Az antik hagyomány csakugyan többször hangsúlyozza PLATÓN szoros kapcsolatát korának matematikájához. PROKLOS pl. ezt írja:[187] „PLATÓN buzgó tanulmányainak köszönhető a matematikai diszciplinák, különösen pedig a geometria fellendülése. Írásai telis-tele vannak matematikai gondolatokkal, és ő maga mindig arra törekszik, hogy a filozófia híveiben felébressze a csodálatot ezek iránt a dolgok iránt." Ha ehhez hozzászámítjuk még, hogy e kor nagy matematikusai, THEAITÉTOS, EUDOXOS és még sokan mások, akiket PROKLOS felsorol, PLATÓN barátai, illetőleg a matematikában mesterei, vagy a filozófiában tanítványai voltak, csakugyan elképzelhetőnek tartjuk majd, hogy PLATÓN működése talán a matematika szempontjából is lényeges lehetett. (Hiszen ez a dolgozat is a rendszeres matematika eredetére vonatkozó elméletet úgy építette fel, hogy közben állandóan figyelemmel volt PLATÓN műveire is.)

Arról azonban sehol sem beszél az antik hagyomány, hogy PLATÓN reformot vagy pláne fordulatot hozott volna a matematika fejlődésében. Úgy látszik tehát, az az állítás, hogy „PLATÓN lett volna az első, aki felismerte: a matematika elemi felépítéséhez szigorú módszeresség kell, és hogy PLATÓN ezzel a pozitív matematikai kutatás fejlődését is döntő mértékben elősegítette volna", indokolatlan túlzás a modern történeti kutatás részéről. — Még abban az esetben is, ha PLATÓNnak a matematikához való viszonyát *nem* úgy ítélnénk meg, ahogy e dolgozatban kifejtett elméletemből következik — hogy ti. mind PLATÓN filozófiája, mind pedig a vele egykorú matematika *közös gyökerekből,* eleai dialektikából sarjadtak ki —, még akkor is kézenfekvőbb volna REIDEMEISTER elmélete,[188] hogy ti. PLATÓN vette volna át az indirekt bizonyítás módszerét a matematikából.[189]

De mi adhatott akkor mégis okot arra, hogy kialakuljon ZEUTHEN külö-

187 Proclus 66, 8 kk.
188 K. REIDEMEISTER, i. m. 44—65.
189 Lásd ehhez még B. L. v. d. WAERDEN, Erwachende Wissenschaft 247.

nös elmélete a „platóni reformról”, és arra, hogy ez az elmélet ilyen nagy mértékben el is terjedjen? — Azt hiszem, hozzájárulhatott ehhez az az indokolatlan bizalmatlanság is, amelyet a történeti kutatás — legalábbis régebben — az i. e. V. század egyik kiváló görög matematikusával, a chiosi HIPPOKRATÉSszei szemben tanúsított. Bár ezúttal nem térhetek ki részletesebben HIPPOKRATÉSnek a holdacskák quadraturájáról írt munkájára, mégis emlékeztetnem kell itt néhány olyan véleményre erről a munkáról, amely egyszersmind azt is illusztrálhatja, hogyan támogatta a HIPPOKRATÉSszel szemben tanúsított bizalmatlanság a „platóni reform” elméletét.

Mindenekelőtt érdemes lesz felhívnom a figyelmet arra, hogy régebben még azt sem tartották valószínűnek: már HIPPOKRATÉS is alkalmazhatta volna az indirekt bizonyítást matematikai levezetéseiben?[190] HIPPOKRATÉS tudásának és képességeinek ez a megítélése éreztette hatását a szövegkritikában is. Különböző megokolásokkal ugyan, de mégiscsak kirekesztették SIMPLICIUS szövegéből mindazokat a részeket, amelyek indirekt bizonyításokat tartalmaztak, mondván, hogy ezek nem magától HIPPOKRATÉStől származnak, inkább csak EUDEMOS kiegészítései lehetnek.[191] A „megtisztított” szöveg interpretálásában még tovább mentek; mindent elkövettek, hogy HIPPOKRATÉSt mint igazi *szofistát* mutassák be.

SIMPLICIUS szövege pl. azt állítja: HIPPOKRATÉS bebizonyította, hogy „körök területei úgy aránylanak egymáshoz, mint az átmérőikre emelt négyzetek”. Minthogy azonban SIMPLICIUS szövege e tétel bizonyítását *nem* közli, feltették a kérdést: vajon HIPPOKRATÉS csakugyan hibátlanul be tudta-e bizonyítani ezt a tételt? Az a bizonyítás ugyanis, amelyet erre a tételre EUKLIDÉSnél olvasunk (Elem. XII 2), PLATÓN kortársától, EUDOXOStól származik, vagyis ezt HIPPOKRATÉS aligha ismerte. Ezért aztán O. TOEPLITZ megkísérelte már előbb is említett cikkében egy olyan „kevésbé tökéletes bizonyítás” rekonstruálását, amelyet — véleménye szerint — már HIPPOKRATÉS is adhatott tételére. TOEPLITZ tehát *feltette*, hogy HIPPOKRATÉS bizonyítása szabályos sokszögekből ($4, 8. 16, 32, \ldots, n$) indult ki. Ezekre hibátlanul ki tudta mutatni HIPPOKRATÉS, hogy két szabályos sokszög területe (A és a), csakugyan úgy aránylik egymáshoz, mint a megfelelő körök rádiuszaira (R és r) emelt négyzetek; tehát: $A:a = R^2:r^2$. Ebből viszont — TOEPLITZ szerint — arra következtetett volna HIPPOKRATÉS, hogy ugyanez érvényes a két kör területére (K és k) is: $K:k = R^2:r^2$, minthogy a körbeírt sokszögek területei az oldalszám növelésével *láthatóan* közelednek a kör területéhez.

Miután TOEPLITZ rekonstruálta ezt a naív „bizonyítást” HIPPOKRATÉS

[190] Lásd a 179. jegyzetet.
[191] Lásd uo. 452. lap.

számára — anélkül, hogy erre bármilyen adatot talált volna az antik hagyományban, egyszerűen csak fantáziából —, mindjárt le is szűrte belőle a tanulságot:[192]

„EUDOXOS genialitása kellett ahhoz, hogy felismerjék: végtelen folyamatról van itt szó, amely áttöri a tiszta bizonyítás kereteit. Az *n* oldalú sokszög alapján a két kör, *K* és *k*, területére való következtetés logikai ugrás, amelynek nincs axiómatikus igazolása. *És ez nem volt az egyetlen eset, ahol ilyen ugrást követtek el. Megismétlődött ez egy egész sor más tételnél is, úgy ahogy a szofista tanítómesterek előadták őket.*"

Ezután következik TOEPLITZnél az eudoxosi axióma jellemzése, amely véleménye szerint nélkülözhetetlen HIPPOKRATÉS tételének a bizonyításához,[193] majd pedig hatásos kontrasztban hasonlítja össze a „szofistát" és az „igazi platóni tudóst":[194]

„az egyik oldalon áll tehát a *szofista iskolamesterek álláspontja,* akik elegánsan megteszik a titokzatos ugrást a végtelenbe, a másik oldalon viszont *a platóni akadémiára jellemző művészi módszer:* elkerülni minden gondolati ugrást, szigorúan megmaradni a véges geometria keretei között, és mindent more geometrico levezetni EUDOXOS egyetlen új axiómájából."

Világosan bizonyítja e két legutóbbi idézet, hogy tulajdonképpen *kettős* történeti konstrukcióval van dolgunk. — Ahhoz, hogy kimutathassák a matematika „platóni reformját", előbb rekonstruálniok kellett azt a „szofista matematikát", amely a reform *előtt* lett volna érvényben.[195] Nem szükséges talán hangsúlyoznom, hogy a józan kritika ezt a kettős konstrukciót egyáltalán nem fogadja el. Ami a „szofista matematikát" illeti, erről ma már senki sem beszél, vagy legalábbis nem abban az értelemben, mint ahogy TOEPLITZ beszélt róla. Azok a szofisták, akik egyben matematikusok is voltak, egyáltalán nem váltak szégyenére a matematikának. — Ami viszont a matematika „platóni reformját" illeti, bár ezt a gondolatot — tudomásom szerint — előttem még senki sem cáfolta érvekkel, valójában ma már ennek az elgondolásnak is csak az emléke él.

Azt hiszem azonban e dolgozat befejezéseként válaszolhatok egy olyan kérdésre is, amelyet legutóbb TOEPLITZ fogalmazott meg éppen a „platóni reform" problémájával kapcsolatban. TOEPLITZ ugyanis említett cikkében feltette a kérdést:

192 „Antike" (folyóirat) I 1925 182—183.

193 O. BECKER legutóbb (Archiv f. Begriffsgesch. IV 218 kk.) megmutatta, hogy HIPPOKRATÉS tételét egyszerűbb eszközökkel is hibátlanul bizonyíthatta.

194 „Antike" (folyóirat) I 1925 192.

195 Az újabb kutatás HIPPOKRATÉSszel kapcsolatban már nem „szofista" matematikáról beszél, hanem éppen bizonyításainak feltűnő *szigorúságát* emeli ki; vö. pl. B. L. v. d. WAERDEN, Math. Ann. 120, 139–140 és „Erwachende Wissenschaft" 214.

„Vajon a matematika története során volt-e idő, amikor a filozófia döntő módon szólt bele a matematikába, és a filozófia alakította-e ki ennek a tudománynak igazi, végleges formáját, vagy talán mindezt önmagából teremtette-e meg a matematika?"

Az itt összefoglalt kutatások értelmében a rendszeres és deduktív matematika történetének legelső szakaszában nem volt egyéb, mint a filozófiának, közelebbről az eleai dialektikának egyik speciális ága. A görög matematika tulajdonképpen a *geometria* elméleti megalapozásával szakadt ki a filozófiából és lett tőle függetlenné.

Függelék

ARISTOTELÉS *és az euklidészi princípiumok*

A történeti kutatás már többször megkísérelte, hogy a görög matematika axiómarendszerének kialakulását ARISTOTELÉSből kiindulva magyarázza (lásd pl. TH. HEATH művét, „The Elements, Euclid, Cambridge 1908" a Bevezetésben; K. v. FRITZ többször idézett dolgozatát 1955-ből és O. BECKERnek ehhez kapcsolódó megjegyzéseit: Archiv f. Begriffsgesch. IV 210 kk.). Nemcsak azért érthető ez, mert ARISTOTELÉS műveiben gyakran hívatkozik az egykorú matematikára, saját gondolatait többször matematikai példákkal illusztrálja, sőt néha vitatkozik is a matematikusokkal, hanem még inkább azért, mert az egész ránk maradt ókori irodalomban ARISTOTELÉS a legrégibb olyan szerző, aki egyik művében — az „Analytica posteriora"-ban — a matematikai axiómatika kérdéseit összefüggően tárgyalja. Nyilvánvaló, hogy a modern matematikatörténeti kutatás *nem hagyhatja figyelmen* kívül ARISTOTELÉSnek gyakran nagyon értékes adatait. A görög matematika axiómarendszerének sok történeti problémáját egyáltalán nem is tudnánk megoldani, ha nem állna rendelkezésünkre ARISTOTELÉS mint forrás.

Mégis, ha az euklidészi axiómarendszer történeti magyarázatát tűzzük ki célul, vigyáznunk kell: nehogy túlértékeljük ARISTOTELÉS magyarázatait. Nyilvánvaló ugyanis, hogy ARISTOTELÉS magyarázatai nagyon sok esetben *egyáltalán nem alkalmazhatók* EUKLIDÉS-re. tekintsük át pl. röviden, hogyan különbözteti meg ARISTOTELÉS az Analytica posteriora első könyvének második fejezetében az egyes matematikai pricípiumokat (a következőkhöz lásd K. v. FRITZ, i. m. 25 kk.).

ARISTOTELÉS mindenekelőtt megkülönbözteti a *θέσις*-t az *ἀξίωμα*-tól. A „thesis"-ről azt állítja, hogy ez — éppenúgy mint minden princípium — bizonyíthatatlan, és hogy erre (a „thesis"-re) nincs is okvetlenül szüksége mindenkinek, aki valamit a szó tudományos értelmében tanulni akar.

Az „axióma” szerinte éppen abban különbözik a „thesis”-től, hogy mindenki, aki a szó tudományos értelmében fel akar fogni valamit, az „axióma” birtokában kell hogy legyen. A „thesis”-t a továbbiakban felosztja aztán „hypothesis”-re és „horismos”-ra; az utóbbi *(ὁρισμός)* nála a „definíció” neve. — Rendkívül érdekes az is, miben különbözik — szerinte — a „hypothesis” a „horismos”-tól. A „hypothesis” ugyanis azt mondja ki, hogy valami *van* vagy *nincs*. A „horismos” (a definíció) kevesebb ennél. Mert a definíció pl. az egység esetében csak annyit mond ki, hogy az egység a mennyiség szerint oszthatatlan valami; de a definíció önmagában még nem állapítja meg az egységnek a *létezését* is; a létezés megállapítása egy olyan „hypothesis”-nek a feladata, amely párhuzamos a megfelelő „horismos”-szal. A princípiumok felosztásának arisztotelészi schémája tehát a következő:

ἀρχαὶ

θέσις *ἀξίωμα*

ὑπόθεσις *ὁρισμός*

Hogyan lehetne rnármost ezt az arisztotelészi schémát összhangba hozni Euklidésszel? — Aristotelés axiómáit minden további nélkül azonosíthatjuk az euklidészi axiómákkal, és ugyanígy talán a definíciókat is (Euklidésnél „horoi”) a „horismos”-szal. De már a következő lépésben megakadunk. Megpróbálhatnánk ugyan az euklidészi *posztulátumot* („aitéma”) azonosítani az arisztotelészi „hypothesis”-szel, minthogy mind a kettő az exisztenciára vonatkozik, de egyáltalán nem értjük — Euklidés szempontjából — a „hypothesis” és „horismos”-nak arisztotelészi összefoglalását a „thesis”-ben. Ha Euklidés szövegéből indulunk ki, semmi értelme sincs annak az állításnak, hogy a posztulátumok közelebbi rokonságban állnak a definíciókkal, mint az axiómákkal!

De igazában nem is azonosíthatjuk az arisztotelészi „hypothesis”-t az euklidészi „aitéma”-val. Euklidés „aitéma”-i lényegükben mások mint Aristotelés „hypothesis”-ei. Hiszen Aristotelés a következőket is állítja még (An. post. I 10, 76 b 7 kk. vö. K. v. Fritz, i. m. 54—55): a matematikusok bebizonyítják az aritmetikában a párosnak és a páratlannak, a geometriában pedig az inkommenzurábilisnek és a háromszögnek a létezését. — Ennek az állításnak az első fele — Euklidés szempontjából — egyszerűen tévedés. Euklidés sehol sem bizonyítja be a páros és a páratlan létezését abban az értelemben, ahogy ezt Aristotelés kívánná. Euklidés ezeket a fogalmakat egyszerűen csak definiálja. — Aristotelést olvasva az a benyomásunk, mintha Aristotelés valami egészen mást értene exisztencián, mint amit mi az eleatákból és Platónból kiindulva Euklidésnél is fölismertünk.

Le kell tehát szögeznünk — anélkül hogy kísérletet tennénk ezúttal az Aristotelés-interpretációra —, ARISTOTELÉSnek nemhogy az axiómatikáról adott magyarázatai, de még csak a terminológiája sem alkalmazható az euklidészi „Elemekre”. Úgy látszik, minden olyan kísérlet, amely megpróbálja összhangba hozni egymással ezt a két különböző — arisztotelészi és euklidészi — terminológiát, erőszakosan meghamisítja közülök legalább az egyiket.

Azt viszont, hogy ARISTOTELÉS terminológiája az ókor többi, euklidész-utáni matematikusára *nem* alkalmazható, megállapította már K. v. FRITZ is; bár ő ezt a tényt — ARISTOTELÉSből kiindulva — inkább úgy fogalmazta meg, hogy „a matematikusoknál a princípiumok elnevezését illetően teljes a terminológiai zűrzavar és összevisszaság”.

(Beérkezett: 1960. VI. 5.)

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete