PERTURBÁCIÓS MÓDSZER A CSAVARÁSI MEREVSÉG KÖZELÍTŐ ÉRTÉKÉNEK SZÁMÍTÁSÁRA

ECSEDI ISTVÁN*

Ez a tanulmány a heterogén anyagú prizmatikus rudak de Saint-Venant-féle csavarási feladatával kapcsolatos. Egy perturbációs módszert javasol a csavarási merevség közelítő értékének meghatározására.

Fontosabb jelölések

x, y derékszögű koordináták,
e_x, e_y egységvektorok,
$G = G(x, y)$ csúsztató rugalmassági modulus,
$g = g(x, y) = 1/G(x, y)$,
$g_0 = g_0(x, y)$, $\gamma = \gamma(x, y)$ a rúd anyagának heterogenitását jellemző ismert (adott) függvények,
ε kis paraméter,
$u = u(x, y)$ feszültségfüggvény,
T x, y síkbeli egyszeresen összefüggő, rektifikálható határgörbéjű korlátos tartomány,
∂T T határgörbéje,
$n = n_x e_x + n_y e_y$ a ∂T határgörbe normális egységvektora,
$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} e_x + \frac{\partial}{\partial y} e_y$ *Hamilton*-féle differenciáloperátor,
„ · " két vektor skaláris szorzatának jele,
S a prizmatikus rúd de Saint-Venant-féle elmélet alapján meghatározható csavarási merevsége,
$0(\varepsilon^k)$ „kis ordó ε^k" az ε olyan függvénye, melyre $0(\varepsilon^k)/\varepsilon^k \to 0$ midőn $\varepsilon \to 0$.
Egyéb mennyiségeket, változókat a szöveg értelmez.

1. Bevezetés

Ismeretes, hogy az 1. ábrán vázolt *tömör* keresztmetszetű heterogén, de izotrop, lineárisan rugalmas anyagi prizmatikus rúd de Saint-Venant-féle csavarási feladata a következő peremértékproblémára vezet ([1], [2]):

$$\nabla \cdot (g \nabla u) + 2 = 0 \qquad (x, y) \in T, \tag{1}$$

$$u = 0 \qquad (x, y) \in \partial T. \tag{2}$$

A fenti egyenletekben
$u = u(x, y)$ a csavarási feszültségfüggvény,
$g = g(x, y) = 1/G(x, y)$,
$G = G(x, y)$ a rúd anyagának csúsztató rugalmassági modulusa.

* Dr. Ecsedi István, 3531 Miskolc, Vászonfehérítő u. 24. IV/1.

A prizmatikus rúd de Saint-Venant-féle elmélet alapján meghatározható S csavarási merevségét az

$$S = 2 \int_T u dT \tag{3}$$

formula alapján tudjuk meghatározni ([1], [2]).

A levezetések során még alkalmazzuk az alábbi egyenlőtlenségi relációt [2]:

$$S \geq -\int_T g(\nabla \tilde{u})^2 dT + 4 \int_T \tilde{u}\, dT , \tag{4}$$

ahol $\tilde{u} = \tilde{u}(x, y)$ a $T + \partial T$ zárt tartományban folytonos, T-ben szakaszonként folytonosan differenciálható, a ∂T határgörbén *zérus* értéket felvevő egyébként tetszőleges kétváltozós függvényt jelöl.

A tanulmányban a vizsgálatot olyan esetre korlátozzuk, amelyekben a rúd anyagának heterogenitását jellemző $g = g(x, y)$ függvény

$$g = g(x, y) = g_0(x, y) + \varepsilon\gamma(x, y) \tag{5}$$

alakú. Az (5) egyenletben $g_0 = g_0(x, y)$, $\gamma = \gamma(x, y)$ adott függvények, ε pedig az ún. kis paraméter.

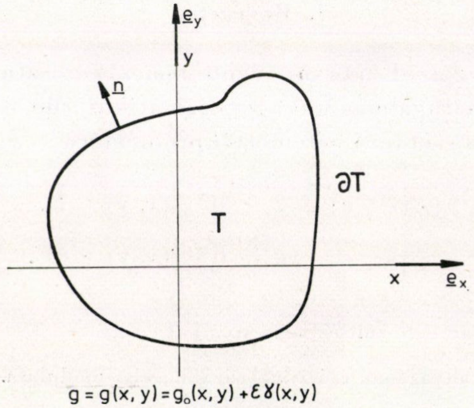
A tanulmány tárgya az (5) egyenlet alapján a következőképpen jelölhető ki:

a $g_0 = g_0(x, y)$ függvénynek kicsiny $\varepsilon\gamma(x, y)$ mértékű megváltoztatása milyen módon hat a csavarási merevség értékére.

A következőkben feltételezzük, hogy a csavarási probléma megoldása ismert, ha a rúd anyagának heterogenitását a $g_0 = g_0(x, y)$ függvény jellemzi, azaz a

$$\nabla \cdot (g_0 \nabla u_0) + 2 = 0 \quad (x, y) \in T, \tag{6}$$

$$u_0 = 0 \quad (x, y) \in \partial T \tag{7}$$



1. ábra. Tömör keresztmetszet

egyenletek által kijelölt kerületértékfeladat, az ún. *alapfeladat* $u_0 = u_0(x, y)$ megoldása adottnak tekintett. Ha a rúd anyagának a heterogenitását $\varepsilon\gamma(x, y)$ mértékben megváltoztatjuk, akkor a csavarási feladat $u = u(x, y)$ feszültségfüggvénye, tekintettel az (1), (2) egyenletekre a

$$\nabla \cdot [(g_0 + \varepsilon\gamma)\nabla u] + 2 = 0 \quad (x, y) \in T, \tag{8}$$

$$u = 0 \quad (x, y) \in \partial T \tag{9}$$

kerületi érték probléma megoldásával állítható elő.

2. Perturbációs módszer

R. D. SHILE és R. L. SIRAKOWSKI eljárását [1] követve feltesszük, hogy a (8), (9) egyenletek által kijelölt kerületi értékfeladat $u = u(x, y)$ megoldása az ε kis paraméter analitikus függvénye, s így előállítható

$$u = u(x, y) = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y) + \ldots \tag{10}$$

alakban. Ennek megfelelően a (3) képlet alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$S = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \ldots, \tag{11}$$

ahol

$$P_0 = S_0 = 2 \int_T u_0 dT, \tag{12}$$

$$P_i = 2 \int_T u_i dT, \tag{13}$$

$$(i = 1, 2, \ldots).$$

A csavarási merevség elsőrendű közelítésének az

$$S_1 = S_0 + \varepsilon P_1, \tag{14}$$

képlet alapján meghatározható mennyiséget tekintjük. Az [1] tanulmány szerint

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + 0(\varepsilon^2), \tag{15}$$

így nyilván

$$S = S_1 + 0(\varepsilon^2). \tag{16}$$

A (10) alakú megoldásnak a (8), (9) egyenletekbe való behelyettesítésével — ismert módon ([1], [3], [4]) az együtthatók összehasonlításának az elve alapján — a

$$\nabla \cdot (g_0 \nabla u_{i+1}) + \nabla \cdot (\gamma \nabla u_i) = 0 \quad (x, y) \in T, \tag{17}$$

$$u_{i+1} = 0 \quad (x, y) \in \partial T, \tag{18}$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots)$$

egyenleteket kapjuk. A következőkben bebizonyítjuk, hogy a csavarási merevség S_1 elsőrendű közelítése az $u_0 = u_0(x, y)$ ismeretében közvetlenül előállítható.

A szorzatfüggvény deriválási szabályának alkalmazásával a

$$g_0 \nabla u_0 \cdot \nabla u_1 + u_0 \nabla \cdot (g_0 \nabla u_1) = \nabla \cdot (u_0 g_0 \nabla u_1), \tag{19}$$

$$g_0 \nabla u_0 \cdot \nabla u_1 + u_1 \nabla \cdot (g_0 \nabla u_0) = \nabla \cdot (u_1 g_0 \nabla u_0) \tag{20}$$

egyenletekhez jutunk. Innen, ha alkalmazzuk a Gauss-féle integrálátalakítási tételt és tekintettel vagyunk az

$$u_0 = u_1 = 0 \qquad (x, y) \in \partial T$$

homogén peremfeltételekre, azt találjuk, hogy

$$\int_T g_0 \nabla u_0 \cdot \nabla u_1 dT + \int_T u_0 \nabla \cdot (g_0 \nabla u_1) dT = 0, \tag{21}$$

$$\int_T g_0 \nabla u_0 \cdot \nabla u_1 dT + \int_T u_1 \nabla \cdot (g_0 \nabla u_0) dT = 0. \tag{22}$$

A (21) és (22) egyenletek kivonásával, valamint a (6) és a (17) egyenletek felhasználásával az alábbi egyenletet nyerjük:

$$2 \int_T u_1 dT - \int_T u_0 \nabla \cdot (\gamma \nabla u_0) dT = 0. \tag{23}$$

A

$$\int_T \nabla \cdot (u_0 \gamma \nabla u_0) dT = \int_T \gamma (\nabla u_0)^2 dT + \int_T u_0 \nabla \cdot (\gamma u_0) dT, \tag{24}$$

$$\int_T \nabla \cdot (u_0 \gamma \nabla u_0) dT = \int_{\partial T} (u_0 \gamma \nabla u_0) \cdot \underline{n} d(\partial T) \tag{25}$$

azonosságok felhasználásával könnyen verifikálható a (23) egyenlet alapján, hogy

$$2 \int_T u_1 dT = - \int_T \gamma (\nabla u_0)^2 dT, \tag{26}$$

azaz a csavarási merevség S_1 elsőrendű közelítése közvetlenül kifejezhető az $u_0 = u_0(x, y)$ ismeretében, hiszen a (14) és a (26) kombinálásával az

$$S_1 = S_0 - \varepsilon \int_T \gamma(\nabla u_0)^2 dT, \quad (S_0 = 2 \int_T u_0 dT) \tag{27}$$

formulát nyerjük.

Felvetődik az a kérdés, hogy milyen viszony van az S csavarási merevség és az S_1 elsőrendű közelítés között. Bebizonyítjuk, hogy fennáll az

$$S \geq S_1 \tag{28}$$

egyenlőtlenségi reláció.

A (4) egyenlőtlenségi reláció alapján ui. azt írhatjuk, hogy

$$S \geq -\int_T (g_0 + \varepsilon\gamma)(\nabla u_0)^2 dT + \int_T 4u_0 dT = -\int_T g_0(\nabla u_0)^2 dT +$$
$$+ 4\int_T u_0 dT - \varepsilon \int_T \gamma(\nabla u_0)^2 dT. \tag{29}$$

Ismert eredményekből következik, hogy [2]

$$\int_T g_0(\nabla u_0)^2 dT = 2\int_T u_0 dT. \tag{30}$$

A (12) a (27) és a (30) egyenletek, valamint a (29) egyenlőtlenségi reláció kombinálásával a bizonyítandó (28) egyenlőtlenségi relációt nyerjük.

3. Egy példa

Tekintsük a 2. ábrán vázolt tömör körkeresztmetszetet. A példában a mértékegységek feltüntetésétől eltekintünk. Legyen

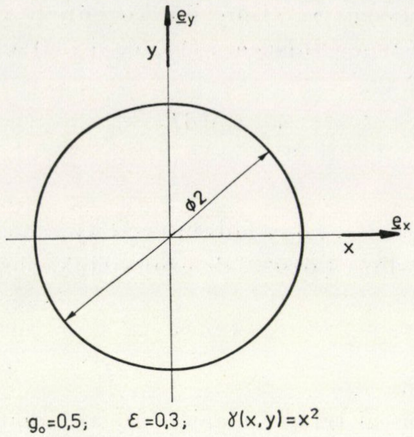
$$g = g(x, y) = 0{,}5 + 0{,}3x^2.$$

Nyilván jelen feladatban

$$g_0 = 0{,}5, \quad \gamma(x, y) = x^2, \quad \varepsilon = 0{,}3.$$

Ismert eredményekből következik, hogy

$$S_0 = \pi, \quad u_0(x, y) = 1 - x^2 - y^2.$$



2. ábra. Kör keresztmetszet

A tanulmány (27) képlete szerint

$$S_1 = \pi - 0{,}1\pi = 0{,}9\pi\,.$$

A (28) egyenlőtlenségi reláció alkalmazásával azt írhatjuk, hogy

$$S \geq 0{,}9\pi\,.$$

IRODALOM

1. Schile, R. D.—Sierakowski, R. L.: On the Saint-Venant Problem for Nonhomogeneous Elastic Material. *Quart. Appl. Math.* **23** (1955), No. 1.
2. Ecsedi, I.: Estimation of the Torsional Stiffness of Prismatical Bars of Heterogeneous Material, *Acta Techn. Hung.* **85** (1977), 207—220
3. Courant-Hilbert: Methods of Mathematical Physics. Volum. I. Interscience Publ. New York 1953
4. Sokolnikoff, I. S.: Approximate Methods of Solutions of Twodimensional Problems in Anisotropic Elasticity, *Proc. Symp. Appl. Math.* **3** (1950), 1—11

Method of Perturbation for the Calculation of the Approximate Value of Torsional Stiffness — The study concerns de Saint-Venant's torsional problem of prismatic bars of heterogeneous material. The author suggests a method of perturbation for the determination of the approximate value of the torsional stiffness.

Störungsmethode für die Berechnung des Näherungswertes der Drehfestigkeit. Die Abhandlung betrifft das de Saint-Venantsche Torsionsproblem der aus heterogenem Material hergestellten prismatischen Stäbe. Es wird eine Störungsmethode zur Ermittelung des Näherungswerters der Drehfestigkeit vorgeschlagen.