CSŐHÁLÓZATOK OPTIMÁLIS TERVEZÉSE EGÉSZÉRTÉKŰ PROGRAMOZÁSSAL

GRÓSZ MIKLÓS*

[Beérkezett 1978. szeptember 16-án]

Jelen dolgozatban már meglevő vízhálózatok bővítésével és új hálózatok tervezésével foglalkozunk. A csőhálózatok problémakörének fentemlített optimális megoldására egy nemlineáris egészértékű programozási modellt mutatunk be. E modell annyiban különbözik az irodalomból ismertektől, hogy a) a csőátmérők csak diszkrét értékeket vehetnek fel, b) a források által betáplált vízmennyiségek nem előre megadott konstansok, hanem hálózattól függő paraméterek, továbbá c) a beruházási és üzemeltetési költségek minimalizálását tűzi ki célul.

1. Bevezetés

Jelen dolgozatunkban már meglevő vízhálózatok bővítésével és új hálózatok tervezésével foglalkozunk. Az utóbbi néhány évben igen sok ilyen irányú cikk jelent meg az irodalomban, ami a probléma gyakorlati szükségességét tükrözi.

Az elért eredményekről jó áttekintést ad CENEDESE és MELE [3]. A szerzők egy része a beruházási költségek csökkentése céljából csak az elméleti csőátmérők meghatározását tűzi ki célul [2, 8, 13]. Más szerzők már diszkrét változóknak tételezik fel a csőátmérőket, és a beruházási költségek [1, 3, 11] mellett az üzemeltetési költségek minimalizálására is törekszenek [5]. A szerzők többsége azonban nem veszi figyelembe a források (víztorony és szivattyú) által betáplált vízmennyiséget, hanem ezt konstansnak tekinti.

Ebben a dolgozatban a csőhálózatok optimális tervezésére egy olyan lehetséges nemlineáris egészértékű programozási modellt mutatunk be, amelyben a csőátmérők csak diszkrét értékeket vehetnek fel (vagyis csak a rendelkezésre álló csövekből válogathatunk), és figyelembe vesszük a források tényleges betáplálási mennyiségeit. Az egészértékű programozási modell alkalmazása azért vált szükségessé, mert a folytonos modell eredményei a gyakorlat igényeit nem elégítik ki.

Csőhálózat optimális tervezésén a következőket értjük: Keressük az adott vonalvezetésű hurkolt vagy sugaras hálózat ágához tartozó azon csőátmérőket, amelyeket adott csőátmérő-készletből választunk úgy, hogy a

* Grósz Miklós, 1025 Budapest, Csalit u. 9.

beruházási és az üzemeltetési költségeik minimálisak legyenek, és az áramlástani feltételek teljesülésén kívül a csomóponti nyomásokra vonatkozó korlátozó feltételek is teljesüljenek. A dolgozatban nem foglalkozunk a csőhálózat nyomvonalainak optimalizálásával, az új hálózat kiépítésének ütemezésével, a fogyasztás prognosztizálásával, valamint a karbantartási költségek figyelembevételével. A probléma megfogalmazását azonban olyan általánosan kíséreljük meg, hogy az a vízhálózatokon kívül más hálózati probléma megoldására is alkalmas legyen.

2. A hálózati probléma megfogalmazása

Iktassunk be a hálózatba egy fiktív csomópontot [9], és kössük össze ezt a forrás-csomópontokkal (fiktívágak). A fiktív csomóponton a betáplált mennyiséget tegyük egyenlővé a hálózat összfogyasztásával. Az így bevezetett fiktív csomópont lehetővé teszi a víztorony és a szivattyúk által létesített valóságos betáplálási mennyiség figyelembevételét. Ez annyit jelent, hogy nem kell rögzítenünk előre az egyes források által létesíthető betáplált vízmennyiséget, hanem azok változhatnak. A szivattyú jelleggörbéjétől függően, illetve több víztorony esetében az azokban kialakuló vízszintek számíthatók.

A továbbiakban a vízhálózatot egy $D(K, I)$ összefüggő gráfnak tekintjük, ahol K a gráf éleinek halmaza, I a gráf csomópontjainak halmaza.

A D gráf élein vegyünk fel tetszőleges irányokat (1. ábra). Vezessük be a 2. ábra szerinti csomóponti előjelszabályt is. Írjuk fel a két Kirchhoff-törvényt:

$$p_i - p_j = f_k(d_k) \cdot q_k \cdot |q_k|, \qquad (k = 1, \ldots, m;\; i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

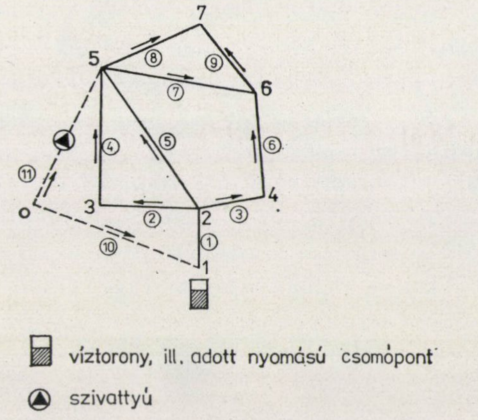
$$\sum_{k \in K_i'} q_k - \sum_{k \in K_i''} q_k = a_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

ahol

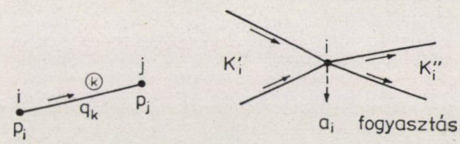
p_i — a csomóponti nyomás az i-edik csomópontban,
q_k — a szállított (áramló) vízmennyiség az (i, j) élen (irányítás szerint előjelezve),
$f_k(d_k) = \dfrac{8{,}27 \cdot 10^7\, r_k l_k}{d_k^5}$
d_k — az (i, j) élhez tartozó csőátmérő,
K_i', K_i'' — az i-edik csomópontba bemenő, illetve kimenő élek halmaza,
r_k — érdesség,
l_k — az (i, j) él hossza,
a_i — fogyasztás az i-edik csomópontban,
$n = |I|$,
$m = |K|$. (A $|\cdot|$ jel a halmaz számosságát, a halmaz elemeinek számát jelenti.)

Most fogalmazzuk meg a hálózati problémát az él-csúcs incidencia mátrix segítségével:

$$G = \{g_{ki}\} = \begin{cases} 0, & \text{ha a } k\text{-ik él nem tartozik az } i\text{-edik csomóponthoz,} \\ 1, & \text{ha a } k\text{-ik él az } i\text{-edik csomópontba megy be, és} \\ -1, & \text{ha a } k\text{-ik él az } i\text{-edik csomópontból megy ki.} \end{cases}$$



1. ábra



2. ábra

Ezzel lényegében egy csomóponti előjelszabályt definiáltunk.

A hálózati folyamok elméletéből ismert [7], hogy a G mátrix mérete $m * (n - 1)$. Ugyancsak ismeretes, hogy a G mátrix mindig teljes oszloprangú, ami azt jelenti, hogy a csomóponti törvényt elegendő $n - 1$ csomópontra felírni.

A két Kirchhoff-törvény és a korlátozó feltételek mátrix formában:

$$G \cdot p = s, \tag{3}$$

$$G^T \cdot q = a, \tag{4}$$

$$p \geq p^{\min}, \tag{5}$$

ahol

$s = \{s_i\} = \{f_i q_i \, |q_i|\}$,
a — a csomóponti fogyasztások vektora,
$p^{\min}$ — a csomópontokon megengedett minimális nyomások vektora.

Ugyancsak a hálózati folyamok elméletéből ismert [7], hogy a G mátrix nemszinguláris részmátrixának egy összefüggő fa felel meg és fordítva. A fák száma a D gráfon a következőképpen adható meg:

$$t = \det |G^T \cdot G| .$$

Ezekből a fákból egyértelműen felépítünk egy összefüggő minimális fát. Összefüggő minimális fán azt értjük, hogy a D gráf tetszőleges csomópontja a fa mentén legrövidebb úton érhető el a legközelebb eső forrásból.

A minimális fa felépítésére azért van szükség, mert az üzemeltetési költségeket minimalizálni törekszünk úgy, hogy a vízmennyiségek többségének szállítása lehetőleg a legrövidebb úton történjék és az átmérők választásánál ezt figyelembe vesszük. Ez a kiindulás azonban az optimalizálás eredményét nem befolyásolja. Másrészt a minimális fa ismeretében két részre particionáljuk a G mátrixot és ennek megfelelően írjuk át a (4) egyenletet:

$$[GR^T \; GS^T] \times \begin{bmatrix} q' \\ q'' \end{bmatrix} = a,$$

amelyből a fa ágaihoz tartozó szállított mennyiségeket kifejezve azt kapjuk, hogy

$$q' = [GR^T]^{-1}(a - GS^T \cdot q'').$$

Részletesen kiírva egy komponens:

$$q_i' = \beta_i - \sum_{t \in N} \alpha_{it} \cdot q_t'' \qquad (i \in B) \tag{6}$$

ahol

$[GR^T]^{-1} a = \{\beta_i\}$ $\quad (i \in B)$

$[GS \cdot GR^{-1}]^T = \{\alpha_{it}\}$ $\quad (i \in B, t \in N)$

N — a minimális fához nem tartozó élek indexeinek halmaza (illetve a megfelelő q_t'' változó indexeinek halmaza),

B — a fának megfelelő q_i' változó indexeinek halmaza.

A (6) egyenlet azt mutatja, hogy a fa komplementeréhez tartozó vízmennyiségek a fához tartozó vízmennyiségeket egyértelműen meghatározzák.

A következő fejezetben mutatunk be a minimális fa felépítésére egy lehetséges eljárást.

3. A minimális fa felépítése

Minimális fa felépítésére használjuk fel az irodalomból ismert legrövidebb út probléma megoldását.

A gráf minden éléhez hozzá van rendelve egy-egy z_{ij} távolság, amelyek csak pozitív értékeket vehetnek fel. Határozzuk meg a legrövidebb utakat az i-edik csomópontból az összes többi csomópontba. Ezek után a Dujkstra-féle algoritmus segítségével felépítünk egy olyan fát, amely tartalmazza az összes legrövidebb utat az i-edik csomópontból a gráf többi csomópontjába [7]. Az i-edik csomópontot a fa *gyökerének* nevezzük.

A fiktiv élhez hozzárendelt z_{ij} értékét nullának vesszük, gyökerének pedig a fiktív csomópontot választjuk. A Dijkstra-féle algoritmussal felépített fa egyúttal minimális fa is, mivel egy tetszőleges csomópont a fiktív csomópontból legrövidebb úton érhető el a fa mentén és ugyanakkor a fiktív él hossza egyenlő nullával.

A minimális fa meghatározásához szükségünk van az élekhez rendelt z_{ij} értékekre, ezért térjünk vissza a z_{ij} paraméterek megválasztására. Sík terepen tervezendő hálózat esetén a z_{ij} paraméter a csomópontok közötti távolsággal (l_k) egyenlő. Dombos terep esetén az z_{ij} paraméter meghatározásánál viszont figyelembe kell venni a két csomópont közötti magasságkülönbséget.

A minimális fa felépítéséhez használt Dijkstra-féle algoritmus minden egyes lépésben egy további élt csatol a fához. Mielőtt eldöntjük, hogy a kérdéses él hozzátartozik-e a fához vagy sem, ki kell számítanunk az összes olyan él z_{ij} paraméterét, amellyel a fa folytatható:

$$z_{ij} = \alpha_{ij}(\Delta h_{ij}) l_k,$$

ahol

Δh_{ij} — geodéziai magasságkülönbség az i és j csomópont között,

$$\alpha_{ij}(\Delta h_{ij}) = \begin{cases} 1 \le \alpha_{ij} \le 2, & \text{ha } \Delta h_{ij} \ge 0 \\ 0 \le \alpha_{ij} < 1, & \text{ha } \Delta h_{ij} < 0 \end{cases}$$

Az α_{ij} paraméter választása gyakorlati tapasztalat alapján történik és befolyásolja a minimális fa felépítését, de a probléma megoldását nem befolyásolja, mivel a minimális fa csak egy jó közelítést segít előállítani.

Ezzel a minimális fa felépítéséhez minden szükséges ismerettel rendelkezünk és áttérünk a probléma matematikai modelljének a tárgyalására.

4. A probléma matematikai modellje

A minimális fa és megfelelően a G mátrix felbontásának ismeretében írjuk át a (3) Kirchhoff-törvényt:

$$GR \cdot p = s', \tag{8}$$

$$GS \cdot p = s''. \tag{9}$$

Akkor (8)-ból egyértelműen meghatározhatjuk a csomóponti nyomásokat,

$$p = GR^{-1} \cdot s', \tag{10}$$

és behelyettesítjük (9)-be

$$GS \cdot GR^{-1} \cdot s' = s''. \tag{11}$$

A (11) egyenletrendszer nem más, mint a huroktörvény. A (11) kifejezést írjuk át úgy, hogy behelyettesítjük q' értékeket a (6)-ból

$$\sum_{i \in B} \alpha_{it} \cdot f_i(d_i) \cdot \gamma_i(\beta_i - \sum_{t \in N} \alpha_{it} q_t'')^2 = f_t(d_t) \cdot q_t'' \cdot |q_t''| \quad (t \in N), \tag{12}$$

ahol

$$\gamma_i = \operatorname{sign}\,(\beta_i - \sum_{t \in N} \alpha_{it} q_t'').$$

Tehát kaptunk egy nemlineáris egyenletrendszert, amelyben már csak a fa komplementeréhez tartozó él mentén szállított vízmennyiségek és a teljes gráf éleihez tartozó csőátmérők az ismeretlenek.

Most próbáljuk felírni az (5) korlátozó feltételeket ugyanezen ismeretlenek segítségével. A (10) egyenlet megadja a csomóponti nyomáseséseket, ezért a megengedett legnagyobb csomóponti nyomásesés ismeretében az (5) feltétel így írható fel:

$$GR^{-1}s' \leq \Delta p^{\max},$$

vagy

$$\sum_{j \in B} u_{ij} \cdot \gamma_j \cdot f_j(d_j) \cdot (\beta_j - \sum_{t \in N} \alpha_{jt} q_t'')^2 \leq \Delta p_i^{\max} \qquad (i \in I \setminus J) \tag{13}$$

ahol

$GR^{-1} = \{u_{ij}\}$ $(i, j = 1, \ldots, n-1)$

J — olyan csomópontok halmaza, ahol forrás van elhelyezve,

$\Delta p_i^{\max}$ — az i-edik csomóponton megengedett legnagyobb nyomásesés.

A (13) feltételt csak a forrást nem tartalmazó csomópontokon lehet értelmezni, azonkívül nem okvetlenül mindegyikre kell felírni.

A probléma megfogalmazásánál már említettük, hogy optimális csőátmérőket keresünk egy adott csőátmérő-készletből. Ahhoz, hogy ezt matematikailag egyszerűen fel tudjuk írni, vezessünk be egy x_{ij} változót:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik él mentén a } j\text{-edik csőátmérőtípus szerepel és} \\ 0, & \text{ellenkező esetben} \end{cases}$$

Mivel minden él mentén egyidejűleg csak egy csőátmérőtípus szerepelhet, ezért az x_{ij} változókra a következő feltételnek kell teljesülnie:

$$\sum_{j=1}^{j^*} x_{ij} = 1 \qquad (i \in K). \tag{14}$$

Az x_{ij} változó segítségével írjuk fel a d_i és az $f_i(d_i)$ függvényt:

$$d_i = \sum_{j=1}^{j^*} \delta_{ij} \cdot x_{ij},$$

$$f_i(d_i) = h_i \sum_{j=1}^{j^*} \frac{x_{ij}}{\delta_{ij}^5},$$

ahol

δ_{ij} — az i-edik él mentén megengedett j-edik csőátmérő.

h_i = $8{,}27 \cdot 10^7 \cdot r_i \cdot l_i$,

j^* — a megengedett csőátmérők száma.

Ezek után térjünk át a célfüggvény felírására. A hálózat beruházási költsége CEMBROWICZ szerint [2]

$$\sum_{i\in K}\sum_{j=1}^{j^*} l_i \cdot c_i \cdot \delta_{ij}^{1/w} \cdot x_{ij}, \tag{15}$$

ahol

$1 \leq \frac{1}{w} \leq 1{,}5$

c_i — a i-edik átmérőjű vezeték telepítésének folyóméter költsége (Ft/m).

A hálózat teljes üzemeltetési költsége két tényezőből tevődik össze: a szivattyúállomások üzemeltetési költségéből és a hálózat ellenállásának leküzdésére irányuló energiaveszteség költségéből. Az első tényező a szivattyú üzemi nyomásának és a betáplált vízmennyiségnek szorzatával arányos, a második tényező pedig a nyomásesések abszolút értékének összegével.

Ezek után a $C(x, q'')$ célfüggvény a hálózat teljes üzemeltetési és beruházási költségének (15) figyelembevételével:

$$C(x, q'') = k_1 \sum_{i\in B}\sum_{j=1}^{j^*} h_i(\beta_i - \sum_{t\in N}\alpha_{it}q_t'')^2 \cdot \delta_{ij}^{-5}x_{ij} + k_1 \sum_{i\in N}\sum_{j=1}^{j^*} h_i \cdot (q_i'')^2 \cdot \delta_{ij}^{-5}x_{ij} +$$

$$+ k_2 \sum_{i\in K_{sz}} (\beta_i - \sum_{t\in N}\alpha_{it}q_t'') \cdot B_i(q'') + k_3 \sum_{i\in K}\sum_{j=1}^{j^*} l_i \cdot c_i \cdot \delta_{ij}^{1/w} \cdot x_{ij} \to \min. \tag{16}$$

A korlátozó feltételek pedig az előzőek alapján:

$$\sum_{i\in B}\sum_{j=1}^{j^*} h_i \cdot \gamma_i \cdot \alpha_{it}(\beta_i - \sum_{t\in N}\alpha_{it}q_t'')^2 \cdot \delta_{ij}^{-5} \cdot x_{ij} = \sum_{j=1}^{j^*} h_t \cdot q_t''|q_t''| \cdot \delta_{tj}^{-5} \cdot x_{tj} \quad (t\in N) \tag{17}$$

$$\sum_{k\in B}\sum_{j=1}^{j^*} u_{ik} \cdot \gamma_k \cdot h_k \cdot (\beta_k - \sum_{t\in N}\alpha_{kt}q_t'')^2 \delta_{kj}^{-5} x_{kj} \leq \Delta p_i^{\max} \quad (i \in I\setminus J) \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{j^*} x_{ij} = 1 \qquad (i \in K) \tag{19}$$

$$q_i' \leq q_i^{\max} \qquad (i \in K_{SZ}) \tag{20}$$

ahol

k_1, k_2 és k_3 — súlyozási paraméterek (konstansok),
$q_i^{\max}$ — a szivattyú maximális betáplálása,
$B_i(q_i')$ — a szivattyú jelleggörbéje alapján kapott polinom.

A súlyozási paraméterek nagyságrendjétől függ, hogy a tervezendő hálózatban a beruházási vagy az üzemeltetési költségek csökkentésére fektetünk-e nagyobb súlyt.

A célfüggvény első és második tagja a nyomásesések abszolút értékének összegét reprezentálja a fához és a fa komplementeréhez tartozó élek mentén. A harmadik tag a szivattyúállomások üzemeltetési költségét, a negyedik pedig a beruházási költségeket adja meg.

A minimális fa felépítése értelmében a fiktív élek a fához tartoznak. A fiktív élek l_k hosszát nullának vesszük, s így a megfelelő $h_k = 0$. Tehát a célfüggvény első tagjánál az összegezést elegendő a $B \setminus K_{SZ}$ halmazon elvégezni.

A (17) feltétel a huroktörvényt írja le a q_i'' $(i \in N)$ és x_{ij} változók függvényében. A (18) és (20) feltétel megadja a megengedett nyomásesések és megfelelően a szivattyú betáplálásának a felső határértékét.

Tehát egy vegyes nemlineáris programozási feladatot kaptunk, melyben a diszkrét változók x_{ij} csak „0—1" értékeket vehetnek fel, a folytonos változók pedig q'' s a feltételek száma $2m$, az ismeretlenek száma pedig $m \cdot j^* + m - n + 1$.

5. A probléma megoldásának módszerei

A (16)—(20) feladat megoldására két módszert lehet javasolni.

Az első módszer egy két lépésből álló algoritmus. Ebben a lépésben valamilyen heurisztikus eljárással meg kell határozni egy megengedett megoldást, vagyis egy olyan átmérő-kombinációt, amelyre teljesülnek a (17)—(20) feltételek. A heurisztikus eljárás a következő elgondoláson alapszik: ismerve a minimális fát és elindulva mindenhol a legkisebb megengedett csőátmérővel, megoldjuk a (17) nemlineáris egyenletrendszert. A kapott q'' változókra ellenőrizzük a (18) és (20) feltétel teljeslését (a (19) feltétel automatikusan teljesül). Ha a (18) feltétel valamely csomópontban nem teljesül, akkor a fa gyökerétől (forráshely) a csomóponthoz vezető legrövidebb úton kiválasztunk egy másik csőátmérőkombinációt. A kombinációk számának csökkentése és a célfüggvény minimalizálása érdekében feltételezzük, hogy a z_{ij} élhez rendelt paraméterek alapján kialakított fához tartozó élek mentén nagyobb a vízszállítás, mint a fa komplementeréhez tartozó élek mentén. Ezzel azt próbáljuk elérni, hogy a kezdeti becslés minél jobb legyen.

Ha valamely szivattyúra nem teljesül a (20) feltétel, akkor csökkenteni próbáljuk az ehhez a csomóponthoz csatlakozó élek mentén a csőátmérőket. Tehát mérnöki meggondolások alapján heurisztikus eljárás segítségével, véges számú lépés után vagy kapunk egy megengedett megoldást, vagy kiderül, hogy a feltételek nem kompatibilisek (ilyen feltételek mellett nem létezik megoldás). Ha van megengedett megoldás, akkor második lépésként a leszámlálási algoritmus segítségével [6] (implicit enumeration method) próbáljuk csökkenteni a célfüggvény értékét (kiinduló korlátként felhasználva a megengedett megoldás célfüggvényértékét).

Mivel a kombinációk száma egyenlő $(j^*)^m$ és nagyméretű feladatnál ez az algoritmus gyakorlatilag nem használható ilyen formában, ezért egy egyszerűsített leszámlálási algoritmust célszerűbb itt alkalmazni, amely megintcsak a minimális fa ismeretére és a vele kapcsolatos elvekre támaszkodik. Ezzel az algoritmussal véges számú lépésben és gyakorlatilag elfogadható időn belül kapunk egy lokális optimumot.

A második módszernél első lépésben folytonos változónak tekintjük a csőátmérőket. Ebben az esetben a (16)—(20) feladatot célszerű a következőképpen átírni:

$$
\text{(PF)}\quad
\begin{aligned}
&F(d,q) = k_1 \sum_{i\in B} h_i(\beta_i - \sum_{t\in N} \alpha_{it} q_t'')^2 d_i^{-5} + k_1 \sum_{i\in N} h_i(q_i'')^2 \cdot d_i^{-5} + \\
&+ k_2 \sum_{i\in K_{sz}} (\beta_i - \sum_{t\in N} \alpha_{it} q_t'')^2 \cdot B_i(q'') + k_3 \sum_{i\in K_{sz}} l_i \cdot c_i \cdot d_i^{1/w} \to \min \\
&\sum_{i\in B} \alpha_{it} \cdot \gamma_i \cdot h_i(\beta_i - \sum_{t\in N} \alpha_{it} q_t'')^2 \cdot d_i^{-5} = h_t \cdot q_t'' |q_t''| \cdot d_t^{-5} \qquad (t\in N) \\
&\sum_{j\in B} u_{ij} \cdot \gamma_j \cdot h_j(\beta_j - \sum_{t\in N} \alpha_{jt} q_t'') \cdot d_j^{-5} \leq \Delta p_i^{\max} \qquad (i \in I\setminus J) \\
&d_i^{\max} \geq d_i \geq d_i^{\min} \qquad (i\in K) \\
&(\beta_i - \sum_{t\in N} \alpha_{it} q_t'') \leq q_i^{\max} \qquad (i \in K_{sz})
\end{aligned}
$$

Az ily módon felírt (PF) feladatban jelentősen csökkent az ismeretlenek száma $(2m - n + 1)$. A (PF) feladatban mind a célfüggvény, mind a megengedett megoldások halmaza általános esetben nem-konvex, ezért nem garantált a globális optimum elérése, és így csak lokális optimumról beszélhetünk.

Az első lépésben meghatározzuk a (PF) feladat lokális optimumát, ha egyáltalán létezik ilyen. Ehhez a büntető függvények módszerét (penalty function) alkalmazzuk, s így visszavezetjük feladatunkat olyan feltétel nélküli szélsőérték feladatok sorozatára, amelynek megoldására már hatékony módszerek ismertek az irodalomból [4]. E módszerek hatékonyságának növeléséhez egy becsült átmérőrendszerből indulunk ki, és megoldjuk a nemlineáris egyenletrendszert. Az így nyert átmérőkből és a q_t'' $(t\in N)$ változókból kapjuk a második lépéshez a kiinduló megoldást.

Abban az esetben, ha a (PF) feladat lokális optimumának környékén a (16)—(20) feladatnak nincs egyetlen egy megengedett megoldása sem, ez még nem jelenti azt, hogy a (16)—(20) feladatnak egyáltalán nincs megoldása. Ilyen esetben heurisztikus eljárás segítségével próbálunk keresni egy megengedett megoldást. Ha ez az eljárás sem vezet eredményre, akkor a (16)—(20) feladatnak nincs megoldása, ellenkező esetben a leszámlálási algoritmus segítségével keresünk egy lokális optimumot.

A második lépésben az optimális megoldásból kapott átmérőket próbáljuk „diszkretizálni", vagyis keresünk egy olyan megoldást, amelyben az átmérők már csak az adott készlet diszkrét értékeit vehetik fel. Ebben a számítási szakaszban is a minimális fára és a vele kapcsolatos elvekre támaszkodunk.

A (PF) feladat optimális megoldásából kapott átmérő-értékeket aszerint diszkretizáljuk, hogy a megfelelő él hozzátartozik-e a minimális fához vagy sem. Ha hozzátartozik, akkor azt a csőátmérőt választjuk ki a készletből, amely legközelebb esik a kapott értékhez. Ha nem tartozik a minimális fához, akkor a készletben található azon két átmérő közül, melyek közé esik a kapott érték, választjuk ki a kisebbiket. Az így kiválasztott átmérősorozatra megoldjuk a nemlineáris egyenletrendszert, majd kiszámítjuk a célfüggvény és gradiensének értékét. Az utóbbiakat csak az ismeretlen átmérőkre számítjuk ki. A gradiens-vektor komponensei közül kiválasztjuk a legnagyobb abszolút értékű és az előjel figyelembevételével a készletben található megfelelő szomszédos átmérőre cseréljük a gradiens e komponenséhez tartozó csőátmérőt. Ezután újból megoldjuk a nemlineáris egyenletrendszert és ellenőrizzük a korlátozó feltételeket. Ha az utóbbiak teljesülnek, akkor kiszámítjuk a célfüggvény értékét. A célfüggvény értékének csökkenése esetében kiszámítjuk a gradienseket és megismételjük a fent leírt eljárást. Ha a kapott célfüggvényérték nem csökkent, akkor kihagyva az előző lépés változtatását, a nagyság szerinti sorrendben következő abszolút értékű gradiens-komponenssel ismételjük meg a fent említett vizsgálatot.

Ezzel a leszámlálási algoritmussal véges számú lépésben (maximálisan 2^m) kapunk egy lokális optimumot, amely bár nem mindig a globális optimum), a gyakorlat szerint megfelelő megoldást szolgáltat. Látható, hogy az utóbbi módszer segítségével az átmérő-kombinációk számát $(j^*)^m$-ről 2^m-re sikerült csökkenteni.

A következő fejezetben a második módszer algoritmusát írjuk le.

6. Az algoritmus leírása

1. A büntető függvények módszerével megoldjuk a (PF) feladatot.
2. Ha a (PF) feladatnak létezik megoldása, akkor azt (d^0, q^0)-val jelöljük és a 3.-nál folytatjuk, ellenkező esetben a 18.-nál.
3. Előállítjuk a megfelelő diszkrét átmérőkombinációt:

   a) ha az i-edik él a minimális fához tartozik és

$$\delta_{ij_1} \leq d_i^0 \leq \delta_{ij_2} \qquad (i \in K)$$

   akkor

$$d_i^0 - \delta_{ij_1} < \delta_{ij_2} - d_i^0 \text{ esetében } d_i^1 = \delta_{ij_1},$$

$$\text{ellenkező esetben} \qquad d_i^1 = \delta_{ij_2};$$

   b) ha az i-edik él nem tartozik a minimális fához, akkor

$$d_i^1 = \delta_{ij_1}.$$

4. $k = 1$ és $T = K$ (T halmaz azonos a K halmazzal).
5. Az előállított csőátmérő-kombinációra megoldjuk a nemlineáris egyenletrendszert, kiinduló megoldásnak a (d^k, q^0) vektort vesszük. A megoldást jelöljük $y_k = (d^k, q^k)$-val.
6. Ha y_k-ra nem teljesülnek a korlátozó feltételek, akkor a 9.-nél, ellenkező esetben a 7.-nél folytatjuk.
7. Kiszámítjuk a $C_k = F(d^k, q^k)$ célfüggvény értékét y_k pontban.
8. Ha $k = 1$, akkor $Z = C_1$, ellenkező esetben a 9.-nél folytatjuk.
9. Ha $C_k < Z$, akkor a 10.-nél folytatjuk, ellenkező esetben a 15.-nél.
10. Kiszámítjuk a célfüggvény gradiensét d változóra y_k pontban

$$\nabla F_i(d^k, q^k) \qquad (i \in T).$$

11. Megkeressük a

$$\max_{i \in T} |\nabla F_i(d^k, q^k)| = t_i^*$$

értéket.

12. $T = T \setminus \{i^*\}$.
13. Ha $d_i^k = \delta_{ij_1}$, akkor $d_i^{k+1} = \delta_{ij_2}$, ellenkező esetben $d_i^{k+1} = \delta_{ij_1}$.
14. $k = k + 1$, $T = K \setminus \{i^*\}$ és visszatérünk az 5.-re.
15. $T = T \setminus \{i^*\}$.
16. Ha $T \neq \emptyset$ (nem üres), akkor a 12.-nél, ellenkező esetben a 17.-nél folytatjuk.
17. Ha $T \neq \emptyset$ és nem sikerült egy diszkrét átmérő-kombinációt találni, akkor a 18.-nál folytatjuk, ellenkező esetben a Z korlátnak megfelelő megengedett megoldás a (16)—(20) feladatnak egy lokális optimuma és a 20.-nál folytatjuk.
18. Heurisztikus eljárás segítségével keresünk egy megengedett megoldást. Ha sikerült ilyent találni, akkor a 19.-nél folytatjuk, ellenkező esetben a (16)—(20) feladatnak nincs megoldása és a 20.-nál folytatjuk.
19. Az egyszerűsített leszámlálási algoritmus segítségével keresünk egy lokális optimumot.
20. Vége.

IRODALOM

1. Artina, S.: The Use of Mathematical Programming Techniques in Designing Hydraulic Networks. *Meccanica*, (1973), Sept.
2. Cembrowicz, R. G.: Optimierung von Rohrnetzen. In Zielke, W.: Elektronische Berechnung von Rohr- und Gerinneströmungen, Erich Schmidt Verlag, 1974
3. Cenedese, A.—Mele, P.: Optimal Design of Water Distribution Networks, *Journal of the Hydraulics Division*, **104**, No. HY2, 1978, February
4. Fiacco, A. V.—Mc Cormick: Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques. Wiley, New York 1968
5. Garbai, L.—Molnár, L.: Optimization of Urban Public Utility Networks by Diserete Dynamic Programming. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai.* Progress in Operations Research, Eger 1974

6. GARFINKEL, R. S.—NEMHAUSER, G. L.: Integer Programming. John Wiley, New York 1972
7. HU, T. C.: Integer Programming and Network Flows. Addison-Wesley Publishing Company 1970
8. JACOBY, L. S.: Design of Optimal Hydraulic Networks. *Journ. Hydr. Div. Proc. ASCE*, **94**, HY3, 1968
9. KORTE, J. W.—VIELHABER, H.: Ein Beitrag zur Berechnung von Wasserversorgungsnetzen I—IV. *Gas- und Wasserfach* **108** (1967), H. 8, H. 14, H. 24, H. 28
10. KRUSKAL, J. B.: On the Shortest Spanning Subtree of a Grapf and the Traveling Salesman problem. *Proc. Amer. Math. Soc.* **7** (1956), 48—50
11. LAM, C. F.: Discrete Gradient Optimization of Water System. *Journal of the Hydraulics Division*, **99**, No. HY6, 1973, June
12. MOLNÁR, L.: Design of Radial Pipe Networks. *Periodica Polytechnica*, **19**, No. 3.
13. WATANADA, T.: Least-Cost Design of Water Distribution Systems. *Journal of the Hydraulics Division*, **99**, No. HY9, 1973, Sept.

Optimal Design of Tube Networks by Integer Programming. In the paper the author deals with the extension of existing water networks and the design of new ones. For the optimal solution of these problems a nonlinear integer programming model is presented. It differs from models known from literature inasmuch as a) the tube diameters can assume only discrete values; b) the water quantities fed in from the source are not constants given beforehand, but parameters depending on the network; c) minimalisation of the investment costs and the operating expenses has been aimed at.

Das Entwerfen von Rohrnetzen mittels gangzzahliger Programmierung. In der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich der Verfasser mit der Erweiterung vorhandener Wasserleitungsnetze und der Projektierung von neuen Netzen. Für die optimale Lösung dieser Probleme wird ein ganzzahliges nichtlineares Programmierungsmodell vorgestellt, welches sich von den aus dem Schrifttum bekannten insofern unterscheidet, als a) die Rohrdurchmesser nur diskrete Werte annehmen können; b) die von den Quellen eingespeisten Wassermengen nicht vorgegebenen Konstanten, sondern vom Netz abhängige Parameter sind; c) die Minimalisierung der Investitions- und der Betriebskosten zum Ziel gesetzt wird.