A FÉLCSOPORTOK IDEÁLELMÉLETÉHEZ [1]

Írta: LAJOS SÁNDOR

Bevezetés

Egy nemüres S halmazt *félcsoportnak* nevezünk, ha értelmezve van benne egy asszociatív művelet, amely S bármely két meghatározott sorrendben vett eleméhez egy S-beli elemet rendel, amit ezen elemek szorzatának nevezünk. Ha még az $ab = ba$ feltétel is teljesül az S halmaz bármely két a, b elemére, akkor az S félcsoportot *kommutatív* félcsoportnak nevezzük.

Legyenek A és B az S félcsoport nemüres részhalmazai. Az AB szorzaton az ab alakú elemek összességét értjük, ahol a befutja A, b pedig B elemeit. Az S félcsoport nemüres T részhalmazát S *részfélcsoportjának* nevezzük, ha T is félcsoportot alkot ugyanarra a műveletre nézve, mint S. Ahhoz, hogy valamely T részhalmaz részfélcsoport legyen, nyilván szükséges és elégséges, hogy a $TT \subseteq T$ feltétel teljesüljön. Az S félcsoport L nemüres részhalmazát *baloldali ideálnak*, vagy röviden *balideálnak* nevezzük, ha $SL \subseteq L$. Az R nemüres részhalmazt *jobboldali ideálnak*, vagy *jobbideálnak* nevezzük, ha $RS \subseteq R$. Ha az S félcsoport I részhalmaza egyszerre baloldali és jobboldali ideál, akkor *kétoldali ideálnak*, vagy röviden *ideálnak* nevezzük.

Ebben a dolgozatban az imént definiált ideálfogalmak általánosításával foglalkozunk. Bevezetjük az (m, n)-ideál és az (m, n)-kváziideál fogalmát. Ezek közül az (m, n)-ideál speciálisan magában foglalja a baloldali és a jobboldali ideál, továbbá a biideál (l. [2]) fogalmát, az (m, n)-kváziideál pedig a kvázi-ideál (l. [10]) fogalmának általánosítása. Az 1. §-ban szemléletes képet adunk az (m, n)-ideálokról (l. 1.6. tétel), majd megmutatjuk, hogy bármely félcsoport összes $(1, 1)$-ideáljai a komplexus szorzásra nézve félcsoportot alkotnak. A 2. §-ban az (m, n)-kváziideálok előállítását adjuk (m, n)-ideálok segítségével. A 3. §-ban a Neumann-reguláris félcsoportok esetét vizsgáljuk, s bebizonyítjuk, hogy Neumann-reguláris félcsoportban minden (m, n)-ideál (m, n)-kváziideál és megfordítva, vagyis a két fogalom egybeesik. Élesítjük a Neumann-regularitásra vonatkozó *Kovács—Iséki*-féle kritériumot, továbbá megmutatjuk, hogy Neumann-reguláris félcsoport összes $(1, 1)$-ideáljainak félcsoportja ismét Neumann-reguláris.

[1] A dolgozat főbb eredményeit ismertettem a *„Csoportok és általánosításaik"* kollokviumon, Lajos-forráson, 1959. szept. 4-én.

1. §. (m, n)-ideálok

1. 1. definíció. Az S félcsoport A részfélcsoportját *(m, n)-ideálnak* nevezzük, ha kielégíti az

$$A^m S A^n \subseteq A \tag{1}$$

összefüggést, ahol m, n nemnegatív egészek. (A^0 legyen az S félcsoporthoz nem tartozó olyan elem, amely az S félcsoporton egységelemként operál.)

Speciális esetek: a $(0, 1)$-ideál a balideál, az $(1, 0)$-ideál a jobbideál és az $(1, 1)$-ideál a biideál. Könnyű bizonyítani, hogy érvényes a következő állítás:

1. 2. lemma. *Egy S félcsoport bármely két (m, n)-ideáljának közös része S-nek (m, n)-ideálja.*

1. 3. definíció. Az S félcsoport valamely S_n részfélcsoportját *elérhető részfélcsoportnak* nevezzük, ha léteznek olyan $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ részfélcsoportjai S-nek, hogy az

$$S = S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots S_{n-1} \supseteq S_n$$

összefüggés érvényes, ahol S_i vagy baloldali, vagy jobboldali ideálja S_{i-1}-nek $(i = 1, 2, \ldots, n)$. A fenti részfélcsoportláncban a szomszédos tagok között fennálló egyoldali ideál kapcsolatok sorrendjét az r és l betűk egy ismétléses variációjával adhatjuk meg. Jelölje π az r, l szimbólumok egy rögzített ismétléses variációját. Az S félcsoport *π-ideáljának* nevezzük mindazokat az elérhető részfélcsoportokat, amelyekhez az r, l szimbólumok π ismétléses variációja tartozik. $\overset{1}{\breve{r}} \cdots \overset{m}{\breve{r}}\, \overset{1}{\breve{l}} \cdots \overset{n}{\breve{l}}$-ideál helyett rövidség kedvéért $r^m l^n$-ideált írunk.

Bebizonyítjuk, hogy az r és l szimbólumok felcserélhetők.

1. 4. tétel. *Egy tetszőleges S félcsoport A részhalmazára az alábbi állítások egymással ekvivalensek:*

(i) *A az S-nek rl-ideálja;*

(ii) *A az S-nek lr-ideálja;*

(iii) *A az S-nek $(1, 1)$-ideálja.*

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg, hogy az S félcsoport A részhalmaza akkor és csak akkor $(1, 1)$-ideálja S-nek, ha A rl-ideál (lr-ideál). Legyen A rl-ideálja a tetszőleges S félcsoportnak. Akkor S-nek van olyan R jobbideálja, amelyben A balideál, azaz $A \subseteq R$, $RA \subseteq A$ és $RS \subseteq R$. Innen következik, hogy

$$ASA \subseteq RSA \subseteq RA \subseteq A,$$

vagyis A $(1, 1)$-ideál az S félcsoportban.

Fordítva, legyen A $(1,1)$-ideál az S félcsoportban, azaz $ASA \subseteq A$. Akkor A balideál az S félcsoportnak az A részhalmazt tartalmazó legszűkebb jobbideáljában (ezt a továbbiakban az A részhalmaz által generált jobbideálnak fogjuk nevezni), mivel az A által generált jobbideál nyilván $A \cup AS$ és

$$(A \cup AS)A = AA \cup ASA \subseteq A \cup A = A,$$

tehát A valóban rl-ideál. Ezzel kimutattuk, hogy az (i) és a (iii) feltételek egymással ekvivalensek. Hasonlóan bizonyítható a (ii) és a (iii) feltételek ekvivalenciája, amivel a tétel bizonyítását befejeztük.

1.5. korollárium. *Egy tetszőleges S félcsoport A részhalmaza akkor és csak akkor π-ideálja S-nek, ahol π m számú r és n számú l szimbólum bármely ismétléses permutációját jelenti, ha A $r^m l^n$-ideálja S-nek.*

Ez az állítás azonnal következik az r és l szimbólumok felcserélhetőségéből. Most bebizonyítjuk az (m, n)-ideálokat szemléltető alábbi tételt:

1.6. tétel. *Egy S félcsoport A részhalmaza akkor és csak akkor π-ideálja S-nek, ahol π m számú r és n számú l szimbólum bármely ismétléses permutációját jelöli, ha A (m, n)-ideálja az S félcsoportnak.*

Bizonyítás. Az 1.5. korollárium szerint elegendő a tételt $r^m l^n$-ideálokra bizonyítani. Legyen tehát A egy $r^m l^n$-ideálja az S félcsoportnak. Akkor — A elérhető részfélcsoport lévén — az S félcsoportnak vannak olyan $R_1, R_2, \ldots, R_m$ és $L_1, L_2, \ldots, L_n$ részfélcsoportjai, amelyekre fennállnak a következő összefüggések:

$$(2) \quad \left\{\begin{array}{l} R_1 S \subseteq R_1 \\ R_2 R_1 \subseteq R_2 \\ \quad \ldots \\ R_m L_1 \subseteq L_1 \\ L_1\, L_2 \subseteq L_2 \\ \quad \ldots \\ L_{n-1} L_n \subseteq L_n \end{array}\right. \qquad (A = L_n \subseteq L_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq L_1 \subseteq R_m \subseteq \cdots \subseteq R_1 \subseteq S).$$

Innen következik, hogy

$$A^m S A^n = L_n^m S L_n^n \subseteq L_n^{m-1}(R_1 S) L_n^n \subseteq L_n^{m-1} R_1 L_n^n \subseteq \cdots \subseteq (L_n R_{m-1}) L_n^n \subseteq$$

$$\subseteq (R_m R_{m-1}) L_n^n \subseteq R_m L_n^n \subseteq (R_m L_1) L_n^{n-1} \subseteq L_1 (L_2 L_n^{n-2}) \subseteq \cdots \subseteq L_n = A,$$

vagyis A valóban (m, n)-ideálja az S félcsoportnak.

Megfordítva, tegyük fel, hogy A (m, n)-ideál egy S félcsoportban. S-nek az A részfélcsoport által generált (m, n)-ideálja (vagyis az S félcsoport A-t tartalmazó legszűkebb (m, n)-ideálja) nyilván $A \cup A^m S A^n = \{A\}_{(m, n)}$. Az triviális, hogy $\{A\}_{(m, k)}$ balideál $\{A\}_{(m, k-1)}$-ben, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ és $\{A\}_{(i, n)}$ jobbideálja $\{A\}_{(i-1,n)}$-nek ($i=1,2,\ldots,m$). Ebből következik, hogy az

$$L_n=A,\ L_{n-1}=\{A\}_{(m,n-1)},\ \ldots,\ L_1=\{A\}_{(m,1)},$$

$$R_m=\{A\}_{(m,0)},\ R_{m-1}=\{A\}_{(m-1,0)},\ \ldots,\ R_1=\{A\}_{(1,0)}$$

részfélcsoportok kielégítik a (2) feltételeket. Ezzel beláttuk, hogy A $r^m l^n$-ideálja az S félcsoportnak. Tekintettel az 1.5. korolláriumra, az 1.6. tétel bizonyítását befejeztük.

Ahhoz, hogy e tételnek a kommutatív félcsoportokra vonatkozó következményét levonjuk, definiálnunk kell két fogalmat.

1.7. definíció. Egy S félcsoport valamely kétoldali ideáljának kétoldali ideálját i^2-ideálnak fogjuk nevezni. *i^k-ideálnak* nevezzük az S félcsoport bármely i^{k-1}-ideáljának kétoldali ideálját. (k pozitív egész szám.)

1.8. definíció. Egy S félcsoport A részhalmazát *k-ideálnak* nevezzük, ha A (m,n)-ideálja S-nek minden olyan nemnegatív egész számokból álló m,n számpárra, amelyekre $m+n=k$. (k pozitív egész szám.)

Egy kommutatív félcsoport A részhalmaza nyilván akkor és csak akkor k-ideál, ha kielégíti az $A^kS\subseteq A$ feltételt.

Megjegyezzük még, hogy a k-ideál fogalma a kétoldali ideál fogalmának általánosítása, ugyanis a $k=1$ esetben a kétoldali ideál definícióját kapjuk.

1.9. korollárium. *Egy kommutatív félcsoport A részhalmaza akkor és csak akkor i^k-ideál, ha k-ideál.* (k pozitív egész szám.)

Ez az állítás azonnal következik az 1.6. tételből.

1.10. megjegyzés. Általánosabban az 1.9. korollárium kétoldali félcsoportokra is érvényes. *Kétoldali* (vagy *duo*) félcsoportnak nevezünk egy félcsoportot, ha mindegyik balideálja egyszersmind jobbideál is, és mindegyik jobbideálja balideál is, tehát csak kétoldali ideáljai vannak (l. [9]).

1.11. tétel. *Egy tetszőleges S félcsoport bármely nemüres részhalmazának és bármely $(1,1)$-ideáljának a szorzata ismét $(1,1)$-ideálja az S félcsoportnak.*

Bizonyítás. Legyen A $(1,1)$-ideálja, B pedig nemüres részhalmaza az S félcsoportnak. Minthogy $ABA\subseteq ASA\subseteq A$, innen következik, hogy

$$(AB)(AB)=(ABA)B\subseteq AB,$$

vagyis AB részfélcsoportja S-nek, s mivel $BS\subseteq S$, nyerjük, hogy

$$(AB)S(AB)=A(BS)A\cdot B\subseteq(ASA)B\subseteq AB.$$

Tehát az AB szorzat valóban $(1,1)$-ideálja az S félcsoportnak.

Hasonlóan igazolható, hogy BA is $(1,1)$-ideál S-ben.

1.12. korollárium. *Egy S félcsoport bármely két* $(1, 1)$*-ideáljának a szorzata ismét* $(1, 1)$*-ideálja az S félcsoportnak.*

Mivel egy félcsoport részhalmazainak szorzása asszociatív művelet, az 1.12. korolláriumból folyik az

1.13. korollárium. *Bármely félcsoport összes* $(1, 1)$*-ideáljainak halmazá ismét félcsoport a részhalmazok szorzására nézve.*

1.14. megjegyzés. Minthogy egy félcsoport összes nemüres részhalmazai is félcsoportot alkotnak a nemüres részhalmazoknak a bevezetésben definiált szorzására nézve, azt kaptuk, hogy egy félcsoport $(1, 1)$-ideáljainak a félcsoportja kétoldali ideálja az összes nemüres részhalmazok félcsoportjának.

Világos, hogy kommutatív félcsoport $(1, 1)$-ideáljainak félcsoportja kommutatív, továbbá idempotens[2] félcsoport $(1, 1)$-ideáljainak félcsoportja idempotens, tehát egy félháló[3] $(1, 1)$-ideáljainak félcsoportja maga is félháló. Megjegyezzük még, hogy homocsoport[4] $(1, 1)$-ideáljainak félcsoportja ismét homocsoport.

2. §. (m, n)-kváziideálok

2.1. definíció. Egy S félcsoport A részfélcsoportját (m, n)*-kváziideálnak* nevezzük, ha kielégíti az

$$A^m S \cap S A^n \subseteq A \tag{3}$$

összefüggést, ahol m, n nemnegatív egészek. (A^0 legyen a félcsoporthoz nem tartozó olyan elem, amely a félcsoporton egységelemként operál.)

Könnyű igazolni a következő állítást:

2.2. lemma. *Egy S félcsoport bármely két* (m, n)*-kváziideáljának a közös része S-nek* (m, n)*-kváziideálja.*

Az $(1, 1)$-kváziideál fogalmát Steinfeld Ottó vezette be (l. [10]), „kváziideál" elnevezéssel és megmutatta, hogy egy félcsoport bármely kváziideálja előállítható egy baloldali és egy jobboldali ideál közös részeként. Ezt az eredményt általánosítja a

2.3. tétel. *Egy tetszőleges S félcsoportnak valamely részhalmaza akkor és csak akkor* (m, n)*-kváziideálja S-nek, ha egy* $(m, 0)$*-ideálnak és egy* $(0, n)$*-ideálnak a közös része.*

[2] Az S félcsoport e elemét *idempotens elemnek* nevezzük, ha $e^2 = e$. Egy félcsoportot *idempotens félcsoportnak* nevezünk, ha mindegyik eleme idempotens.

[3] *Félhálónak* nevezünk egy kommutatív idempotens félcsoportot (l. [11]).

[4] *Homocsoportnak* nevezünk egy S félcsoportot, ha van olyan e idempotens eleme, amely a félcsoport mindegyik elemével felcserélhető, továbbá a félcsoport minden a eleméhez van olyan $a' \in S$, amelyre $aa' = e$. (l. [12]).

B i z o n y í t á s. Legyen S tetszőleges félcsoport, A legyen $(m, 0)$-ideál, B pedig $(0, n)$-ideál az S félcsoportban. Akkor

$$A^m S \subseteq A \quad \text{és} \quad SB^n \subseteq B,$$

ahonnan

$$(A \cap B)^m S \cap S(A \cap B)^n \subseteq A \cap B$$

következik, tehát $A \cap B$ is (m, n)-kváziideál az S félcsoportban.

Fordítva, legyen A (m, n)-kváziideál az S félcsoportban, azaz $A^m S \cap \cap SA^n \subseteq A$. Kimutatjuk, hogy akkor A az A által generált $(m, 0)$-ideálnak és az A által generált $(0, n)$-ideálnak a közös része:

$$A = \{A\}_{(m, 0)} \cap \{A\}_{(0, n)} = (A \cup A^m S) \cap (A \cup SA^n).$$

Felhasználva a közös rész képzés és egyesítés disztributivitását és azt, hogy A (m, n)-kváziideálja S-nek, nyerjük, hogy

$$(A \cup A^m S) \cap (A \cup SA^n) = A \cup (A^m S \cap SA^n) = A,$$

amint állítottuk.

2. 3. t é t e l. *Egy tetszőleges S félcsoport bármely (m, n)-kváziideálja (m, n)-ideálja S-nek.*

B i z o n y í t á s. Legyen S tetszőleges félcsoport, A (m, n)-kváziideálja az S félcsoportnak. Mivel $A^m SA^n \subseteq A^m S$ és $A^m SA^n \subseteq SA^n$, kapjuk, hogy

$$A^m SA^n \subseteq A^m S \cap SA^n \subseteq A,$$

vagyis A (m, n)-ideál.

2. 4. k o r o l l á r i u m. *Bármely kváziideál $(1, 1)$-ideál.*

Az 1. 11. tételből és a 2. 4. korolláriumból adódik a

2. 5. t é t e l. *Egy tetszőleges S félcsoport bármely két kváziideáljának szorzata S-nek $(1, 1)$-ideálja.*

Ezzel kapcsolatban lásd a [10] 265. oldalán feltett kérdést.

3. §. Neumann-reguláris félcsoportok

3. 1. d e f i n í c i ó. Egy S félcsoport a elemét *(m, n)-regulárisnak* nevezzük, ha létezik olyan x eleme S-nek, hogy

$$a^m x a^n = a \tag{4}$$

teljesül, ahol m, n nemnegatív egészek. (a^0 legyen ismét egységelemként ható operátor-elem.) Egy S félcsoportot *(m, n)-regulárisnak* nevezünk, ha mindegyik eleme (m, n)-reguláris (l. [1]). Az $(1, 1)$-reguláris félcsoportokat *Neumann-reguláris*[5] félcsoportoknak nevezzük.

Ezt a fogalmat NEUMANN JÁNOS [6] gyűrűkre definiálta, s az $(1, 1)$-reguláris gyűrűt nevezte reguláris gyűrűnek. KOVÁCS LÁSZLÓ [4] jellemezte a reguláris gyűrűket úgy, hogy bennük az

$$R \cap L = RL \tag{5}$$

összefüggés érvényes minden R jobboldali és minden L baloldali ideálra. KIYOSHI ISÉKI [3] vitte át félcsoportokra ezt a jellemzést. Ezzel kapcsolatban bebizonyítjuk a következő tételt:

3. 2. tétel. *Bármely S félcsoportra vonatkozólag az alábbi feltételek egymással ekvivalensek:*

(i) *S Neumann-reguláris;*

(ii) *$R \cap L = RL$ S-nek mindegyik R jobb- és L balideáljára;*

(iii) *$(a)_r \cap (b)_l = (a)_r(b)_l$ S-nek mindegyik a, b elempárjára;*[6]

(iv) *$(a)_r \cap (a)_l = (a)_r(a)_l$ S-nek minden a elemére.*

Bizonyítás. (i)-ből következik (ii). Legyen S Neumann-reguláris félcsoport, és legyen $a \in R \cap L$. Akkor S-nek van olyan x eleme, hogy $axa = a$. Mivel L balideál, $xa \in L$. Tehát $a = a(xa) \in RL$. Ezzel igazoltuk, hogy $R \cap L \subseteq RL$. Az $R \cap L \supseteq RL$ reláció mindig fennáll, tehát $R \cap L = RL$. Az, hogy (ii)-ből (iii) és (iii)-ból (iv) következik, evidens. Megmutatjuk, hogy (iv)-ből következik (i). Legyen $a \in S$. Világos, hogy $a \in (a)_r \cap (a)_l = (a)_r(a)_l$, mivel $(a)_r = a \cup aS$ és $(a)_l = a \cup Sa$. Innen folyik, hogy $a \in (a)_r(a)_l = a^2 \cup aSa \cup aS^2a \subseteq a^2 \cup aSa$. Így $a = a^2$, vagy $a \in aSa$. Azt nyertük, hogy az $axa = a$ egyenlet mindkét esetben megoldható, tehát az S félcsoport Neumann-reguláris. Ezzel a 3. 2. tételt bebizonyítottuk.

3. 3. korollárium. *Egy kommutatív félcsoport akkor és csak akkor Neumann-reguláris, ha mindegyik főideálja idempotens.*

Most bebizonyítjuk, hogy Neumann-reguláris félcsoportban a 2. 3. tétel megfordítása is igaz.

3. 4. tétel. *Neumann-reguláris félcsoportban mindegyik (m, n)-ideál (m, n)-kváziideál és megfordítva.*

[5] Az angol és az orosz nyelvű irodalomban ezeket a félcsoportokat reguláris félcsoportoknak nevezik. A magyar nyelvű irodalomban reguláris félcsoporton olyan félcsoportot szokás érteni, amelyben mind a baloldali, mind a jobboldali egyszerűsítési szabály érvényes (l. [8]).

[6] Legyen $a \in S$. $(a)_r$ az S félcsoport a-t tartalmazó legszűkebb jobbideálját jelöli. Nyilvánvaló, hogy $(a)_r = a \cup aS$.

Bizonyítás. Legyen S Neumann-reguláris félcsoport. Azt mutatjuk meg, hogy

$$A^m S A^n = A^m S \cap S A^n \tag{6}$$

S-nek minden A nemüres részhalmazára. A 2. 3. tétel bizonyításában láttuk, hogy $A^m S A^n \subseteq A^m S \cap S A^n$. A fordított irányú tartalmazást a 3. 2. tétel (ii) feltételéből kapjuk:

$$A^m S \cap S A^n = (A^m S)(S A^n) \subseteq A^m S A^n,$$

vagyis fennáll (6), amiből a tétel következik.

3. 5. korollárium. *Neumann-reguláris félcsoportban mindegyik kváziideál* $(1, 1)$*-ideál és megfordítva.*

A 2. 3. és a 3. 4. tételekből adódik a

3. 6. tétel. *Legyen S Neumann-reguláris félcsoport, A legyen $(m, 0)$-ideálja, B pedig $(0, n)$-ideálja S-nek. Akkor $A \cap B$ az S félcsoportnak (m, n)-ideálja. Fordítva, S-nek mindegyik (m, n)-ideálja előállítható egy $(m, 0)$- és egy $(0, n)$-ideál közös részeként.*

Szükségünk lesz a következő lemmára:

3. 7. lemma. *Legyen S tetszőleges félcsoport, M az S i^2-ideálja. S-nek az M által generált kétoldali ideálját jelöljük $\bar{M}$-sal. Akkor $\bar{M}^3 \subseteq M$.*

Bizonyítás. Legyen M' az S félcsoportnak M-et kétoldali ideálként tartalmazó kétoldali ideálja. Akkor

$$\bar{M}^3 \subseteq M' \bar{M} M' = M'(M \cup MS \cup SM \cup SMS)M' \subseteq M' M M' \subseteq M,$$

minthogy az M által generált kétoldali ideál nyilván

$$M \cup MS \cup SM \cup SMS.$$

3. 8. tétel. *Neumann-reguláris félcsoportban mindegyik i^k-ideál kétoldali ideál (k pozitív egész szám).*

Bizonyítás. Elég azt bebizonyítani, hogy mindegyik i^2-ideál kétoldali ideál. Legyen M egy i^2-ideálja az S Neumann-reguláris félcsoportnak, és legyen $\bar{M}$ S-nek M által generált kétoldali ideálja. A 3. 2. tételből következik, hogy $\bar{M}^2 = \bar{M}$. Innen és a 3. 7. lemmából $\bar{M} \subseteq M$ adódik, vagyis, minthogy $M \subseteq \bar{M}$, azt kaptuk, hogy $\bar{M} = M$. Tehát M kétoldali ideál az S félcsoportban, amint állítottuk.

3. 9. korollárium. *Inverz félcsoportban mindegyik i^k-ideál kétoldali ideál (k pozitív egész szám).*

Egy Neumann-reguláris félcsoportot *inverz* félcsoportnak (vagy *általánosított csoportnak*) nevezünk, ha bármely két idempotens eleme felcserélhető (l. [5, 7, 13]).

3. 10. megjegyzés. A bizonyításból látható, hogy a 3. 8. tétel általánosabban minden olyan félcsoportra érvényes, amelynek mindegyik kétoldali ideálja idempotens.

Most bebizonyítjuk, hogy Neumann-reguláris félcsoport (1, 1)-ideáljainak félcsoportja ismét Neumann-reguláris.

3. 11. tétel. *Neumann-reguláris félcsoport összes (1, 1)-ideáljainak halmaza a komplexus-szorzásra nézve Neumann-reguláris félcsoport.*

Bizonyítás. Jelölje $\bar{S}$ az S Neumann-reguláris félcsoport összes (1, 1)-ideáljainak halmazát. Az 1. 12. korollárium szerint $\bar{S}$ félcsoport. Megmutatjuk, hogy az

$$AXA = A \qquad (A \in \bar{S}) \tag{7}$$

egyenletnek létezik legalább egy X megoldása $\bar{S}$-ban. Legyen $a \in A$ és x olyan eleme S-nek, amelyre fennáll az $axa = a$ reláció. A minden a eleméhez véve ilyen x elemet, a kapott halmazt jelöljük X'-vel. Az S félcsoportnak az X' részhalmaz által generált (1, 1)-ideálja, $X = \{X'\}_{(1,1)} = X' \cup X'SX'$ kielégíti az $AXA \subseteq A$ összefüggést, mert A (1, 1)-ideálja S-nek. Másrészt $a = axa \in AXA$, azaz $A \subseteq AXA$ is fennáll. Így X megoldása a (7) egyenletnek, tehát az $\bar{S}$ félcsoport valóban Neumann-reguláris.

A 3. 11. tétel úgy is megfogalmazható, hogy Neumann-reguláris félcsoport összes kváziideáljainak halmaza a komplexus-szorzásra nézve Neumann-reguláris félcsoport.

3. 12. megjegyzés. A 3. 11. tétel élesíthető a következőképpen: egy (m, n)-reguláris félcsoport összes (1, 1)-ideáljainak halmaza ismét (m, n)-reguláris félcsoport (m és n természetes számok).

A 2. 4. és a 3. 5. korolláriumokból folyik a

3. 13. tétel. *Neumann-reguláris félcsoportban bármely két kváziideál szorzata ismét kváziideál.*

Ez a tétel válaszol egy kváziideálokkal kapcsolatban feltett kérdésre Neumann-reguláris félcsoportok esetén (l. [10] 265. oldal).

A fenti fogalmak és az eredmények többsége félgyűrűkre[7] és gyűrűkre is átvihető. Ezekkel és a félcsoport k-ideáljával másutt foglalkozunk.

[7] *Félgyűrűn* olyan halmazt értünk, amelyben értelmezve van két művelet, a halmaz mindkét műveletre nézve félcsoportot alkot és a két művelet között fennállnak a bal- és jobboldali disztributivitást kifejező összefüggések.

Köszönetemet fejezem ki FUCHS LÁSZLÓ professzor úrnak, volt aspiránsvezetőmnek munkám irányításáért és e dolgozattal kapcsolatban adott értékes tanácsaiért.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] R. CROISOT: Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **70** (1953) 361—379.
[2] R. A. GOOD—D. R. HUGHES: Associated groups for a semigroup, *Bull. Amer. Math. Soc.* **58** (1952) *Abstract* 575.
[3] K. ISÉKI: A characterisation of regular semi-group, *Proc. Japan Acad.* **32** (1956) 676—677.
[4] L. KOVÁCS: A note on regular rings, *Publ. Math. Debrecen,* **4** (1956) 465—468.
[5] W. D. MUNN—R. PENROSE: A note on inverse semigroups, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **51** (1955) 396—399.
[6] J. v. NEUMANN: On regular rings, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **22** (1936) 707—713.
[7] G. B. PRESTON: Inverse semi-groups, *J. London Math. Soc.* **29** (1954) 396—403.
[8] RÉDEI L.: *Algebra I,* Budapest 1954.
[9] ŠT. SCHWARZ: О максимальных идеалах в теории полугрупп, *Czechoslovak Math. J.* **3** (**78**), (1953) 139—153.
[10] O. STEINFELD: Über die Quasiideale von Halbgruppen, *Publ. Math. Debrecen,* **4** (1956) 262—275.
[11] SZÁSZ G.: *Bevezetés a hálóelméletbe,* Budapest 1959.
[12] G. THIERRIN: Sur les homogroupes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **234** (1952) 1519—1521.
[13] В. В. Вагнер: Обобщенные группы, Доклады Акад. наук, **84** (1952) 1119—1122.

(Beérkezett: 1960. VII. 18)

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézete