

MEGJEGYZÉS A FELTÉTELES KINEMATIKAI KAPCSOLATOKKAL RENDELKEZŐ RÚDSZERKEZETEK SZÁMÍTÁSÁHOZ

PÁCZELT ISTVÁN*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

HERPAI BÉLA**

[Beérkezett 1979. február 14-én]

Jelen munka a belső és külső feltételes kinematikai (geometriai) kapcsolatokkal rendelkező rúdszerkezetek szilárdsági viszonyainak számítását — elsőrendű elmélet alapján — a végső ismeretlenek tekintetében különböző kvadratikus programozási feladatra vezeti vissza. Síkbeli szerkezeteknél fellépő belső feltételes kinematikai kapcsolatok osztályozása után a rúdszerkezet geometriai mátrix rangjának figyelembevételével elemzi az elmozdulás és erőmódszerre alapozott programozási feladatokat. Kimutatja, hogy az elmozdulásmódszer alkalmazási köre szélesebb mint az erőmódszeré, mivel ez utóbbival csak statikailag határozatlan rúdszerkezetek vizsgálhatók. Végezetül az elmozdulásmódszerre alapozott programozási feladatra — belső feltételes kinematikai kapcsolat esetén számszerű példákat mutat be.

I. Bevezetés

Az építészet, gépészet egyes szerkezeteinek (berendezéseinek, gépeinek) szilárdsági viszonyait jól nyomon követhetjük a szerkezet rúdszerkezetként történő modellezésével.

A szerkezetek egy része

I. rugalmas-szilárd alapon, támaszokon nyugszik oly módon, hogy az alaptól a terhelés hatására el is válhatik, azaz köztük a kapcsolat egyoldalú; másik részüknél

II. a szerkezet néhány eleme között gyártásból, szerelésből adódóan kezdeti hézag is van, illetve

III. kapcsolatuk korlátozott teherbírású.

Ezeket az eseteket általánosabb megfogalmazásban definiált rúdszerkezetek közé sorolhatjuk. Nevezetesen az olyan rúdszerkezetet, amelyiken a rudak kapcsolódási helyeinek legalább egyikén az oda befutó rúdvégek elmozdulásai és szögelfordulásai között egyenlőtlenségi feltételek írhatók fel, *belső feltételes kinematikai (geometriai) kapcsolatokkal rendelkező — vagy belső feltételes kinematikai kapcsolatú — rúdszerkezetnek* nevezzük (pl. a II. eset).

Amennyiben a belső feltételes kinematikai kapcsolatokon kívül a megtámasztásoknál is felírhatók elmozdulásra és szögelfordulásra vonatkozó

* Dr. Páczelt István, 3531 Miskolc, Győri kapu 37, III/3.

** Dr. Herpai Béla, 3529 Miskolc, Kulich Gy. u. 13, IV/5.

egyenlőtlenségek, úgy belső és külső feltételes kinematikai kapcsolatú vagy egyszerűbben *feltételes kinematikai kapcsolatú rúdszerkezet*ről beszélünk.

Az olyan rúdszerkezetet, amelyen csak a megtámasztásoknál írhatók fel elmozdulásra és szögelfordulásra vonatkozó korlátok, *feltételes külső kinematikai kapcsolatú rúdszerkezet*nek nevezzük (pl. az I. eset).

Az olyan rúdszerkezetet, amelyen a megtámasztásnál (vagy a belső rúdkapcsolatoknál) (vagy mindkettőnél) a támasztóerőrendszerre (vagy a belső erőkre) (vagy mindkettőjükre) egyenlőtlenségi korlátok írhatók fel, *feltételes külső (vagy belső) (vagy külső és belső) dinamikai (szilárdsági) kapcsolatú rúdszerkezet*nek nevezzük (III. eset).

Amikor a rúdszerkezeten kinematikai és dinamikai korlátok is szerepelnek, *feltételes kapcsolatú rúdszerkezet*ről beszélünk.

A fenti szerkezetek szilárdsági viszonyainak tisztázása a matematikai programozás módszereinek felhasználásával történhetik.

Az egyoldalú kapcsolatokkal rendelkező rúdszerkezetek kvadratikusan programozással történő megoldásával foglalkozó első munkák a 60-as évek végére tehetőek [1–3]. A kutatók mind a mai napig figyelmet fordítanak e területre (lásd az irodalomjegyzékben [4], [5] alatt felsoroltakat stb.) egyrészt elvi, másrészt számítástechnikai problémák tisztázása céljából. Így például: korlátozott teherhívású kapcsolatokkal rendelkező szerkezeteket vizsgál a [6] munka; a nagyelmozdulások hatását vizsgálja — másodrendű elmélet felhasználásával — a [7] tanulmány.

Jelen munkánkban feltételezzük, hogy a szerkezet anyaga lineárisan rugalmas, szilárdságtani viszonyai kis elmozdulásokkal és alakváltozásokkal számoló ún. elsőrendű elmélettel [8] leírhatók.

A II. típusú feladatokkal elsősorban gépészeti szerkezeteken pl. szerzőszámgépeken találkozhatunk. Általában ezek a berendezések ideálisan-rugalmas anyagúnak tekinthetők, továbbá a terhelés hatására fellépő elmozdulások, deformációk kicsinyek. A szerkezeti elemek közötti kezdeti hézag nagysága befolyásolja a szerkezetben kialakuló feszültségi állapotot, az egyes elemek deformációját, az elemek együtt dolgozását, a szerkezet dinamikai viselkedését.

Az alábbiakban a terhelést statikusnak tekintjük, az egyoldalú kapcsolatokkal rendelkező rendszer dinamikájának kérdéseivel csak egy későbbi tanulmányban fogunk foglalkozni.

2. A rúdszerkezetek alapegyenlete

Az ideálisan rugalmas anyagú, feltételes kapcsolatok nélküli rúdszerkezet alapegyenlete [8] alapján

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}^* \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (1)$$

alakú, ahol \mathbf{q} — a csomóponti terhek, \mathbf{t} — a rúdmenti kinematikai terhek vektora, \mathbf{u} — a csomóponti elmozdulások, \mathbf{s} — a rudak belső erőinek vektora, \mathbf{G} — a szerkezet geometriai mátrixa, \mathbf{F} — a szerkezet hajlékonysági mátrixa.

Az (1) egyenlet első sora a csomópontok egyensúlyát, a második sora az elmozdulások kompatibilitását fejezi ki.

Az \mathbf{u} , \mathbf{q} vektorok koordinátái a viszonyítási (globális) koordináta-rendszerben az \mathbf{s} , \mathbf{t} — a rudakhoz kötött helyi koordináta-rendszerben értelmezettek.

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az (1) alapegyenletet a

$$\min \left\{ \Pi_1 = \frac{1}{2} \mathbf{s}^* \mathbf{F} \mathbf{s} + \mathbf{s}^* \mathbf{t} \mid \mathbf{G}^* \mathbf{s} + \mathbf{q} = \mathbf{0} \right\} \quad (2)$$

kvadratikus programozási feladatként is tárgyalhatjuk, azaz keressük a $\Pi_1 = \Pi_1(\mathbf{s})$ minimumát a

$$\mathbf{G}^* \mathbf{s} + \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3)$$

mellékfeltétel, illetve korlátozás mellett.

A programozási feladathoz tartozó Lagrange-féle függvény

$$L_1 = L_1(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \Pi_1(\mathbf{s}) + \mathbf{u}^*(\mathbf{G}^* \mathbf{s} + \mathbf{q}), \quad (4)$$

míg a minimum feltételből adódóan a

$$\frac{\partial L_1}{\partial \mathbf{u}^*} = \mathbf{0} = \mathbf{G}^* \mathbf{s} + \mathbf{q} \quad (5a)$$

egyensúlyi egyenlethez,

$$\frac{\partial L_1}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{0} = \mathbf{G} \mathbf{u} + \mathbf{F} \mathbf{s} + \mathbf{t} \quad (5b)$$

kompatibilitási egyenlethez jutunk.

3. A programozási feladat megfogalmazása feltételes kinematikai kapcsolatok esetében

3.1. A mellékfeltételek

Amint már az előzőekben említettük, külső és belső feltételes kinematikai kapcsolatokról beszélünk.¹

3.1.1. A KFK kapcsolatokat lényegében két osztályba lehet sorolni. Az első esetben a támaszokat, a szilárd alapot merevnek tekinthetjük a rúdszerkezethez képest, míg a második esetben rugalmasnak. Mivel az (1) egyenlet

¹ A továbbiakban használni fogjuk az alábbi jelöléseket
Külső feltételes kinematikai kapcsolat = KFK kapcsolat;
Belső feltételes kinematikai kapcsolat = BFK kapcsolat.

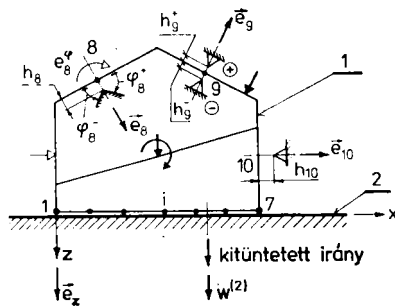
olyan rúdszerkezetre érvényes, ahol a terhelés csomópontokban hat, a rugalmas alap hatását, annak a rúdszerkezettel való együttlőgözését csak közelítőleg, diszkrét pontokban a feladat természetéből következő kitüntetett irányban (pl. az egyik test normálisa) vesszük figyelembe.

Ehhez egyrészt a tartószerkezet rugalmas alappal érintkező részén fiktív csomópontokat veszünk fel, másrészt a rugalmas alap elmozdulás-állapotát leíró differenciálegyenletet, integrálegyenletet vagy valamilyen variációs elv alkalmazásakor a szóban forgó funkcionált is diszkrétizáljuk, a tartószerkezet kérdéses tartószakaszán megtalálható valóságos és fiktív csomópontok figyelembevételével. Feltételezzük, hogy a tartószerkezet és az alap között a súrlódás elhanyagolható, így közöttük csak normális irányú nyomás jön létre. A támaszokat is minden esetben súrlódásnélkülinek tekintjük.

A rúdszerkezet és a rugalmas alap vagy a támaszok között terheletlen állapotban kezdeti hézag, rés lehetséges.

Jelölje a hézag értékeiből alkotott vektort a globális rendszerben $\mathbf{h}^* = [h_1, \dots, h_N]$, ahol N a rugalmas alap és a rúdszerkezet közötti kölcsönhatást figyelembe vevő pontok számának és a támaszoknál jelentkező korlátozások számának összege. Megemlítjük, a \mathbf{h} vektor elemei nemcsak távolságok, hanem szögek is lehetnek, így a kezdeti hézagot, mint az (1)-ben szereplő \mathbf{u} elmozdulást, \mathbf{s} belső erőt — általánosított értelemben kell használnunk.

Meilékfeltételek (korlátozások) felírása céljából vizsgáljuk meg az 1. ábrán vázolt szerkezetet. A 2 jelű rugalmas talaj és rúdszerkezet között az érintkezés-elválás feltételét 7 db pontban ellenőrizzük. A rúdszerkezet 8, 9, 10 jelű pontjai, keresztmetszetei a terhelés hatására a feltüntetett merev támaszokra is támaszkodhatnak. A 8 jelűnél a keresztmetszet \vec{e}_8 irányú eltolódása és szögelfordulása egy, illetve két irányban van korlátozva, a 9 jelűnél az \vec{e}_9 irányú elmozdulás van korlátok közé szorítva, míg a 10 jelű keresztmetszetenél annak vízszintes irányú elmozdulására írhatunk fel korlátot. Az egységvektorok által meghatározott irányt *kitüntetett irány*nak fogjuk nevezni.



1. ábra. Külső feltételes kinematikai kapcsolatokkal rendelkező rúdszerkezet, 2 — rugalmas talaj, 1 — merev támasz

Jelölje a rúdszerkezet 1–7 jelű pontjainak \vec{e}_z irányú elmozdulását $\mathbf{w}^{(1)}$, míg a rugalmas alap azonos koordinátájú pontjainak ugyanezen irányú elmozdulását $\mathbf{w}^{(2)}$, ($\mathbf{w}^{(1)*} = [w_1^{(1)}, \dots, w_7^{(1)}]$ (1) ↔ (2)).

A támaszoknál levő keresztmetszetek \vec{e}_j ($j = 8, 9, 10$) irányú elmozdulását, illetve a 8-as keresztmetszet \vec{e}_8^g irányú szögelfordulását $\mathbf{d}^{(1)}$ vektor foglalja magába. A $\mathbf{w}^{(1)}$, $\mathbf{d}^{(1)}$ vektorok a rúdszerkezet elmozdulásállapotát jellemző \mathbf{u} csomóponti elmozdulásvektorból megfelelően választott \mathbf{A}^w , \mathbf{A}_+^d mátrixok segítségével

$$\mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{A}^w \mathbf{u}, \quad \mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{A}_+^d \mathbf{u} \quad (6a, b)$$

összefüggéseken keresztül számolhatók.

Ily módon a rúdszerkezet

$$\mathbf{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{(1)} \\ \mathbf{d}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^w \\ \mathbf{A}_+^d \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{u} \quad (7)$$

vektoraival jellemzett elmozdulásaira kell felírni az egyoldalú kapcsolatokból származó mellékfeltételeket, korlátokat. Mint látni fogjuk, a felírható korlátok száma a $\mathbf{k}^{(1)}$ vektor méretét meghaladhatja.

Vegyük sorra ezeket.

A rugalmas alap és a rúdszerkezet között az i jelű pontban érintkezés lép fel, ha

$$g_i^w = w_i^{(2)} - w_i^{(1)} + h_i^w = 0; \quad p_i^w \geq 0 \quad (8a)$$

és rés van, ha

$$g_i^w = w_i^{(2)} - w_i^{(1)} + h_i^w > 0; \quad p_i^w = 0, \quad (8b)$$

vagyis, bármely pontban áll a

$$p_i^w g_i^w = 0, \quad i = 1, \dots, 7, \quad (8c)$$

feltétel, ahol p_i^w – a rúdszerkezet és az alap között fellépő érintkezési erő.

Bevezetve a relatív hézagok \mathbf{g}^w , a kezdeti hézagok \mathbf{h}^w , továbbá \mathbf{p}^w érintkezési erők vektorát, a (8a–c) feltételeket tömörebb formában is felírhatjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^w &= \mathbf{w}^{(2)} - \mathbf{w}^{(1)} + \mathbf{h}^w \geq \mathbf{0}; \\ \mathbf{p}^w &\geq \mathbf{0}; \quad \mathbf{p}^{w*} \mathbf{g}^w = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (9a-c)$$

ahol

$$\mathbf{g}^{w*} = [g_1^w, \dots, g_7^w], \quad \mathbf{p}^{w*} = [p_1, \dots, p_7] \text{ stb.}$$

Merev támaszoknál (lásd 1. ábra) a 8 jelűnél az \vec{e}_8 irányú elmozdulásra, $-\vec{e}_8$ irányú reakcióerőre

$$g_8 = h_8 - d_8 \geq 0; \quad F_8 \geq 0; \quad g_8 \cdot F_8 = 0 \quad (10a-c)$$

összefüggések írhatók fel.

Az e_8^e irányban egyrészt

$$g_8^+ = \varphi_8^+ - d_8^e \geq 0; \quad M_8^+ \geq 0; \quad g_8^+ \cdot M_8^+ = 0 \quad (11a-c)$$

+ jelű korlátozások, másrészt

$$g_8^- = \varphi_8^- + d_8^e \geq 0; \quad M_8^- \geq 0; \quad g_8^- \cdot M_8^- = 0 \quad (12a-c)$$

— jelű korlátozások fogalmazhatók meg.

A 9 jelűnél \vec{e}_9 irányban egyrészt

$$g_9^+ = h_9^+ - d_9 \geq 0; \quad F_9^+ \geq 0; \quad g_9^+ \cdot F_9^+ = 0, \quad (13a-c)$$

másrészt

$$g_9^- = h_9^- + d_9 \geq 0; \quad F_9^- \geq 0; \quad g_9^- \cdot F_9^- = 0, \quad (14a-c)$$

míg végezetül a 10 jelűnél

$$g_{10} = h_{10} - d_{10} \geq 0; \quad F_{10} \geq 0; \quad g_{10} \cdot F_{10} = 0 \quad (15a-c)$$

írható.

Itt F_8, \dots, F_{10} a támaszoknál keletkező reakcióerőket, nyomatékokat jelentik. Ezeket a + indexnél vagy index nélküli esetben a kitüntetett iránnyal ellentétesek, míg — indexnél azonos irányúak. Definiálva

$$\mathbf{r}^{+*} = [F_8, M_8^+, F_9^+, F_{10}]; \quad \mathbf{r}^{-*} = [M_8^-, F_9^-] \quad (16a, b)$$

$$\mathbf{r}^* = [\mathbf{r}^{+*} \mid \mathbf{r}^{-*}] \quad (17)$$

támasztóerők vektorát, a

$$\mathbf{g}_+^{r*} = [g_8, g_8^{e+}, g_9^+, g_{10}]; \quad \mathbf{g}_-^{r*} = [g_8^e, g_9^-] \quad (18a, b)$$

$$\mathbf{g}^{r*} = [\mathbf{g}_+^{r*} \mid \mathbf{g}_-^{r*}] \quad (19)$$

relatív hézag, továbbá

$$\mathbf{h}_+^{r*} = [h_8, \varphi_8^+, h_9^+, h_{10}]; \quad \mathbf{h}_-^{r*} = [\varphi_8^-, h_9^-] \quad (20a, b)$$

$$\mathbf{h}^{r*} = [\mathbf{h}_+^{r*} \mid \mathbf{h}_-^{r*}] \quad (21)$$

kezdeti hézag vektorokat, a

$$\mathbf{d}_+^{(1)*} = [d_8, d_8^e, d_9, d_{10}] = \mathbf{u}^* \mathbf{A}_+^{d*}; \quad (22a)$$

$$\mathbf{d}_-^{(1)*} = [d_8^e, d_9] = \mathbf{u}^* \mathbf{A}_-^{d*} \quad (22b)$$

elmozdulásvektorokat, a (10a–15c) feltételek helyett tömör formában

$$\mathbf{g}^r = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_+^r \\ \mathbf{g}_-^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_+^r \\ \mathbf{h}_-^r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_+^d \\ -\mathbf{A}_-^d \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{h}^r - \mathbf{A}^r \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \quad (23a)$$

$$\mathbf{r} \geq \mathbf{0}; \quad \mathbf{r}^* \mathbf{g}^r = 0 \quad (23b, c)$$

alakban írhatók.

Ily módon a rugalmas alappal és merev támaszokkal rendelkező rúdszerkezetre vonatkozó korlátozások

$$\mathbf{g}' = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^w \\ \mathbf{g}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^w \\ \mathbf{h}^r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}^w \\ \mathbf{A}^r \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{(2)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad (24a)$$

$$\mathbf{g}' = \mathbf{h} - \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{w} \geq \mathbf{0}, \quad (24b, c)$$

$$\bar{\mathbf{p}}^* = [\mathbf{p}^{w*} \mid \mathbf{r}^*] \geq \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{p}}^* \mathbf{g}' = 0$$

alakban írhatók fel.

Megjegyzés 1. Amennyiben minden támasznál + és – jelű korlátozások lépnek fel, úgy $\mathbf{A}_+^d = \mathbf{A}_-^d$.

Megjegyzés 2. Ha a támaszok rugalmasak, akkor (23a) helyett

$$\mathbf{g}^r = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_+^r \\ \mathbf{h}_-^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{d}_+^r \\ -\mathbf{d}_-^r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_+^d \\ -\mathbf{A}_-^d \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{h}^r + \mathbf{d}^r - \mathbf{A}^r \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \quad (25)$$

áll, ahol $\mathbf{d}_+^r, \mathbf{d}_-^r$ – a + és – jelű támaszok elmozdulása a kitüntetett irányban.

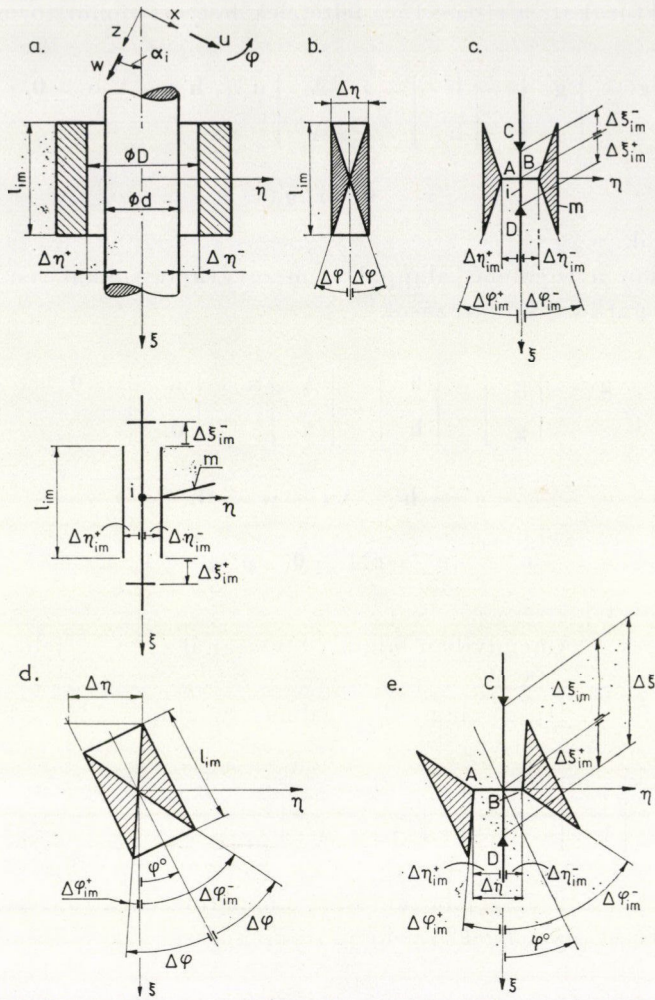
3.1.2. BFK kapcsolatok. Ezeknek a kapcsolatoknak két osztályát különböztetjük meg.

1. A kapcsolódási helyre egyetlen olyan rúd fut be, amely kezdeti hézaggal illeszkedik.

2. A kapcsolódási helyre több egymástól független olyan rúd fut be, amely kezdeti hézaggal illeszkedik.

Síkbeli szerkezetet feltételezve, a hézaggal illeszkedő rúd (továbbiakban 2-es rúd) szempontjából az alábbi kapcsolatokat fogjuk megkülönböztetni.

1.1. Vezeték I. Olyan hézaggal illeszkedő vezeték-hüvely párról van szó, amikor a d átmérőjű vezetéken a $D > d$ belső átmérőjű hüvely korlátozott mértékben elcsúszhatik, illetve a vezeték ξ hossz tengelyére merőlegesen η irányban meglévő $\Delta\eta = D - d$ játék miatt $\Delta\varphi = \pm \Delta\eta/l_{im}$ nagyságú szögelfordulási játékkal is elfordulhat, miközben nyomatékot nem visz át. Ez az i főcsomópontba befutó m „szabadvégű” rúdnál $\Delta\varphi_{im}^\pm = \Delta\eta/l_{im}$ kezdeti szögelfordulási hézagot okoz (2a ábra).



2. ábra. Vezeték I és a kezdeti hézag értelmezése. a) i — vezeték, m — hüvely, b) $\Delta\varphi$ értelmezése, c) Vezeték I kapcsolat mechanikai sémája, d) a hüvely tengelye φ^0 szöget zár be a ξ tengellyel: $\Delta\varphi_{im}^+$, $\Delta\varphi_{im}^-$ értelmezése, e) Vezeték I kapcsolat sémája $\varphi^0 \neq 0$ esetében

A $\Delta\eta$ alapú és l_{im} magasságú téglalap 2b ábra szerinti bevonalkázásával (melyeket merevnek tekintünk) a szögelfordulási játék jól érzékeltethető. Az η irányban ezen háromszögeket egymástól $-\Delta\eta_{im}^+ + \Delta\eta_{im}^-$ távolságra eltolva, majd a kapott AB szakaszt merevnek feltételezve, továbbá az i fűcsomópontoknál a ξ irányú egymástól $\Delta\xi_{im}^+ + \Delta\xi_{im}^-$ távolságra levő (háromszögekkel jelölt) C és D korlátokat az azok közé képzeltek merev rúdból felépítve, az i és m pontok (rúdkeresztmetszetek) közötti Vezeték I típusú feltételes kinematikai kapcsolatot jelölő (érezékeltető) sematikus ábrához jutunk (2c ábra).

Amennyiben a hüvely tengelye nem párhuzamos a ξ tengellyel, közöttük φ° szög van, akkor a 2d ábra alapján felírható kezdeti szögelfordulási hézag

$$\Delta\varphi_{im}^+ = -\varphi^\circ + \frac{\Delta\eta \cos \varphi^\circ}{l_{im}},$$

$$\Delta\varphi_{im}^- = \varphi^\circ + \frac{\Delta\eta \cos \varphi^\circ}{l_{im}},$$

ahol

$$\Delta\eta = \frac{D-d}{\cos \varphi^\circ}.$$

A ξ és η tengelyek irányába eső $\Delta\xi^\pm$, $\Delta\eta^\pm$ kezdeti hézagok a *Vezeték I típusú* kapcsolat 2e ábrán vázolt sematikus ábráját eredményezik.

A 2c és 2e ábrákon levő *Vezeték I*-nél feltüntetett kezdeti hézagok pozitívak. Negatívnak (túlfedésnek akkor tekintendők, amikor a kottázásnál a nyíl hegye a „talp vonáshoz képest” az ábrán szereplőtől ellentétes irányba mutat el. Pl. $\Delta\eta_{im}^+$ esetén, amennyiben \leftarrow helyett \rightarrow kotta áll, úgy $\Delta\eta_{im}^+ < 0$ -nak tekintendő. Ez azt jelenti, hogy a 2e ábrán szereplő *CD* rúdszakaszhoz kötött $\xi\eta$ koordinátarendszer az *A* ponttól balra helyezkedik el.

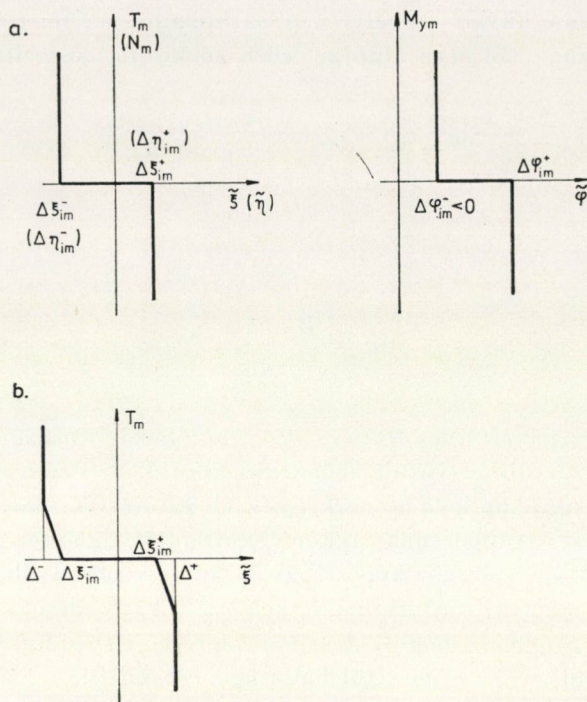
A jelen modellezésben, a vezeték és a hüvely az *i* főcsomópont (keresztmetszet), környezetében a kinematikai feltételek felírása szempontjából merevnek tekintett. Ebből adódóan $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ következképpen $\Delta\varphi$ -nek mindig pozitívnak kell lennie bármilyen $\Delta\xi_{im}^+$, ..., $\Delta\varphi_{im}^-$ kezdeti hézag kombinációjánál. A vezeték és hüvely közötti rugalmas deformáció figyelembevétele a térbeli rugalmasságtani feladat megoldását is igényelné. Mivel a rudak hossz méreteihez képest a most tárgyalt vezeték-hüvely méretei, illetve a későbbiekben tárgyalt kapcsolatok geometriai méretei lényegesen kisebbek, a rudak kapcsolódását merevnek tekintett szerkezeti elemek előzetesen nem ismert együttdolgozásával kívánjuk modellezni. A bemutatott módszerek, általánosíthatók a jóval bonyolultabb esetre is.

A kapcsolatban szereplő merev elemek következtében, a fellépő kapcsolati erők és nyomaték a kezdeti hézag eltűnése után bármekkora értéket felvehetnek. Jelen esetben az *m* jelű rúdvégre átadódó ξ , η és *y* irányú T_m , N_m , M_{ym} erők és nyomaték a

$$\tilde{\xi} = \xi_i - \xi_m, \quad \tilde{\eta} = \eta_i - \eta_m,$$

$$\tilde{\varphi} = \varphi_i - \varphi_m$$

függvényében a 3a ábra szerint változnak ($M_{ym} = M_{ym}(\tilde{\varphi})$ esetén $\Delta\varphi_{im}^- < 0$ előfeszítést vettünk fel.)



3. ábra. Jelleggörbék. a) Ideálisan merevedő kapcsolatnál fellépő belső erők (nyomaték) $\tilde{\xi} = \xi_i - \xi_m$ elmozdulás (szögelfordulás) $\tilde{\varphi} = \varphi_i - \varphi_m$ diagramok (i — főcsomópont, m — befutó rúdvég jele, T_m (stb.) az m -re ható erő (stb.) a 2. ábrán vázolt $\xi\eta y$ koordináta-rendszerben). b) Ideálisan rugalmas-merevedő kapcsolat belső erő-elmozdulás diagramja

Ezeket a kapcsolati erő-elmozdulás diagramokat ideálisan merevedő (bezáruló) kapcsolatokhoz tartozó jelleggörbéűnek nevezi az irodalom [6]. Amennyiben a kapcsolódó szerkezeti elemek bizonyos mértékű rugalmassággal rendelkeznek, úgy az előbbi diagramok helyett a 3b ábrán feltüntetett ideálisan rugalmas-merevedő kapcsolatot leíró jelleggörbék tartoznak. Ez utóbbi számításával jelen munka *Melléklet* című részében foglalkozunk.

A 2. ábra alapján felírható kinematikai feltételek, korlátok egyrészt

$$g_{\xi im}^+ = \xi_i + \Delta\xi_{im}^+ - \xi_m \geq 0, \quad (26a, b)$$

$$g_{\xi im}^- = -\xi_i + \Delta\xi_{im}^- + \xi_m \geq 0,$$

$$g_{\eta im}^+ = \eta_i + \Delta\eta_{im}^+ - \eta_m \geq 0, \quad (27a, b)$$

$$g_{\eta im}^- = -\eta_i + \Delta\eta_{im}^- + \eta_m \geq 0,$$

másrészt

$$g_{\varphi im}^+ = \varphi_i + \Delta\varphi_{im}^+ - \varphi_m \geq 0, \quad (28a, b)$$

$$g_{\varphi im}^- = -\varphi_i + \Delta\varphi_{im}^- + \varphi_m \geq 0,$$

ahol

$$\xi_i = u_i \sin \alpha_i + w_i \cos \alpha_i, \quad (29a, b)$$

$$\eta_i = u_i \cos \alpha_i - w_i \sin \alpha_i,$$

$$\xi_m = u_m \sin \alpha_i + w_m \cos \alpha_i, \quad (30a, b)$$

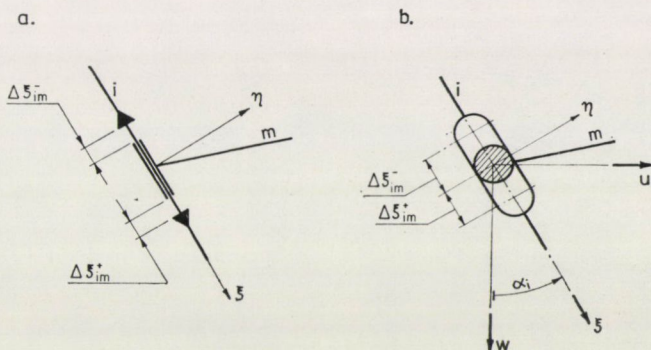
$$\eta_m = u_m \cos \alpha_i - w_m \sin \alpha_i,$$

u_i, w_i, φ_i (u_m, w_m, φ_m) az i (m) jelű csomópontok vízszintes és függőleges eltolódása, illetve szögelfordulása a 2. ábrán feltüntetett pozitív irányokban.

1.2. *Vezeték II.* Nyomatékot is átadó hézagnélküli vezeték, amelynél a hüvely mozgása korlátozott (4a ábra). Felírható feltételek (26a, b), továbbá a $\Delta\eta_{im}^+ = \Delta\eta_{im}^- = 0$ -ból követően

$$\eta_i = \eta_m, \quad \varphi_i = \varphi_m. \quad (31a, b)$$

A (31a, b) feltételeket célszerű a csatolt rendszer, vagyis a G előállításánál már figyelembe venni.



4. ábra. a) Vezeték II, b) Csúszka I

Megjegyzés 3. A Vezeték I. és II. típusoknál lehetséges olyan eset is, amikor a csúszkának tengelyirányú mozgása csak egyik irányban van korlátozva. Ebben az esetben értelemszerűen a (26a, b) közül valamelyiket nem kell szerepeltetni korlátként.

1.3. *Csúszka I.* A 2-es rúd a többi rúdhöz csúszkán keresztül illeszkedik, a csúszka mozgása korlátozott. A 4b ábra alapján kinematikai korlátokként a (26, b), (31a) szerepelnek.

1.4. *Csúszka II.* A csúszka a vezetékben játékkal illeszkedik, mozgása korlátozott (5. ábra). Kinematikai korlátokként egyrészt a (26a, b) alattiakat, másrészt a (27a, b) alattiakat írhatjuk fel.

1.5. *Csúszka III.* A csúszka a vezetékben nincs rögzítve, mozgása korlátozott (6. ábra). A (26a, b) és a (27b) egyenlőtlenségek a kinematikai korlátok.

1.6. *Csúszka IV.* A 2-es rúd végpontjában a $\Delta\xi_{im}^-$ kezdeti hézag „eltűnése” után keletkező rúderő, nyomóerő. A nyíróerő tetszőleges, a hajlító-

nyomaték zérus. Így kinematikai korlátként a (26 b), (31 a) alattiak szerepelnek (7. ábra).

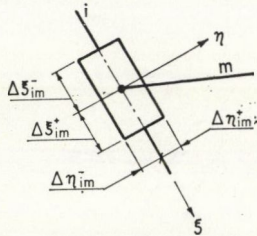
(31a) szerepelnek (7. ábra).

2.1. 1.1—1.6 alattiak kombinációi.

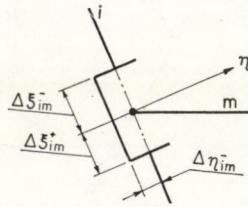
2.2. *Vezeték III.* Az átmenő tengely hézag nélkül illeszkedik, vezetékbeli elmozdulása $\left\{ \begin{matrix} \text{egyirányban} \\ \text{kétirányban} \end{matrix} \right\}$ korlátozott (8. $\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$ ábra).

Az érvényben levő korlátok $\left\{ \begin{matrix} (26a), (31a, b) \\ (26a, b), (31a, b) \end{matrix} \right\}$ a vizsgált csatlakozásnak megfelelően.

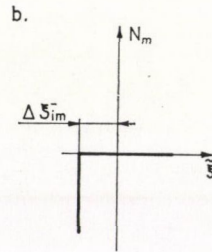
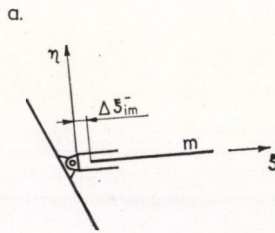
2.3. *Vezeték IV.* Hézaggal illeszkedő átmenő tengely, vezetékek irányú elmozdulása $\left\{ \begin{matrix} \text{egyirányban} \\ \text{kétirányban} \end{matrix} \right\}$ korlátozott. A felírható korlátok $\left\{ \begin{matrix} (26a), (27a, b), (28a, b) \\ (26a-28b) \end{matrix} \right\}$ a 9. $\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$ ábrán vázolt csatlakoznak megfelelően.



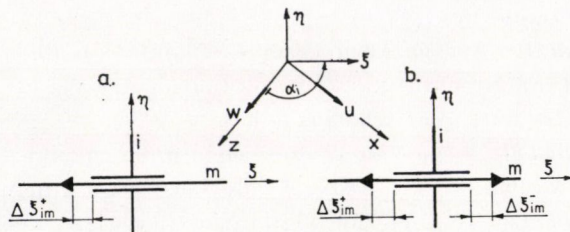
5. ábra. Csúszka II



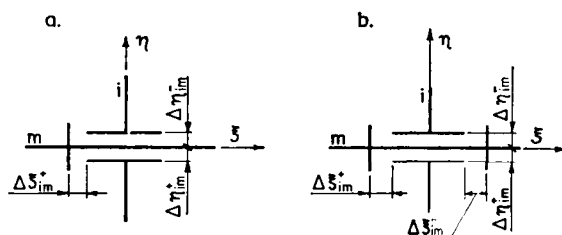
6. ábra. Csúszka III



7. ábra. Csúszka IV, a) szerkezeti kialakítás, b) $N_m = N_m(\xi)$ rúderő függvény



8. ábra. Vezeték III



9. ábra. Vezeték IV

Látható, hogy páronként a Vezeték II. és III-nál, illetve a Vezeték I. és IV-nél felírható korlátok egy és ugyanazok. Szerkezetbeli különbség a csatlakozási helyre befutó rudak számában van, továbbá a szerkezeti elemek i, m jeleinek felcserélésében.

A vizsgálat folytatása céljából vegyük a Vezeték I-et, mint a legtöbb korlátozást előíró csatlakozást.

Bevezetve a (28a, b) alapján a csatlakozás ún. fő csomópontjához (i jelű) tartozó

$$\mathbf{T}_i^j = \begin{bmatrix} \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

transzformáló mátrixot, a

$$\hat{\mathbf{u}}_i^* = [\xi_i \eta_i \varphi_i], \quad \mathbf{u}_i^* = [u_i w_i \varphi_i] \quad (i \leftrightarrow m)$$

elmozdulás vektorokat a

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{im}^{j+*} &= [\Delta \xi_{im}^+ \Delta \eta_{im}^+ \Delta \varphi_{im}^+], \\ \mathbf{g}_{im}^{j+*} &= [g_{\xi_{im}}^+ g_{\eta_{im}}^+ g_{\varphi_{im}}^+] \end{aligned} \quad (+ \leftrightarrow -)$$

kezdeti és relatív hézag vektorokat, a (29a–30b) helyett

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{T}_i^j \mathbf{u}_i, \quad \hat{\mathbf{u}}_m = \mathbf{T}_i^j \mathbf{u}_m, \quad (33a, b)$$

a (26a–28b) helyett

$$\mathbf{g}_{im}^j = \begin{bmatrix} g_{jm}^{j+} \\ g_{im}^{j-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{im}^{j+} \\ \mathbf{h}_{im}^{j-} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_i^j & \mathbf{T}_i^j \\ \mathbf{T}_i^j & -\mathbf{T}_i^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (34)$$

írható.

Más típusú csatlakozásoknál a (34) egyenlőtlenség természetesen a felírható korlátoknak megfelelően módosul. Amennyiben az i jelű csomóponthoz (csatlakozási helyhez) többfajta csatlakozáson keresztül futnak be a rudak, úgy összegyűjtve a korlátokat egy vektor egyenlet-egyenlőtlenségbe, formailag

$$\mathbf{g}_i^\Sigma = \mathbf{h}_i^\Sigma - \mathbf{A}_i^\Sigma \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \quad (35)$$

írható fel, ahol \mathbf{u} az összeillesztett rúdszerkezet (csatolt rendszer) elmozdulásvektora.

Merev csatlakozásnál a rúdvégek elmozdulásai nyilván azonosak, a csatlakozások néhány fajtájánál az eltolódások között fennálló lineáris kapcsolatból következően az egyik rúdvégi eltolódás valamelyik koordinátája már nem szerepel az \mathbf{u} -ban, a megmaradók igen. (Pl. a (31a) szerinti feltételnél az i és m csomópontok esetén az \mathbf{u} vektorban u_i, w_i, u_m szerepelnek, w_m már nem, hiszen az (29b), (30b) alapján w_m függ az előzőektől.)

Végezetül az egész rúdszerkezetre vonatkozó belső kapcsolatokból származó kinematikai korlátok a (34) felhasználásával a következő alakot nyerik:

$$\mathbf{g}^j = \mathbf{h}^j - \mathbf{A}^j \mathbf{u} \geq \mathbf{0}. \quad (36a)$$

Hasonló megfontolásból, mint a 3.1.1. pontban láttuk, a g_i^j relatív hézag eltűnése a rudak közötti j_i erő keletkezését vonja maga után, azaz

$$g_i^j j_i = 0 \quad i = 1, \dots, B, \quad (36b, c)$$

vagyis

$$\mathbf{g}^j = \mathbf{0}, \quad \mathbf{j}^* \mathbf{g}^j = 0,$$

ahol \mathbf{j} — az egyoldalú kapcsolatoknál keletkező belső erők vektora, B — a belső korlátok száma.

Ily módon a KFK és BFK kapcsolatokkal rendelkező rúdszerkezeteknél felírható korlátok

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^w \\ \mathbf{g}^r \\ \mathbf{g}^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^w \\ \mathbf{h}^r \\ \mathbf{h}^j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}^w \\ \mathbf{A}^r \\ \mathbf{A}^j \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{(2)} \\ \mathbf{d}^r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad (37a)$$

azaz

$$\mathbf{g} = \mathbf{h} - \mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{d} \geq \mathbf{0},$$

továbbá

$$\mathbf{p}^* = [\mathbf{p}^{w*}, \mathbf{r}^*, \mathbf{j}^*] \geq \mathbf{0}^*, \quad \mathbf{p}^* \mathbf{g} = 0. \quad (37b, c)$$

3.2. A programozási feladat felállítása

Láttuk, hogy a (2) programozási feladat megoldása az (1) egyenletrendszer megoldását szolgálhatja. A BFK és KFK kapcsolatokból adódóan az (1)-ben a \mathbf{q} helyett $\mathbf{q} - \mathbf{A}^* \mathbf{p}$ szerepel, vagyis a rúdszerkezet csomópontjainak egyensúlyát az alapról, támaszokról átadódó egyelőre ismeretlen támasztóerők, a belső kapcsolatoknál keletkező belső erők figyelembevételével kell keresnünk, miközben a (37a–c) feltételeknek is fenn kell állniuk.

Tételezzük fel, hogy ismerjük a $\Pi_c^w = \Pi_c^w(\mathbf{p}^w)$, $\Pi_c^r = \Pi_c^r(\mathbf{r})$ kvadratikus alakokat, az alap és a rugalmas támaszok kiegészítő energiáját. Ekkor a Castigliano-tétel értelmében $\partial \Pi_c^w / \partial \mathbf{p}^w = \mathbf{w}^{(2)}$, $\partial \Pi_c^r / \partial \mathbf{r} = \mathbf{d}^r$, mivel a testre ható \mathbf{p}^w , (\mathbf{r}) egybeesik $\mathbf{w}^{(2)}$, (\mathbf{d}^r) pozitív irányával.

Tétel 1. A (37a–c) feltételekkel jellemzett KFK és BFK kapcsolatú rúdszerkezet elmozdulás mezejét és feszültségi állapotát a

$$\min \{ \Pi_2 = \Pi_1 + \Pi_c^w + \Pi_c^r + \mathbf{p}^* \mathbf{h} \mid \mathbf{G}^* \mathbf{s} = \mathbf{q} - \mathbf{A}^* \mathbf{p} \text{ --- } \mathbf{0}, \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \} \quad (38)$$

kvadratikus programozási feladat megoldása szolgáltatja.

Bizonyítás: A (38) feladathoz rendelt

$$L_2 = L_2(\mathbf{s}, \mathbf{u}, \mathbf{p} \geq \mathbf{0}) = \Pi_1(\mathbf{s}) + \Pi_c^w(\mathbf{p}^w) + \Pi_c^r(\mathbf{r}) + \mathbf{p}^* \mathbf{h} + \mathbf{u}^*(\mathbf{G}^* \mathbf{s} + \mathbf{q} - \mathbf{A}^* \mathbf{p}) \quad (39)$$

Lagrange-féle függvényből kiindulva (\mathbf{u} — Lagrange-féle multiplikátor) a matematikai programozás Khun–Tucker tétele értelmében [9] a

$$\frac{\partial L_2}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{G} \mathbf{u} + \mathbf{F} \mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{0} \quad (40)$$

kompatibilitási egyenlethez, a

$$\frac{\partial L_2}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{G}^* \mathbf{s} + \mathbf{q} - \mathbf{A}^* \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (41)$$

egyensúlyi egyenlethez, a

$$\frac{\partial L_2}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{h} - \mathbf{A} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \Pi_c^w}{\partial \mathbf{p}^w} \\ \frac{\partial \Pi_c^r}{\partial \mathbf{r}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{g} \geq \mathbf{0}; \quad \mathbf{p}^* \frac{\partial L_2}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \quad (42a-c)$$

egyoldalú kapcsolatot kifejező egyenlőtlenség-egyenlőséghez jutunk, amelyek egybeesnek a feltételes kinematikai kapcsolatú rúdszerkezet állapotát leíró egyenlet-egyenlőtlenségi rendszerrel. Q. e. d.

3.3. A (39) programozási feladat megoldása elmozdulásmódszer segítségével

Az elmozdulásmódszer alkalmazásához fel kell tételeznünk, hogy az F hajlékonysági mátrix nem elfajuló: $\det F \neq 0$, azaz a rúdszerkezet merev rudakat nem tartalmaz. Ekkor a (40)-ből kifejezhetjük a belső erők vektorát

$$s = -F^{-1}Gu - F^{-1}t, \quad (43)$$

majd a kapott értéket (41)-be betéve és átrendezve a

$$Ku = \bar{q} - A^*p \quad (44)$$

egyenlethez jutunk, ahol

$$K = G^*F^{-1}G; \quad \bar{q} = q - G^*F^{-1}t \quad (45a, b)$$

a rúdszerkezet merevségi mátrixa, redukált terhelési vektora.

A (44), (42a–c) alapján felírható megoldandó egyenlet-egyenlőtlenségi rendszer a

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K & A^* \\ -A & 0 \end{bmatrix}}_{M^0} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\bar{q} \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial \Pi_c}{\partial p} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} = 0; \quad (46a, b)$$

$$g \geq 0; \quad p \geq 0; \quad g^*p = 0; \quad (46c-e)$$

ahol

$$\left[\frac{\partial \Pi_c}{\partial p} \right]^* = \left[\left(\frac{\partial \Pi_c^w}{\partial p^w} \right)^* \mid \left(\frac{\partial \Pi_c^r}{\partial r} \right)^* \mid 0^* \right], \quad M^0 -$$

pozitív szemidefinit mátrix.

A Khun–Tucker-féle feltételek felhasználásával könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a (46) feladat az alábbi programozási feladatból is származtatható:

$$\min \left\{ \Pi_p \mid g = h - Au + \frac{\partial \Pi_c}{\partial p} \geq 0, \quad p \geq 0 \right\}, \quad (47)$$

ahol $\Pi_p = \frac{1}{2} u^* Ku - u^* \bar{q} -$ a rúdszerkezet potenciális energiája. A (47)-hez tartozó Lagrange-féle függvény

$$L_3 = L_3(u, p \geq 0) = \Pi_p(u) - \Pi_c^w(p^w) - \Pi_c^r(r) - p^*(h - Au),$$

aminek a programozási feladat megoldása folyamán a nyeregpontját keressük

$$\left(\frac{\partial L_3}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad -\frac{\partial L_3}{\partial \mathbf{p}} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{p}^* \frac{\partial L_3}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{0} \right),$$

vagyis a minimax feladat

$$\min_{\mathbf{u}} \max_{\mathbf{p} \geq \mathbf{0}} \{ \Pi_p(\mathbf{u}) - \Pi_c^w(\mathbf{p}^w) - \Pi_c'(\mathbf{r}) - \mathbf{p}^*(\mathbf{h} - \mathbf{A}\mathbf{u}) \}. \quad (48)$$

Mielőtt továbblépnénk, vizsgáljuk meg, hogy a \mathbf{K} mátrixnak milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie ahhoz, hogy az elsőrendű elmélet alkalmazható legyen a (46) feladat megoldására, annak ellenére, hogy a szóban forgó feladatot ezen elmélet segítségével építettük fel. Erre a kérdésre a \mathbf{K} mátrix rangja és struktúrája (az alábbiakból kiderül mit fogunk ezen érteni) ad feleletet.

A \mathbf{K} merevségi mátrix $\varrho(\mathbf{K})$ rangját a \mathbf{G} geometriai és \mathbf{F} hajlékonysági mátrix rangja határozza meg:

$$\varrho(\mathbf{K}) = \varrho(\mathbf{G} * \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}) = \min (\varrho(\mathbf{G}), \varrho(\mathbf{F}^{-1})).$$

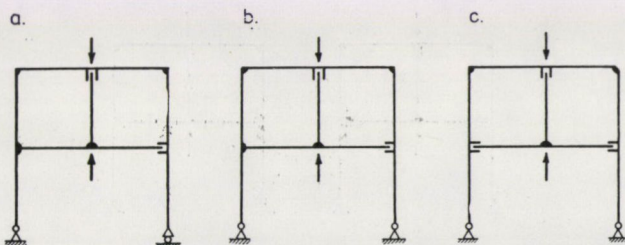
Mivel \mathbf{F} nem elfajuló, úgy

$$\varrho(\mathbf{K}) = \varrho(\mathbf{G}),$$

vagyis a \mathbf{K} invertálhatóságát \mathbf{G} rangja dönti el.

Ha $\varrho(\mathbf{G}) = \min(m, n)$ — ahol m, n a \mathbf{G} mátrix sorainak, oszlopainak száma, továbbá $m = n$, akkor statikailag határozott szerkezetéről, illetve $m > n$ esetben statikailag határozatlan szerkezetéről beszélünk. Ezekben az esetekben \mathbf{K} invertálható. (Lásd pl. a 10a, b ábrákon vázolt szerkezeteket.)

Ha $\varrho(\mathbf{G}) = \min(m, n)$ és $m < n$ a szerkezet statikailag túlhatározott. Ebben az esetben a KFK kapcsolatú rúdszerkezetnél (lásd pl. 1. ábrán vázolt szerkezetet) mindig kiválasztható a \mathbf{K} -ből olyan legnagyobb méretű elnem-fajuló mátrix, amelyhez tartozó fiktív támaszokkal rendelkező alapszerkezet



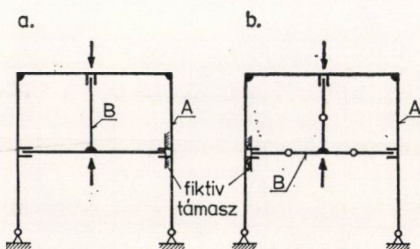
10. ábra. Rúdszerkezet a) statikailag határozott, b) statikailag egyszeresen határozatlan c) statikailag túlhatározott

merevtestszerű mozgást nem végez. Vagyis egy és ugyanazon szerkezethez általában több alapszerkezet rendelhető.

A BFK kapcsolatú rúdszerkezetnél (lásd pl. 10c ábrán vázoltat) lehetnek olyan esetek is amikor $\varrho(\mathbf{G}) < \min(m, n)$. Ha a BFK kapcsolatok nem volnának „beépítve” a rúdszerkezetbe, akkor a szerkezetet már csak másodrendű elmélettel lehetne megoldani [7]. Amennyiben a kapcsolatban szereplő kezdeti hézagok mértéke nem haladja meg a rúdszerkezetnél fellépő u elmozdulások mértékét (amelyekről eleve feltételeztük, hogy kicsinyek a rúdszerkezet hossz méreteihez képest), úgy a programozási feladat megoldásának megkeresésére abban az esetben sort lehet keríteni, ha a rúdszerkezetet a kinematikai kapcsolatokban felvett fiktív támaszokkal statikailag határozott vagy határozatlan alszerkezetekre lehet bontani. A fiktív támaszok tényleges elmozdulását — mint valamelyik rúdvég elmozdulását — a programozási feladat megoldásából nyerjük. Így pl. a 11a ábrán vázolt szerkezet a 10c ábrán vázolthoz tartozó A és B jelű alszerkezeteket tünteti fel, amelyek rendre statikailag — határozatlan (A), illetve — határozott (B) szerkezetek. A 11b ábrán vázolt szerkezetet a jelen tanulmányban tárgyalt módszerrel megoldani már nem tudjuk, mivel a B alszerkezet statikailag túlhatározott.

Természetesen a KFK + BFK kapcsolatú rúdszerkezetnél a fenti esetek bármelyike előfordulhat.

A fentiekből következően a BFK kapcsolatú szerkezetnél a programozási feladat felállításának tehát csak akkor van értelme, ha a \mathbf{K} struktúrája biztosítja azt, hogy a \mathbf{K} -ből kiválasztható olyan invertálható rész, amelyen kívüli oszlopok — jobbról történő szorzás esetén — a BFK kapcsolatokba befutó szabad-, vagy legalábbis az elmozdulás némely koordinátájában szabad — rúdvégek (fiktív támaszok) elmozdulásaival vannak szorozva. A KFK + BFK kapcsolatú rúdszerkezetnél amennyiben a \mathbf{K} mátrix szóban forgó oszlopai az előbbieken meghatározott elmozdulásokon kívül a külső támaszokkal érintkező vagy a terhelés hatására majdan érintkező alszerkezet merevtestszerű elmozdulását leíró csomóponti elmozdulás koordinátákkal vannak szorozva, a programozási feladat megoldását meg lehet kísérelni. A kvadratikus progra-



11. ábra. Alszerkezetek felhasználása a szilárdságtani feladat megoldására. a) 10c ábrán vázolt tartószerkezet felbontása A és B alszerkezetre. b) Példa a lineáris elmélettel meg nem oldható szerkezetre (a fiktív támaszsal ellátott B alszerkezet statikailag túlhatározott)

mozás elméletében bizonyított, hogy ha a feladatnak van megoldása, akkor csak egyetlen megoldás létezik [9]. A megoldás létezésére a \mathbf{K} mátrix rangja, struktúrája nem ad feleletet, az a rúdszerkezetre ható erőrendszerrel, és a feltételes kapcsolatokról függ. Előfordulhat, hogy a KFK és BFK kapcsolatok által megengedett erők, nyomatékok a külső erőrendszerrel nem képesek egyensúlyi erőrendszert alkotni. Ekkor a feladatnak nyilván nincs megoldása.

Ezek után térjünk vissza a (47) programozási feladat, vagyis a (46) egyenlet-egyenlőtlenségi rendszer megoldásának vizsgálatához. A megoldást kétféle módszerrel keressük.

I. módszer

Az \mathbf{u} elmozdulást egyrészt két pozitív vektor különbségként állítjuk elő

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-, \quad \mathbf{u}^+ \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}^- \geq \mathbf{0}, \quad (49)$$

majd (46a) az egyenletet vele egyenértékű két egyenlőtlenséggel helyettesítjük és az egyenlőséget pótlólagosan bevezetett $\mathbf{g}^+ \geq \mathbf{0}, \mathbf{g}^- \geq \mathbf{0}$ változókkal állítjuk helyre.

Másrészt, mivel

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial II_c}{\partial \mathbf{p}} \right)^* &= \left[\left(\frac{\partial II_c^w}{\partial \mathbf{p}^w} \right)^* \mid \left(\frac{\partial II_c^r}{\partial \mathbf{r}} \right)^* \mid \mathbf{0}^* \right] = \\ &= [\mathbf{p}^{w*} \mathbf{H}^{(2)w} + \mathbf{f}^{(2)w*} \mid \mathbf{r}^* \mathbf{H}^{(2)r} + \mathbf{f}^{(2)r*} \mid \mathbf{0}^*] = \mathbf{p}^* \mathbf{H}^{(2)} + \mathbf{f}^{(2)*} \end{aligned} \quad (50)$$

alakban felírható, ahol $\mathbf{H}^{(2)} = \mathbf{H}^{(2)*}$ — hatásmátrix, $\mathbf{f}^{(2)}$ — az alapra és a rugalmas támaszokra működő külső ismert terhelésből származó, a feltételes kapcsolatok kitüntetett irányába eső elmozdulás, a (46a, b) helyett

$$-\underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{A}^* \\ \mathbf{K} & -\mathbf{K} & \mathbf{A}^* \\ \mathbf{A} & -\mathbf{A} & -\mathbf{H}^{(2)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}^1} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}^1} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \\ \mathbf{h} + \mathbf{f}^{(2)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}^1} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{g}^+ \\ \mathbf{g}^- \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}^1} = \mathbf{0},$$

írható, azaz

$$\mathbf{y}^1 = \mathbf{b}^1 - \mathbf{M}^1 \mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}^{1*} \mathbf{y}^1 = 0, \quad (51a-c)$$

ahol \mathbf{M}^1 negatív szemidefinit mátrix, vagyis a

$$\min \{ \psi(\mathbf{x}^1) = \mathbf{x}^{1*} \mathbf{y}^1 \mid \mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}^1 = \mathbf{b}^1 - \mathbf{M}^1 \mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0} \} \quad (52)$$

programozási feladat kvadratikus, aminek megoldása, ha létezik, különféle modifikált szimplex eljárással — végezzék számú báziscsere elvégzése után — megkapható [9].

II. módszer

A eset: $\det \mathbf{K} \neq 0$

A (46a) egyenletéből kifejezett \mathbf{u} -t, behelyettesítve a (46b) egyenletbe, a

$$\mathbf{g} = (\mathbf{h} - \mathbf{f}^{(1)}) + \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{p} + \frac{\partial \Pi_c}{\partial \mathbf{p}} \geq \mathbf{0}, \quad (53)$$

összefüggést kapjuk, ahol $\mathbf{H}^{(1)} = \mathbf{A} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}^* = \langle \mathbf{H}^{(1)w} \mid \mathbf{H}^{(1)r} \mid \mathbf{H}^{(1)j} \rangle$ — kvázi diagonál felépítésű — pozitív definit — hatásmátrix, $\mathbf{f}^{(1)} = \mathbf{A} \mathbf{K}^{-1} \tilde{\mathbf{q}}$ — a feltételes kinematikai kapcsolatokban külső terhelésből származó elmozdulás:

$$\mathbf{f}^{(1)*} = [\mathbf{f}^{(1)w*} \mid \mathbf{f}^{(1)r*} \mid \mathbf{f}^{(1)j*}].$$

Ekkor az (50) figyelembevételével, a (46c–e) és az (53) alapján megfogalmazható programozási feladat

$$\min \left\{ \chi(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^* (\mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(2)}) \mathbf{p} + \mathbf{p}^* (\mathbf{h} + \mathbf{f}^{(2)} - \mathbf{f}^{(1)}) \mid \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \right\}, \quad (54)$$

mivel

$$\mathbf{g} = (\mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(2)}) \mathbf{p} + \mathbf{h} + \mathbf{f}^{(2)} - \mathbf{f}^{(1)} \geq \mathbf{0},$$

$$\mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{g}^* \mathbf{p} = 0.$$

B eset: $\det \mathbf{K} = 0$

Legyen a \mathbf{K} mátrixból kiválasztott legnagyobb méretű elnempfajuló mátrix \mathbf{K}_{11} . Ekkor (46a) egyenlet az alábbi alakra írható át:

$$-\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_1 \\ \tilde{\mathbf{q}}_{11} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{w*} & \mathbf{A}_1^{r*} & \mathbf{A}_1^{j*} \\ \mathbf{A}_{11}^{w*} & \mathbf{A}_{11}^{r*} & \mathbf{A}_{11}^{j*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}^w \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{j} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (55)$$

A kapott mátrixegyenlet első sorából kifejezett \mathbf{u}_1 -t, behelyettesítve a második sorába, nyerjük az \mathbf{u}_F elmozdulással kapcsolatos csomópontok (fiktív támaszok) egyensúlyát kifejező egyenletet

$$\mathbf{D} \mathbf{u}_F + \mathbf{G}_F^* \mathbf{p} - \mathbf{q}_F = \mathbf{0}, \quad (56)$$

ahol

$$\mathbf{D} = \mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{21} \mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{12}, \quad (57a)$$

$$\mathbf{G}_F^* = \mathbf{A}_{11}^* - \mathbf{K}_{21} \mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1^*, \quad (57b-c)$$

$$\mathbf{q}_F = \tilde{\mathbf{q}}_{11} - \mathbf{K}_{21} \mathbf{K}_{11}^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_1.$$

Itt $\mathbf{D} \mathbf{u}_F$ — a belső erőkből, $\mathbf{G}_F^* \mathbf{p}$ — a feltételes kinematikai kapcsolatokból, míg \mathbf{q}_F az ismert külső terhelésből származó erőt jelenti. Amennyiben

nem a KFK kapcsolatoknál (csomópontoknál) vesszük fel a fiktív támaszokat, úgy $\mathbf{A}_{11}^w = \mathbf{A}_{11}^r = \mathbf{0}$, továbbá, ha BFK kapcsolatnál \mathbf{u}_F nem tartalmazza a csatlakozás fő csomópontjába befutó szabad rúdvég elmozdulását (ahol fiktív támasz is lehetne, lásd 11a ábra), akkor \mathbf{A}_{11}^f is zérus mátrix.

A megmaradó (46b) egyenletbe az \mathbf{u}_F -n keresztül kifejezett \mathbf{u} -t helyettesítjük. Eredményül kapjuk:

$$-\mathbf{G}_F \mathbf{u}_F + \mathbf{H} \mathbf{p} + \mathbf{t}_F = \mathbf{g} \geq \mathbf{0}, \quad (58)$$

ahol

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(2)}, \quad \mathbf{H}^{(1)} = \mathbf{A}_I \mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{A}_I^* \quad (59a, b)$$

– hatásmátrixok

$$\mathbf{t}_F = \mathbf{h} + \mathbf{f}^{(2)} - \mathbf{f}^{(1)}, \quad \mathbf{f}^{(1)} = \mathbf{A}_I \mathbf{K}_{11}^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_I \quad (59c, d)$$

ismert elmozdulások.

Vagyis a (46a, b) helyett a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{G}_F^* \\ -\mathbf{G}_F & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_F \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{q}_F \\ \mathbf{t}_F \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (59e)$$

egyenlet írható, továbbá az *I. módszernél* tett átalakításokat megismételve a programozási feladat

$$\min \{ \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^* \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} = \mathbf{b} - \mathbf{M} \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}, \quad (60)$$

ahol

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D} & \mathbf{D} & -\mathbf{G}_F^* \\ \mathbf{D} & -\mathbf{D} & \mathbf{G}_F^* \\ \mathbf{G}_F & -\mathbf{G}_F & -\mathbf{H} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\mathbf{q}_F \\ \mathbf{q}_F \\ \mathbf{t}_F \end{bmatrix}.$$

Lényeges a gyakorlati számítások elvégzése szempontjából észrevennünk azt, hogy az \mathbf{M} negatív szemidefinit mátrix mérete kisebb, mint az (52) feladatban szereplő \mathbf{M}^1 -é, azaz a modifikált szimplex algoritmus alkalmazása most előnyösebbnek mutatkozik a kevesebb számú ismeretlen miatt. A (60)-as feladat hátrányaként róhatjuk fel a \mathbf{K}_{11}^{-1} mátrixon keresztül kifejezhető mátrixok, vektorok előállítását. Amennyiben \mathbf{K}_{11}^{-1} a számítógép memóriájában tárolható, úgy az \mathbf{M} és \mathbf{b} előállítása nem okoz nagy problémát, ellentétes esetben a [10] munka 1.3. pontjában leírtak szerint járhatunk el, vagyis sorra, pl. Gauss-féle elimináció segítségével megoldjuk a

$$\mathbf{K}_{11} \mathbf{B} = \mathbf{K}_{12}, \quad \mathbf{K}_{11} \mathbf{C} = \mathbf{A}_I^*, \quad \mathbf{K}_{11} \mathbf{l} = \tilde{\mathbf{q}} \quad (61a-c)$$

egyenleteket — (61a, b) esetben több jobb oldallal — majd a kapott megoldásokat rendre megszorozzuk \mathbf{K}_{21} -el, a \mathbf{D} , \mathbf{G}_F^* , \mathbf{q}_F , míg \mathbf{A}_1 -el a $\mathbf{H}^{(1)}$, $\mathbf{f}^{(1)}$ előállításánál.

A (60)-as programozási feladat megoldásával az (55)-be történő visszahelyettesítés után

$$\mathbf{u}_1 = -\mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1^* \mathbf{p} + \mathbf{K}_{11}^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_1 - \mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{12} \mathbf{u}_F$$

vagyis (61a—c) figyelembevételével,

$$\mathbf{u}_1 = -\mathbf{C}\mathbf{p} + \mathbf{l} - \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}_F$$

míg a teljes elmozdulás

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{p} - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}} \\ -\mathbf{E} \end{bmatrix} \mathbf{u}_F + \begin{bmatrix} \mathbf{l} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (61d)$$

összefüggéssel számítható. Itt \mathbf{E} egységmátrix.

Látható, hogy $\bar{\mathbf{B}}$, \mathbf{C} mátrixok és \mathbf{l} vektor elraktározásával a programozási feladat megoldása után a rugalmas rúdszerkezet általánosított csomóponti elmozdulása a \mathbf{K}_{11} mátrix újbóli invertálása nélkül igen könnyen számítható, vagyis a javasolt módszer igen hatékonynak bizonyul konkrét számításokkor. Mivel a programozási feladatból a \mathbf{p} automatikusan „kijön”, nincs szükség előjelének ismételt értelmezésére, a \mathbf{C} mátrix már eleve „tudja” azt.

3.4. A (39) programozási feladat megoldása erőmódszer segítségével

A módszer alkalmazásához fel kell tételeznünk, hogy $\varrho(\mathbf{G}) = \min(m, n)$, $m > n$; vagyis alkalmazási lehetőségei szűkebbek, mint az elmozdulásmódszeré.

Legyen a \mathbf{G} mátrixból kiválasztott elnempfajuló mátrix \mathbf{G}_1 , a megmaradó részt jelölje \mathbf{G}_2 . Ennek megfelelően felbontjuk az \mathbf{F} mátrixot és \mathbf{t} vektort is.

Ekkor a (40), (41) helyett azt írhatjuk,² hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 \mathbf{u} + \mathbf{F}_1 \mathbf{s}^1 + \mathbf{t}^1 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{G}_2 \mathbf{u} + \mathbf{F}_2 \mathbf{s}^2 + \mathbf{t}^2 &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (62a, b)$$

illetve

$$\mathbf{G}_1^* \mathbf{s}^1 + \mathbf{G}_2^* \mathbf{s}^2 + \mathbf{q} - \mathbf{A}^* \mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (63)$$

A (63)-ból kifejezett \mathbf{s}^1 -t behelyettesítve (62a)-ba az \mathbf{u} elmozdulást \mathbf{s}^2 és \mathbf{p} függvényeként kapjuk meg, majd az elmozdulásnak (62b)-be történő helyettesítésével a következő összeférhetőségi egyenlethez jutunk

$$\mathbf{S} \mathbf{s}^2 - \mathbf{Q}^* \mathbf{p} + \tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{0}, \quad (64)$$

² \mathbf{s}^i , \mathbf{t}^i ($i = 1, 2$) vektoroknál i indexként szerepel nem hatványozásra utal. Ez a jelölési szabály a továbbiakban is érvényes.

ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{F}_2 + \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1^{-1} \mathbf{F}_1 \mathbf{G}_1^{*-1} \mathbf{G}_2, \\ \mathbf{Q}^* &= \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1^{-1} \mathbf{F}_1 \mathbf{G}_1^{*-1} \mathbf{A}^* \end{aligned} \quad (65a, b)$$

$$\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{t}^2 - \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1^{-1} (\mathbf{t}^1 - \mathbf{F}_1 \mathbf{G}_1^{*-1} \mathbf{q}), \quad (66)$$

továbbá (42a) egyenlőtlenség helyett az (50) kifejezést is felhasználva

$$-\mathbf{Q} \mathbf{s}^2 + \mathbf{H} \mathbf{p} + \tilde{\mathbf{h}} - \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (67)$$

írható. Itt

$$\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}}^{(1)} + \mathbf{H}^{(2)}, \quad \hat{\mathbf{H}}^{(1)} = \mathbf{A} \mathbf{G}_1^{-1} \mathbf{F}_1 \mathbf{G}_1^{*-1} \mathbf{A}^* \quad (68a, b)$$

$$\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{h} + \mathbf{A} \mathbf{G}_1^{-1} (\mathbf{t}^1 - \mathbf{F}_1 \mathbf{G}_1^{*-1} \mathbf{q}) + \mathbf{f}^{(2)}. \quad (69)$$

Vagyis a (40)–(42a–c) helyett a megoldandó egyenlet-egyenlőtlenségi rendszer

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{S} & -\mathbf{Q}^* \\ -\mathbf{Q} & \hat{\mathbf{H}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \mathbf{s}^2 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{t}} \\ \tilde{\mathbf{h}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (70a, b)$$

$$\mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{g} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{p}^* \mathbf{g} = 0, \quad (70c-e)$$

azaz keressük a

$$\min \left\{ [\mathbf{s}^{2*} | \mathbf{p}^*] \left[\frac{1}{2} \mathbf{B} [\mathbf{s}^{2*} | \mathbf{p}^*]^* + [\tilde{\mathbf{t}}^* | \tilde{\mathbf{h}}^*]^* \right] \middle| \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \right\} \quad (70f)$$

programozási feladat megoldását.

A megoldás kereséséhez tisztázzuk a \mathbf{B} mátrix definit voltát.

Bevezetve az

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}_1^{-1} \mathbf{F}_1 \mathbf{G}_1^{*-1}$$

mátrixot, amely az $\mathbf{F}_1, \mathbf{G}_1$ el nem fajuló mátrixok miatt pozitív definit, a (65a, b) alatti mátrixok

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{F}_2 + \mathbf{G}_2 \mathbf{R} \mathbf{G}_2^*, \\ \mathbf{Q}^* &= \mathbf{G}_2 \mathbf{R} \mathbf{A}^*, \end{aligned} \quad (71a, b)$$

illetve a (68b) képletszám alatt található $\hat{\mathbf{H}}^{(1)}$ hatásmátrix

$$\hat{\mathbf{H}}^{(1)} = \mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{A}^* \quad (71c)$$

alakban írhatók fel.

Így

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{F}_2 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{H}^{(2)} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \mathbf{G}_2 \\ \hline -\mathbf{A} \end{array} \right] \mathbf{R} [\mathbf{G}_2^* | -\mathbf{A}^*]. \quad (72)$$

Mivel a \mathbf{G}_2 , \mathbf{A} mátrixok elfajulóak, továbbá $\mathbf{x}^* \mathbf{F}^{(2)} \mathbf{x} > 0$, $\mathbf{x}^* \mathbf{H}^{(2)} \mathbf{x} > 0$ bármilyen $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ -nál, úgy a \mathbf{B} mátrix pozitív definit. Ezek után vizsgáljuk a (70f) feladat megoldását.

I. módszer. Felbontva \mathbf{s}^2 vektort két pozitív vektor különbségére, $\mathbf{s}^2 = \mathbf{s}^{2+} - \mathbf{s}^{2-}$, $\mathbf{s}^{2+} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{s}^{2-} \geq \mathbf{0}$, illetve a (70a) egyenletet az (52) feladatnál tett átalakításokhoz hasonlóan egyenlőtlenségekkel behelyettesítve az alábbi programozási feladat fogalmazható meg.

$$\min \{ \Theta(\mathbf{y}^2) = \mathbf{x}^{2*} \mathbf{y}^2 \mid \mathbf{y}^2 \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}^2 = \mathbf{b}^2 - \mathbf{M}^2 \mathbf{y}^2 \geq \mathbf{0} \}, \quad (73)$$

ahol

$$\mathbf{M}^2 = \begin{bmatrix} -\mathbf{S} & \mathbf{S} & \mathbf{Q}^* \\ \mathbf{S} & -\mathbf{S} & -\mathbf{Q}^* \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{Q} & -\hat{\mathbf{H}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{s}^{2+} \\ \mathbf{s}^{2-} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^{2+} \\ \mathbf{g}^{2-} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^2 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{t}} \\ -\tilde{\mathbf{t}} \\ \tilde{\mathbf{h}} \end{bmatrix}.$$

II. módszer. Felhasználva, hogy \mathbf{S} pozitív definit mátrix, a (70a)-ból \mathbf{s}^2 kifejezhető

$$\mathbf{s}^2 = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Q}^* \mathbf{p} - \mathbf{S}^{-1} \tilde{\mathbf{t}}, \quad (74)$$

és (70b) helyett

$$\tilde{\mathbf{H}} \mathbf{p} - \tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{g}} \geq \mathbf{0}, \quad (75)$$

írható, amihez (70c–e) figyelembevételével a

$$\min \{ \omega(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^* \mathbf{g} \mid \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \mathbf{g} = \mathbf{H} \mathbf{p} - \mathbf{f} \geq \mathbf{0} \} \quad (76)$$

programozási feladat rendelhető, ahol³

$$\tilde{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}} - \mathbf{Q} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Q}^*, \quad \tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{h}} + \mathbf{Q} \mathbf{S}^{-1} \tilde{\mathbf{t}}. \quad (77a, b)$$

³ Igazolható, hogy $\tilde{\mathbf{H}}$ pozitív definit (lásd (70)–(72)), írhatjuk, hogy

$$0 < \mathbf{x}^* \mathbf{B} \mathbf{x} = [\mathbf{x}^{1*} \quad \mathbf{x}^{2*}] \begin{bmatrix} \mathbf{S} & -\mathbf{Q}^* \\ -\mathbf{Q} & \hat{\mathbf{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^{1*} \mathbf{S} \mathbf{x}^1 - 2 \mathbf{x}^{1*} \mathbf{Q}^* \mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^{2*} \hat{\mathbf{H}} \mathbf{x}^2.$$

Legyen bármilyen \mathbf{x} esetében

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Q}^* \mathbf{x}^2,$$

vagyis

$$0 < \mathbf{x}^2 (\hat{\mathbf{H}} - \mathbf{Q} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Q}^*) \mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^{2*} \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{x}^2,$$

azaz állításunkat igazoltuk.

(70a) egyenlet — $\mathbf{p} \equiv \mathbf{0}$ -nál — a rúdszerkezet erőmódszerrel történő megoldásának végső klasszikus egyenlete.

Konkrét számításoknál az I. és II. módszer közötti választásban a (73) és (76) feladatban szereplő ismeretlenek száma nyújt támpontot. A (76) feladatot előnyben kell részesítenünk a (73)-mal szemben, annak ellenére, hogy az \mathbf{S} mátrix invertálására is szükség van, mivel az ismeretlenek száma a (76)-ban a szerkezet statikai határozatlansági fokától függően lényegesen kevesebb lehet, mint a (73)-ban.

*

A fentiekben megfogalmazott programozási feladatok összehasonlításából látható, hogy az elmozdulásmódszer alkalmazása lényegesen egyszerűbbnek tűnik, mint az erőmódszeré. Az utóbbinál jóval több számítás után érünk el ahhoz a programozási feladathoz, amelyre már a modifikált szimplex-féle módszerek előnyösen alkalmazhatók.

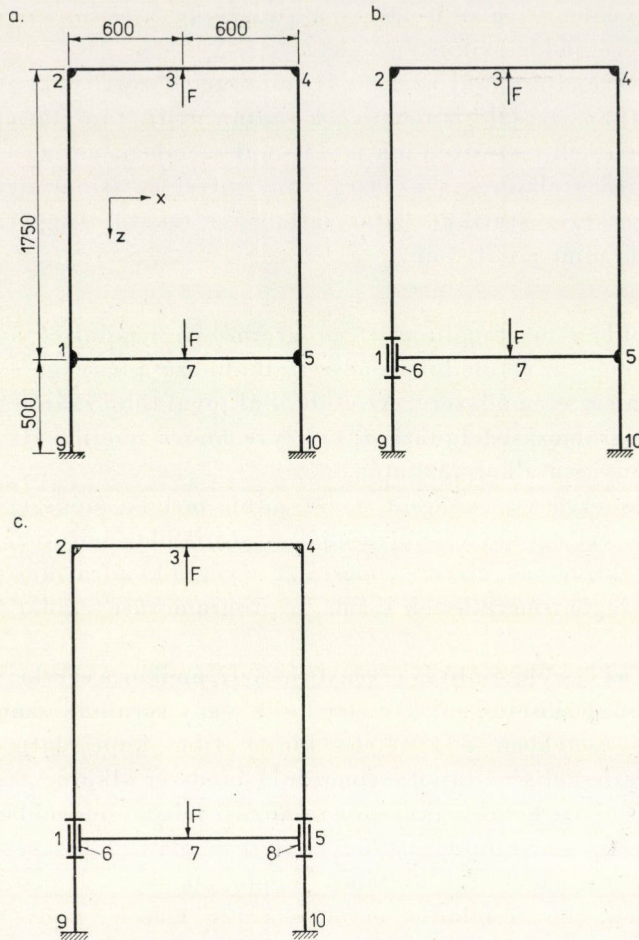
Általános érvényű tanácsot nehéz adni, melyik módszer alkalmazása az előnyösebb; ezt egyrészt befolyásolják a statikailag határozatlan rúdszerkezet \mathbf{u} és \mathbf{s}^2 vektorainak méretei, másrészt a végső kvadratikus programozási feladatban szereplő ismeretlenek száma, a programozási feladat felállításának számításigénye.

Nyilván az összehasonlítás érvényét veszti, amikor a szerkezet geometriai mátrixának rangja kisebb, mint oszlopainak vagy sorainak száma. Mint láttuk, bizonyos esetekben a feltételes kinematikai kapcsolatú rúdszerkezet elmozdulása és feszültségállapota, elmozdulásmódszer alkalmazásával az (52), (54) vagy (60) alatti kvadratikus programozási feladat megoldásán keresztül határozható meg. Amennyiben az (52) és (60) feladat felállításához a \mathbf{K} rangjának és struktúrájának tekintetében megfogalmazott szükséges feltételek nem teljesülnek, úgy a feladat megoldására a másod- vagy harmadrendű elméletet kell felhasználni.

4. „Vezeték I” kapcsolattal rendelkező BFK kapcsolatú síkbeli rúdszerkezetre vonatkozó néhány példa

Gépészeti berendezésekben egyik leggyakrabban előforduló kapcsolat a „Vezeték I”. Vizsgáljuk a 12 ábrán vázolt szerkezetet. A 12a ábrán levőnél BFK kapcsolat nincs, míg a 12b és 12c ábrákon feltüntetett szerkezetnél az 1 jelű főcsomópont és a 6 jelű „szabad” rúdvég, illetve az 5 jelű főcsomópont és a 8 jelű „szabad” rúdvég között írhatók fel a kinematikai feltételek.

A 12b ábrán feltüntetett szerkezet \mathbf{K} mátrixának rangja megegyezik sorainak (oszlopainak) számával. A 12c ábrán levő szerkezet 6–8 csomópontú rúdja merevtestszerű elmozdulással is rendelkezik és így \mathbf{K} merevségi mátrixának rangja, kisebb sorainak számánál. Nevezetesen, síkbeli alak-

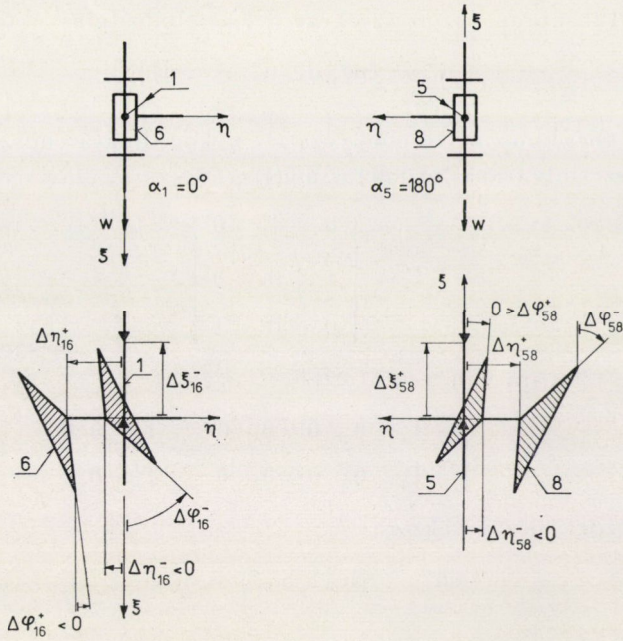


12. ábra. Állványszerkezet. A függőleges oszlopok keresztmetszeteinek geometriai adatai: felület $A = 3000 \text{ mm}^2$, y tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték $I_y = 3 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$, a vízszintes rudaknál $A = 5000 \text{ mm}^2$, $I_y = 5 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$. Rugalmassági modulus $E = 2,07 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$. Terhelő erő $F = 200 \text{ kN}$. a) Feltételes kapcsolat nélküli rúdszerkezet, b) BFK kapcsolatú, alszerkezet nélküli rúdszerkezet, c) BFK kapcsolatú, 6–7–8-as csomópontú merevtestszerű mozgást végző alszerkezettel rendelkező rúdszerkezet

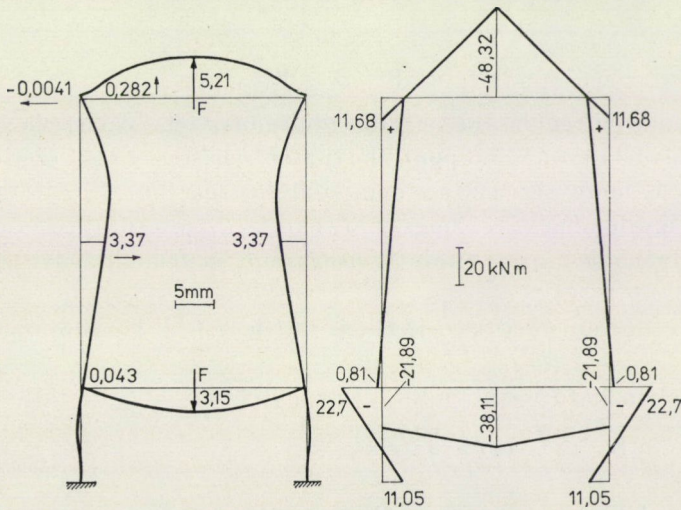
változásokat feltételezve, az elmozdulásvektor csomópontonként három koordinátával rendelkezik, vagyis \mathbf{K} (24,24) típusú mátrix, míg rangja 21.

A 13. ábra a BFK kapcsolatoknál felvett $\xi\eta$ koordinátarendszereket, a kezdeti hézagokat tünteti fel abban az esetben, amikor a vezeték hüvelyének tengelye nem párhuzamos a vezeték ξ tengelyével.

A 12a ábrán vázolt statikailag határozatlan szerkezet elmozdulásállapotát és hajlítónyomatéki ábráját a 14. ábra tartalmazza. (A hajlítónyomatéki ábra a szerkezet alakváltozás előtti középvonalához viszonyítva a tartószakasz húzott oldalán helyezkedik el.)



13. ábra. A vezeték I-es kapcsolat az I-es és 5-ös főcsomópontoknál; a h_{16} és h_{58} vektor elemeinek értelmezése



14. ábra. 12a ábrán vázolt szerkezet elmozdulási és hajlító nyomatéki ábrája

4.1. A 12b ábrán vázolt szerkezetnél az elmozdulásvektor

$$\mathbf{u}^* = [\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{u}_3^*, \dots, \mathbf{u}_7^*] \quad (78)$$

(3,21)

míg az 1-es főcsomópontba elhelyezett $\xi\eta$ koordinátarendszert figyelembe véve, a (32) szerinti transzformációs mátrix

$$\mathbf{T}_1^j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (79)$$

(3,3)

illetve a (34), (36a)-ra való tekintettel

$$\mathbf{A}^j = \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_1^j & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_1^j & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_1^j & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{T}_1^j & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (80)$$

(6,21)

továbbá a kezdeti hézag vektora

$$\mathbf{h}^{j*} = [\mathbf{h}_{16}^{+*}, \mathbf{h}_{16}^{-*}] = \mathbf{h}_{16}^*, \quad (81a)$$

(1,6)

ahol

$$\mathbf{h}_{16}^{+*} = [\Delta\xi_{16}^+, \Delta\eta_{16}^+, \Delta\varphi_{16}^+], \quad (+ \leftrightarrow -) \quad (81b)$$

$$\mathbf{h}_{16}^{+*} = [0; \quad 0,7 \text{ mm}; \quad -0,05 \text{ rad}]$$

$$\mathbf{h}_{16}^{-*} = [0,5 \text{ mm}; \quad -0,5 \text{ mm}; \quad 0,1 \text{ rad}].$$

Mivel a rúdszerkezet csak BFK-val rendelkezik, úgy (37a–c) szerint

$$\mathbf{g} = \mathbf{h} - \mathbf{A}\mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{h} \equiv \mathbf{h}^j, \quad \mathbf{A} \equiv \mathbf{A}^j, \quad (6,1)$$

továbbá

$$\mathbf{p} \equiv \mathbf{j} \geq \mathbf{0}. \quad (82)$$

A feladat megoldására az elmozdulásmódszert választva a (47) alatti programozási feladatot a 3.3 pont alatti a *II. módszer A esete* szerint oldhatjuk meg, hisz a \mathbf{K} merevségi mátrix nem elfajuló.

Így figyelembe véve, hogy (53)-ban $\partial II_c / \partial \mathbf{p} = \mathbf{0}$ (hisz rugalmas alátámasztás hiányzik), az (54) alatti programozási feladat helyett a

$$\min \left\{ \chi(\mathbf{j}) = \frac{1}{2} \mathbf{j}^* \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{j} + \mathbf{j}^* (\mathbf{h} - \mathbf{f}^{(1)}) \mid \mathbf{j} \geq \mathbf{0} \right\} \quad (83)$$

feladat fogalmazható meg, ahol

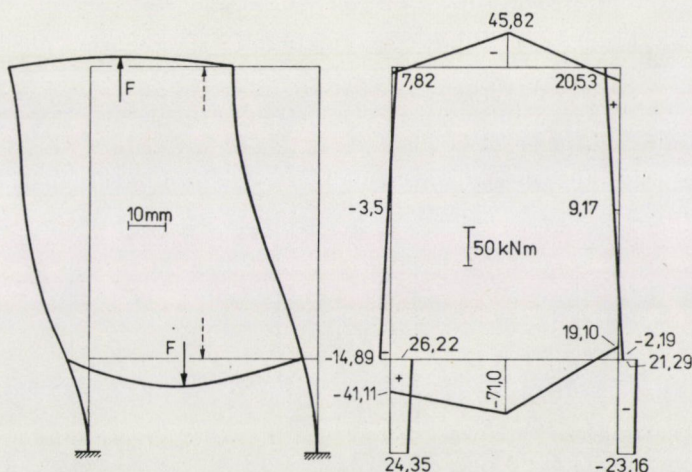
$$\mathbf{H}^{(1)} = \mathbf{A} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}^* \quad \text{hatásmátrix,} \quad (6,6)$$

$$\mathbf{f}^{(1)} = \mathbf{A} \mathbf{K}^{-1} \check{\mathbf{q}} \quad \text{terhelésből származó elmozdulás.} \quad (6,1)$$

A (83) alatti feladat megoldásából nyert, \mathbf{j} belső feltételi kapcsolatokban ébredő erők ismeretében a (46a)-ból kifejezett

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{j} + \mathbf{K}^{-1}\tilde{\mathbf{q}} \quad (84)$$

csomóponti elmozdulás vektor számítható, majd ennek alapján a tartószerkezet deformálódott alakja megrajzolható. Ez utóbbit a hajlítónyomatéki ábrával együtt a 15. ábra tünteti fel.



15. ábra. A 12b ábrán vázolt BFK kapcsolatú rúdszerkezet elmozdulási és hajlító nyomatéki ábrája

Az 1–6 csomópontnál keletkező kapcsolati erő

$$\mathbf{j}^* = [41,81 \text{ kN}; 0; 41,11 \text{ kN} \cdot \text{m}; 0; 9,24 \text{ kN}; 0],$$

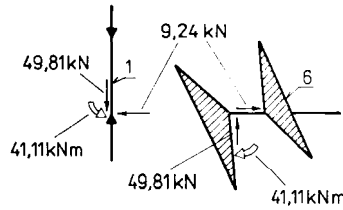
míg a relatív hézag

$$\mathbf{g}^* = [0; 0,2 \text{ mm}; 0,5 \text{ mm}; 0; 0,05 \text{ rad}]$$

értékű, vagyis ténylegesen fennáll a $\mathbf{g}^*\mathbf{j} = 0$ feltétel, továbbá a \mathbf{j} -ben szereplő $M_{16}^{g+} = 41,11 \text{ kNm}$ nyomaték a 6-os csomópontbeli hajlítónyomatékkal kell, hogy megegyezzen. Ez utóbbit a (84) alatt kiszámolt \mathbf{u} segítségével határoztuk meg. Látható a két mennyiség azonossága.

A \mathbf{j} vektorban szereplő kapcsolati erőket és nyomatékokat az egymástól eltávolított 1-es és 6-os csomópontokra felrajzolva a 16. ábrához jutunk.

A bemutatott példa jól érzékelteti, hogy a „Vezeték I” kialakításából adódó negatív kezdeti hézagok (túlfedések) erőteljes befolyást gyakorolnak a rúdszerkezet elmozdulási és feszültségi állapotára. A szimmetrikus terhelés



16. ábra. Az 1-es és 6-os csomópontokra ható kapcsolati erők, nyomatékok

ellenére a szerkezet pontjainak egyoldalú vízszintes irányú elmozdulása jelentős.

4.2. Ezek után térjünk át a 12c ábrán vázolt szerkezet számítására. Az \mathbf{u} elmozdulásvektor (1,24) típusú.

Az 1 és 5 jelű főcsomópontokban felvett $\xi\eta$ koordinátarendszer (13. ábra) és a (32) alapján

$$\mathbf{T}_1^j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_5^j = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (85a, b)$$

illetve a (34), (36a) figyelembevételével az 1–6, 5–8 csomópontok közötti kapcsolatból adódóan

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^j &= \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_1^j & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_1^j & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_1^j & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{T}_1^j & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{T}_5^j & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_5^j \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_5^j & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{T}_5^j \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1^j & \mathbf{A}_{11}^j \\ \hline \mathbf{A}_{12}^j & \mathbf{A}_{13}^j \end{array} \right], \end{aligned} \quad (86)$$

mivel

$$\mathbf{u}^* = [\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_8^*] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{u}_1^* & \mathbf{u}_7^* \\ \hline \mathbf{u}_2^* & \mathbf{u}_8^* \end{array} \right]. \quad (87)$$

A kezdeti hézag vektora

$$\mathbf{h}^* = [\mathbf{h}_{16}^{+*}, \mathbf{h}_{16}^{-*}, \mathbf{h}_{58}^{+*}, \mathbf{h}_{58}^{-*}],$$

ahol \mathbf{h}_{16}^+ , \mathbf{h}_{16}^- (lásd (81b) alatt).

Hasonlóan értelmezhető a \mathbf{h}_{58}^+ , \mathbf{h}_{58}^- is. Ismételten a szilárdságtani feladat megoldására az elmozdulás módszert választva, a 3.3. pont II módszer B

esetében leírtak szerint, az (55)-ös egyenletben $\mathbf{p}^w = \mathbf{r} = \mathbf{0}$ -t felvéve

$$-\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ (21,21) & (21,3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_I \\ (21,1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_I \\ (21,1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_I^{j*} \\ (21,12) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{j} \\ (12,1) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (88)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \\ (3,21) & (3,3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_F \\ (3,1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{II} \\ (3,1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{II}^{j*} \\ (3,12) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{j} \\ (12,1) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

egyenlethez jutunk, ahol $\det \mathbf{K}_{11} \neq 0$. Jelen esetben \mathbf{u}_F a 8 jelű csomópont elmozdulásának felel meg. Ezek után az (56)–(59d) figyelembevételével, a (60) alatti programozási feladat felépíthető.

A 6–7–8 csomópontú B jelű alszerkezet választott fiktív megtámasztásából adódóan $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ -ra adódik, s így az (56)-os egyenlet az alszerkezet egyensúlyát fejezi ki. Természetesen, ekkor a \mathbf{G}_F mátrix az (57b)-től eltérő módon, egyszerű vetületi és nyomatéki egyenletek felírásával — közvetlenül előállítható.

A (60) feladatban szereplő \mathbf{x} és \mathbf{y} vektorok (18,1) típusúak.

A csomóponti elmozdulások (61d)-vel a $\mathbf{p} \equiv \mathbf{j}$ helyettesítéssel állíthatók elő.

A feladatot kétféle \mathbf{h} vektor felvételével számoltuk ki.

A 17a ábrán levő elmozdulások és hajlítónyomatékok $\mathbf{h}^* = [\mathbf{h}_{16}^*, \mathbf{h}_{58}^*]$,

$$\mathbf{h}_{16}^* = [0; 0,7 \text{ mm}; -0,05 \text{ rad}; 0,5 \text{ mm}; -0,5 \text{ mm}; 0,1 \text{ rad}],$$

$$\mathbf{h}_{58}^* = [0,5 \text{ mm}; 0,7 \text{ mm}; 0,1 \text{ rad}; 0; -0,5 \text{ mm}; -0,05 \text{ rad}] \quad (89)$$

mellett nyertek meghatározást, míg a 17b ábrán szereplők

$$\mathbf{h}_{16}^* = [0; 0,1 \text{ mm}; 0,05 \text{ rad}; 0,5 \text{ mm}; 0,1 \text{ mm}; 0,05 \text{ rad}],$$

$$\mathbf{h}_{58}^* = [0,5 \text{ mm}; 0,1 \text{ mm}; 0,05 \text{ rad}; 0; 0,1 \text{ mm}; 0,05 \text{ rad}] \quad (90)$$

kezdeti hézag vektorhoz tartoznak.

A 17a ábrabeli esetben a kapcsolati erők vektorai

$$\mathbf{j}_{16}^* = [100 \text{ kN}; 49,05 \text{ kN}; 433,09 \text{ kN} \cdot \text{m}; 0; 0; 0],$$

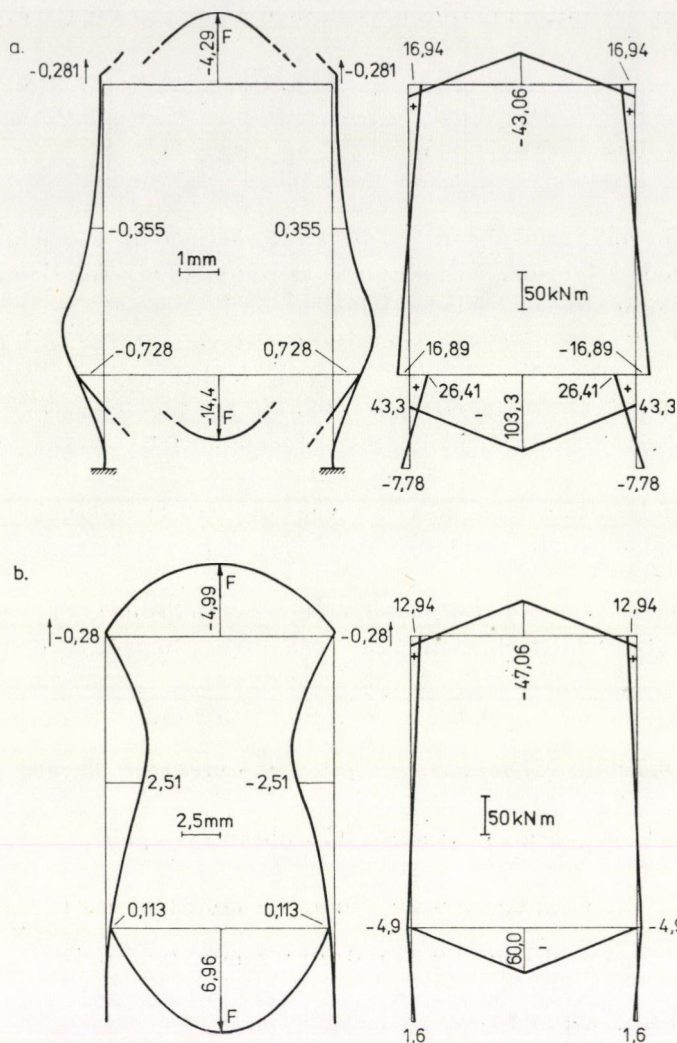
$$\mathbf{j}_{58}^* = [0; 49,05 \text{ kN}; 0; 100 \text{ kN}; 0; 433,09 \text{ kN} \cdot \text{m}],$$

a relatív hézag vektorai

$$\mathbf{g}_{16}^* = [0; 0; 0; 0,5 \text{ mm}; 0,2 \text{ mm}; 0,05 \text{ rad}],$$

$$\mathbf{g}_{58}^* = [0,5 \text{ mm}; 0; 0,05 \text{ rad}; 0; 0,2 \text{ mm}; 0]$$

értékűek.



17. ábra. A 12c ábrán vázolt szerkezet elmozdulási és hajlítónyomatéki ábrája. a) (89) alatti h -nál, b) (90) alatti h -nál

Érdeemes megjegyezni, annak ellenére, hogy a 6–8 rúd hossza terheletlen esetben 1 mm-rel hosszabb volt, mint az 1–5 csomópontok közötti távolság; az említett rúd a terhelés és a h -ban szereplő $\Delta\varphi^\pm$ szögelfordulási kezdeti „hézag” okozta alakváltozás után nem nyomott, hanem húzott lett.

A bemutatott példa jól érzékelteti, hogy a szerkezeti elemek közötti szerelésből származó hézagok, túlfedések a szerkezet állapotára olyan mértékű hatást gyakorolhatnak, amelyet előzetesen nem láthattunk.

A kapcsolati erők a 4.1. alpontban ismertettek szerint könnyen felrajzolhatók az 1–5 főcsomópontokba, illetve a B jelű alszerkezet 6-os és 8-as csomópontjaiba.

A 17b ábrán feltüntetett esetben

$$\mathbf{j}_{16}^* = [100 \text{ kN}; 0; 0; 0; 23,45 \text{ kN}; 0],$$

$$\mathbf{j}_{58}^* = [0; 0; 0; 100 \text{ kN}; 23,45 \text{ kN}; 0],$$

míg

$$\mathbf{g}_{16}^* = [0; 0,2 \text{ mm}; 0,066 \text{ rad}; 0,1 \text{ mm}; 0; 0,034 \text{ rad}],$$

$$\mathbf{g}_{58}^* = [0,1 \text{ mm}; 0,2 \text{ mm}; 0,034 \text{ rad}; 0; 0; 0,066 \text{ rad}],$$

vagyis az 1–6 és 5–8 csomópontok közötti kapcsolatnál nyomaték nem lép fel, a hüvely a vezetékre nem feszül rá.

Az állványszerkezet terhelési- és a kapcsolatokbeli kezdeti hézagok szimmetriája miatt, mint várható volt, szimmetrikusan deformálódik.

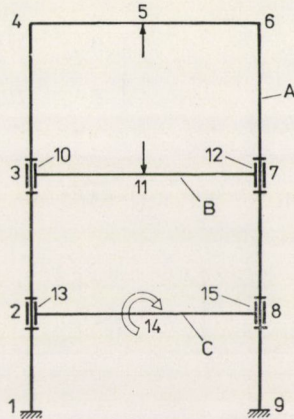
5. Következtetések

Feltételes kinematikai kapcsolatú rúdszerkezetként a gépészet, építészet számos berendezése modellezhető. Így pl. gépészetben szerszámgépek, különféle mechanizmusok szilárdsági és deformációs állapotának pontosabb nyomonkövetése könnyen elérhető a feltételes kinematikai kapcsolatok kvadratikus programozási feladatként való kezelésével.

A megfogalmazott programozási feladatok összevetéséből következik, hogy az elmozdulásmódszer alkalmazása szélesebb mint az erőmódszeré, ugyanis az elmozdulásmódszert a merevségi mátrix struktúrájának bizonyos feltétele mellett (lásd 3.2. pont) abban az esetben is alkalmazhatjuk, amikor a mátrix rangja kisebb sorainak számánál. Erőmódszerre alapozott kvadratikus programozási feladat azonban csak statikailag határozatlan szerkezetnél fogalmazható meg.

IRODALOM

1. DUPUIS, G.—PROBST, A.: Étude d'une structure élastique soumise à des conditions unilatérales, *J. mécs.* 1 (1967), 3–41
2. Гордеев, В. Н.—Перельмутер, А. В.: Расчёт упругих систем односторонними связями как задача квадратического программирования. Сб. Исследования по теории сооружений вып. XV. Стройиздат М., (1967), 208–212
3. Рабинович, И. М.: Энергетические свойства и особенности расчёта статистически неопределимых стержневых систем с односторонними лишними связями. Сб. Исследования по теории сооружений вып. XVIII. Стройиздат М., (1969), 141—153



M.1. ábra

mindkét oldalához való hozzáadásával az előbbi egyenlethől az (M.1)-ben feltüntetett

$$(\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1 \mathbf{K}^A \mathbf{E}_1) \mathbf{u}^A = (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 \mathbf{K}^A \mathbf{E}_2) \mathbf{u}^A + \mathbf{E}_1 (\tilde{\mathbf{q}}^A - \mathbf{A}^{A*} \mathbf{j})$$

egyenlethez jutunk, amelyben

$$\tilde{\mathbf{q}}^{A*} = [\mathbf{0}^*, \tilde{\mathbf{q}}_1^{A*}, \mathbf{0}^*]; (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 \mathbf{K}^A \mathbf{E}_2) \mathbf{u}^A = \mathbf{0}$$

az 1 és 9 csomópontok (rúdszerkezetek) merev befalazása miatt.

Megjegyezzük, hogy az (M.1) egyenlet \mathbf{A}^* mátrixában csak a beszafrózott blokkok különböznek zérustól.

Amennyiben az (M.1) mátrixegyenlet (55) alatti felbontását végeznénk el, úgy ehhez az együtthatómátrix sorainak és oszlopainak felcserélését kellene végrehajtani. Mivel a \mathbf{K}^B , \mathbf{K}^C mátrix blokkok felett zérus mátrixok állnak, úgy az átalakításra valójában nincs szükség, hisz az \mathbf{u}_1 elmozdulásvektor elemei alszerkezetként egymástól függetlenül kifejezhetők.

Vagyis az (M.1) egyenlethől, az A jelű statikailag határozatlan rúdszerkezet elmozdulásvektora

$$\mathbf{u}^A = -[\mathbf{S}^A]^{-1} \mathbf{A}^{A*} \mathbf{j} + [\mathbf{S}^A]^{-1} \tilde{\mathbf{q}}^A \quad (\text{M.2})$$

összefüggéssel számolható, míg

$$\mathbf{u}_1^B = -[\mathbf{K}_{11}^B]^{-1} \mathbf{K}_{12}^B \mathbf{u}_F^B - [\mathbf{K}_{11}^B]^{-1} \mathbf{A}_1^{B*} \mathbf{j} + [\mathbf{K}_{11}^B]^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_1^B \quad (B \leftrightarrow C). \quad (\text{M.3})$$

Az (M.3) alatti \mathbf{u}_1^B -t ($B \leftrightarrow C$) behelyettesítve az (M.1) egyenlet 3. (5.) blokkosorába, a B (C) alszerkezetre vonatkozó (56) típusú egyensúlyi egyenletekhez jutunk:

$$\mathbf{D}^B \mathbf{u}_F^B + \mathbf{G}_F^{B*} \mathbf{j} - \mathbf{q}_F^B = \mathbf{0}, \quad (B \leftrightarrow C) \quad (\text{M.4})$$

ahol

$$\mathbf{D}^B = \mathbf{K}_{22}^B - \mathbf{K}_{21}^B [\mathbf{K}_{11}^B]^{-1} \mathbf{K}_{12}^B, \quad (3,3)$$

$$\mathbf{G}_F^{B*} = \mathbf{A}_{11}^{B*} - \mathbf{K}_{21}^B [\mathbf{K}_{11}^B]^{-1} \mathbf{A}_1^{B*} \quad (B \leftrightarrow C) \quad (\text{M.5})$$

$$\mathbf{q}_F^B = \tilde{\mathbf{q}}_{11}^B - \mathbf{K}_{21}^B [\mathbf{K}_{11}^B]^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_1^B. \quad (3,1)$$

Az érintkezés-elválás (58)-as kinematikai egyenletében szereplő \mathbf{H} hatásmátrix

$$\mathbf{H} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{H}^B + \mathbf{H}_{BB}^A & \mathbf{H}_{BC}^A \\ \hline \mathbf{H}_{CB}^A & \mathbf{H}^C + \mathbf{H}_{CC}^A \end{array} \right] \quad (\text{M.6})$$

felépítésű, ahol

$$\mathbf{H}^A = \mathbf{A}^A [\mathbf{S}^A]^{-1} \mathbf{A}^{A*} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{BB}^A & \mathbf{H}_{BC}^A \\ \mathbf{H}_{CB}^A & \mathbf{H}_{CC}^A \end{bmatrix} \begin{matrix} 12 \\ 12 \end{matrix} \quad (\text{M.7})$$

illetve

$$\mathbf{H}^B = \mathbf{A}^B [\mathbf{K}_{11}^B]^{-1} \mathbf{A}^{B*}. \quad (B \leftrightarrow C) \quad (\text{M.8})$$

A geometriai mátrix

$$\mathbf{G}_F^* = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_F^{B*} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_F^{C*} \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \quad (\text{M.9})$$

míg a kezdeti \mathbf{h} hézagtól és terheléstől függő vektor

$$\mathbf{t}_F = \mathbf{h} - \mathbf{A}^A [\mathbf{S}^A]^{-1} \tilde{\mathbf{q}}^A - \mathbf{A}^B [\mathbf{K}_{11}^B]^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_1^B - \mathbf{A}^C [\mathbf{K}_{11}^C]^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_1^C. \quad (\text{M.10})$$

Ily módon az (59e) egyenlet az alábbi struktúrájú

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}^B & \mathbf{0} & \mathbf{G}_F^{B*} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^C & \mathbf{0} & \mathbf{G}_F^{C*} \\ -\mathbf{G}_F^B & \mathbf{0} & & \\ 0 & -\mathbf{G}_F^C & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_F^B \\ \mathbf{u}_F^C \\ \mathbf{j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (\text{M.11a})$$

míg a (46c–e) alapján

$$\mathbf{j}^* \mathbf{g} = 0, \quad \mathbf{j} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{g} \geq \mathbf{0}. \quad (\text{M.11b–d})$$

A fentiekből a (60)-as kvadratikus programozási feladat már könnyen előállítható.

M.2. A \mathbf{K}_{11}^B invertálását, ismételten a (61a–c) egyenletek analógiája alapján közvetett úton célszerű elvégezni. Amennyiben a B alszerkezet a 12-es csomópontjában fiktív támaszt (befalazást) helyezünk el, ennek a statikailag határozott szerkezetnek kell megkeresni a megoldását. A fiktív támasznál zérus elmozdulást a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_F^B \\ \mathbf{u}_F^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_1^B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{M.12})$$

egyenlet megoldása szolgáltatja.

Így a (61a–c) szerint a \mathbf{D}^B , \mathbf{G}_F^{B*} , \mathbf{q}_F^B előállításához a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{12}^B & \mathbf{A}_1^{B*} & \tilde{\mathbf{q}}_1^B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \quad (\text{M.13})$$

egyenletet kell megoldani. Hasonlóan járunk el a C alszerkezetnél is. Az A alszerkezetnél már az (M.1)-ben feltüntetett \mathbf{S}^A mátrix felvételével biztosítottuk az 1 és 9 csomópontokban a befalazás által előírt peremfeltételeket.

M.3. A bemutatott példából következik, hogy a BFK kapcsolatok esetében az (M.11a) egyenletben szereplő mátrixokat, vektorokat, alszerkezetként, az egymástól függetlenül jelentkező egyensúlyi egyenletnek az alszerkezet valóságos vagy fiktív megtámasztásánál levő kinematikai peremfeltételt kielégítő megoldása révén célszerű meghatározni.

Látjuk, hogy a merevtestszerű elmozdulással bíró alszerkezetek esetében a D kvázi-diagonál mátrixként jelenik meg, mivel a felírható (M.4) egyenletek száma, megegyezik a merevtestszerű elmozdulással rendelkező alszerkezetek számával. Az (M.11a) egyenlet 3. és 4. blokkosora az $A-B$, $A-C$ alszerkezetek közötti BFK kapcsolatok kinematikai viszonyait írja le.

A blokkosorokban szereplő egyenletek száma, a felvételezett Vezeték I típusú kapcsolat miatt kapcsolatonként 6 db, azaz összesen 24.

M.4. A (60)-as kvadratikus programozási feladatban szereplő j és u_F mennyiségek különböző mértékegysége miatt, a számítás folyamán célszerű $j = j/F^\circ$ -el számolni, azaz H helyett $H \cdot F^\circ$ -at, D^B helyett D^B/F° -at továbbá \tilde{q}_F^B helyett \tilde{q}_F^B/F° -at ($B \leftrightarrow C$) venni, ahol F° az u_F , j -ben szereplő mennyiségek dimenziójától függő nagy szám, pl. ha hosszúság mm-ben, erő N-ben szerepel, akkor $F^\circ = 10^8 - 10^9$. Ezáltal elérhető, hogy a G_F , $H \cdot F^\circ$, D/F° mátrixok, a \tilde{q}_F^B/F° és t_F vektorok, sőt maga az $[F^\circ \cdot u_F^*, j^{*\circ}]$ vektor is közel azonos nagyságrendű tagokat tartalmaznak. Ez a szimplex típusú algoritmusnál jelentkező kerekítési hibák csökkenését okozza, ami végsősoron a számítás pontosságának növekedéséhez vezet.

Contribution to the Calculation of Frame Structures Including Conditional Kinematic Connections. In this paper the strength calculation of frame structures, having both internal and external conditional kinematic (geometric) connections, is reduced with the aid of the first order theory to quadratic programming problems differing from each other with respect to the final unknown values. After classifying the internal kinematic connections occurring in the case of inplane structures, the programming problems based on the method of displacement and on the method of force are analysed by taking into account the geometric matrix degree of the frame structure in question. It is pointed out that the field of application of the method of displacement is larger than that of the method of force, considering that with the aid of this latter only statically undetermined frame structures can be investigated. In conclusion, numerical examples are presented for the case of the internal conditional kinematic connection to the programming problem based on the method of displacements.

Beitrag zur Berechnung von Rahmentragwerken mit bedingten kinematischen Verbindungen. In der Abhandlung wird die Festigkeitsberechnung der innere und äußere bedingte kinematische (geometrische) Verbindungen besitzenden Rahmentragwerke aufgrund der Theorie erster Ordnung auf das Problem der im Hinblick auf die in den endgültigen Unbekannten verschiedenen quadratischen Programmierungsaufgaben reduziert. Nach der Klassifizierung der bei den ebenen Konstruktionen auftretenden inneren bedingten kinematischen Verbindungen werden die auf die Verschiebungsmethode oder auf dem Kraftgrößeverfahren beruhenden Programmierungsaufgaben unter Berücksichtigung des Ranges der geometrischen Matrix des Rahmentragwerks analysiert. Es wird nachgewiesen, daß der Anwendungsbereich der Verschiebungsmethode breiter als das Kraftgrößeverfahren ist, da mit dem letzteren nur statisch unbestimmte Rahmentragwerke untersucht werden können. Zuletzt werden numerische Beispiele für die auf dem Verschiebungsverfahren beruhende Programmierungsaufgabe für den Fall der inneren bedingten kinematischen Verbindung vorgeführt.