

A TREFFTZ—FICHERA MÓDSZER ALKALMAZÁSA HAJLÍTÓ LENGÉST VÉGZŐ RÚD SAJÁTKÖRFREKVENCIÁINAK JAVÍTHATÓ BEHATÁROLÁSÁRA

RICHLIK GYÖRGY*—TÓTH GYÖRGY**

[Beérkezett 1979. január 31-én]

A numerikus kísérletek azt mutatják, hogy az egyfajta lengést végző rudak esetében a sajátfrekvenciák javítható közrefogásához nem feltétlenül célszerű a funkcionálanalízis általános érvényű módszereinek alkalmazása a nagy numerikus munkaigény miatt. A tanulmány célja, hogy a hajlító lengéshez tartozó sajátkörfrekvenciák javítható alsó korlátainak számítása kapcsán igazolja a Trefftz—Fichera-eljárás hatékonyságát. A közrefogáshoz szükséges felső korlátok a Poincaré—Rayleigh—Ritz módszer segítségével határozhatók meg. A Trefftz—Fichera módszer alkalmazásához az eredetileg szereplő változó együttthatós differenciál operátor invertálása szükséges. Az invertálást a dolgozat a disztribúció elmélet felhasználásával hajtja végre, s egyben összefoglalja az általános elmélet vonatkozó elemeit.

1. Bevezetés

Rugalmas, kontinuus szerkezetek rezgési sajátfrekvenciáinak javítható közrefogása többféle módon lehetséges. Sok eljárás közös jellemzője, hogy a Poincaré—Rayleigh—Ritz módszerrel sajátfrekvencia felső korlátokat számítanak, majd ezek ismeretében a funkcionálanalízis különböző módszerei alkalmazásával határoznak meg alsó korlátokat. Nevezetesen WEINSTEIN, ill. BAZLEY és FOX az ún. közbenső operátorok segítségével [1], [2], BOSZNAY a Fichera-féle ortogorális invariánsok módszerével ad alsó korlátok meghatározására eljárást [3], [4]. A közbenső operátorok módszerének BOSZNAY által történt továbbfejlesztése lehetőséget ad változó jellemzőkkel bíró rudakból felépített szerkezet sajátkörfrekvenciáinak javítható behatárolására [5]. (Ez utóbbi módszer nem használja a Poincaré—Rayleigh—Ritz-féle eljárást.).

Szerzők numerikus kísérleteik alapján azt találták, hogy ezeknek az általános módszereknek egyetlen, hajlító lengést végző rúd esetére történő közvetlen alkalmazása nem célszerű, mert mind az alsó, mind a felső korlátok meghatározása viszonylag sok numerikus munkát igényel.

Szerzők ezért azt a célt tűzték ki, hogy megvizsgálják az ugyanezzel a feladattal kapcsolatos alsó korlátok számítására a Trefftz—Fichera eljárás numerikus hatékonyságát. Feltételezik, hogy — például a Poincaré—Ray-

* Richlik György, 3534-Miskolc, Fazola H. u. 7.

** Tóth György, 1016-Budapest, Gellérthegy u. 20–22.

leigh—Ritz módszerrel nyert — elegendő számú és pontosságú felső korlát már rendelkezésre áll.

A feladat megoldása differenciáloperátor invertálását igényli, ennek módszeres végrehajtására szerzők a disztribúcióelméletet alkalmazzák. A követett eljárás közvetlenül az ún. magfüggvényt állítja elő, s nem feltételezi a Green-függvény (és tulajdonságainak) ismeretét. Előkészítésképpen ezért szerzők beiktatták a disztribúcióelmélet idevágó elemeit. A tárgyalásmód a $[0, 1]$ intervallumra korlátozódik, ami azonban az

$$x = a + (b - a)\xi, \quad x \in [a, b] \wedge \xi \in [0, 1]$$

transzformációval tetszőleges, véges $[a, b]$ intervallumra kiterjeszthető.

2. A Trefftz—Fichera-módszer

Legyen a $\mathcal{K}^{-1}$ valós, szimmetrikus, pozitív szemidefinit, teljesen folytonos integrál operátor a $[0, 1]$ intervallumon értelmezve a

$$\mathcal{K}^{-1}v \doteq \int_0^1 K(x, t) v(t) dt \quad (1)$$

összefüggés szerint a $K(x, t) = K(t, x)$ maggal. Ha $\mathcal{K}^{-1}$ sajátértékeit (melyek negatívak nem lehetnek) μ_i -vel és a megfelelő sajátfüggvényeit v_i -vel jelöljük, akkor [6] alapján

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i v_i(x) v_i(t). \quad (2)$$

(E μ_i sajátértékek lengéstani értelmezhetőség esetén (28)-nak megfelelően a sajátkörfrekvencia négyzetek reciprocai.)

Tegyük fel, hogy a sajátfüggvények ortonormált rendszert alkotnak, azaz

$$\int_0^1 v_i(x) v_j(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j \\ 1, & \text{ha } i = j \end{cases}, \quad (3)$$

valamint tételezzük fel, a $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ első k darab sajátértékhez rendelt

$$\mu'_1 \geq \mu'_2 \geq \dots \geq \mu'_k \quad (4)$$

alsó korlátok ismeretét. Ha most $n \leq k$, akkor (2) és (3) alkalmazásával

$$\int_0^1 K(x, x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i + \mu_n + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu_i \geq \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i + \mu_n + \sum_{i=n+1}^k \mu_i.$$

Felhasználva (4)-et

$$\int_0^1 K(x, x) dx \geq \sum_{i=1}^k \mu'_i + \mu_n - \mu'_n,$$

azaz

$$\mu_n \leq \mu'_n + \int_0^1 K(x, x) dx - \sum_{i=1}^k \mu'_i. \quad (5)$$

(Érdemes megjegyezni, hogy (5) speciális esete az ún. Fichera-formulának [3].)

Tehát a (4) alsó korlátok és a $K(x, t)$ mag ismeretében az (5) egyenlőtlenség segítségével felső korlátokat adhatunk a $\mathcal{H}^{-1}$ integrál operátor első k darab μ_i sajátértéke számára. (Az egyenlőtlenséget sajátkörfrekvencia négyzetekre megfogalmazva az alsó és felső jelzők szerepet cserélnek.)

Az ismertetett eljárás feltételezi, hogy a $K(x, t)$ magot explicite ismerjük. (Megjegyezzük, hogy olyan esetekben, amelyekben a magfüggvény nem állítható elő explicit alakban, az ún. közbenső Green-függvények módszere alkalmazható [6], [7].) A következőkben azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy miként lehet közönséges, lineáris differenciál-operátor inverzének magfüggvényét előállítani. Ehhez előljáróban megemlítünk néhány, a továbbiakban felhasználásra kerülő fogalmat a disztribúciók tárgyköréből.

3. Disztribúcióelméleti alapfogalmak

Jelölje $\mathfrak{D}$ az ún. *teszt függvények* terét, legyen t független valós változó. Teszt függvényeknek nevezzük az olyan valós értékű, megfelelő sokszor differenciálható $\Phi \in \mathfrak{D}$ függvényeket, amelyek a $[0, 1]$ intervallumon kívül zérussal egyenlők. Disztribúcióknak nevezzük a $\mathfrak{D}$ -n értelmezett folytonos, lineáris funkcionálokat [8], amelyek terét $\mathfrak{D}'$ -vel fogjuk jelölni.

Lokálisan integrálható $f(t)$ függvény a

$$\langle f, \Phi \rangle = \langle f(t), \Phi(t) \rangle \doteq \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Phi(t) dt, \quad \Phi(t) \in \mathfrak{D} \quad (6)$$

konvergens integrállal $\mathfrak{D}$ -n az f reguláris disztribúciót értelmezi. (Lokálisan integrálható $f(t)$, ha minden egyes véges intervallumon LEBESGUE szerint integrálható.) A nem reguláris disztribúciót szingulárisnak nevezzük. Szinguláris disztribúció például az ún. δ disztribúció, amelynek értelmezése:

$$\langle \delta, \Phi \rangle \doteq \Phi(0), \quad \Phi \in \mathfrak{D} \wedge \delta \in \mathfrak{D}'. \quad (7)$$

A továbbiakban az $f(t)$ jelölést fogjuk használni, akár reguláris, akár szinguláris disztribúció $f \in \mathfrak{D}'$, ahol t a teszt függvények független változóját

jelenti. Az $f(t)$ jelölés csupán kényelmi okokból választott szimbólum; a szinguláris disztribúció esetében nem jelent szokásos értelemben vett függvényt. A δ funkcionál esetében például használni fogjuk a $\delta(t)$ szimbólumot. Az ezzel alkotott

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \Phi(t) dt = \Phi(0), \quad \Phi(t) \in \mathfrak{D}$$

kifejezésnek az értelmét az összefüggés jobb oldala adja. Az irodalom a szinguláris disztribúciót jelölő $f(t)$ szimbólumot gyakran nevezi szimbolikus függvénynek [8].

Az $f, g \in \mathfrak{D}'$ disztribúciók között az egyenlőséget az

$$\langle f, \Phi \rangle \doteq \langle g, \Phi \rangle, \quad \Phi(t) \in \mathfrak{D},$$

az összeadást az

$$\langle f + g, \Phi \rangle \doteq \langle f, \Phi \rangle + \langle g, \Phi \rangle, \quad \Phi(t) \in \mathfrak{D}$$

összefüggés; az $f \in \mathfrak{D}'$ disztribúció λ valós számmal történő szorzását a

$$\langle \lambda f, \Phi \rangle \doteq \langle f, \lambda \Phi \rangle, \quad \Phi(t) \in \mathfrak{D} \quad (8)$$

egyenlőség definiálja.

Az ún. eltolás műveletét az

$$\langle f(t - \tau), \Phi(t) \rangle \doteq \langle f(t), \Phi(t + \tau) \rangle, \quad \Phi(t) \in \mathfrak{D}$$

összefüggés értelmezi, ahol $f(t)$ az $f \in \mathfrak{D}'$ disztribúciónak megfelelő szimbolikus függvény, τ adott valós szám. Az $f(t - \tau)$ szimbolikus függvényt maga a definíció értelmezi.

A δ disztribúció esetében, bevezetve a

$$\delta_\tau \doteq \delta(t - \tau)$$

jelölést

$$\langle \delta_\tau, \Phi \rangle = \langle \delta(t), \Phi(t + \tau) \rangle = \Phi(\tau). \quad (9)$$

Legyen $\psi(t)$ elegendően sokszor differenciálható függvény, akkor $f \in \mathfrak{D}'$ esetében

$$\langle \psi f, \Phi \rangle \doteq \langle f, \psi \Phi \rangle, \quad \Phi(t) \in \mathfrak{D}. \quad (10)$$

Bizonyítható, hogy a fenti tulajdonságú $\psi(t)$ és tetszőleges $\Phi(t) \in \mathfrak{D}$ esetében $\psi(t) \Phi(t) \in \mathfrak{D}$ [8].

Az $f \in \mathcal{D}'$ disztribúció differenciálását az

$$\langle f', \Phi \rangle \doteq \langle f, -\Phi' \rangle, \quad \Phi(t) \in \mathcal{D} \quad (11)$$

szabállyal értelmezzük, amely reguláris f esetében a közönséges szorzat differenciálási szabályából következik.

A

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ 1, & \text{ha } t > 0 \end{cases}$$

függvénnyel értelmezzük a h Heaviside disztribúciót, amellyel a

$$h_\tau \doteq h(t - \tau)$$

jelölés bevezetésével (7), (8) és (10) alapján tetszőleges $\Phi(t) \in \mathcal{D}$ esetében

$$\begin{aligned} \langle h'_\tau, \Phi \rangle &= -\langle h_\tau, \Phi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} h(t) \Phi'(t + \tau) dt = \\ &= -\int_0^{\infty} \Phi'(t + \tau) dt = \Phi(\tau) = \langle \delta_\tau, \Phi \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Legyen $\Phi(t) \in \mathcal{D}$ és $\psi(t)$ elegendően sokszor differenciálható függvény. Akkor az eddigiek alapján

$$\langle \delta_\tau, \psi\Phi \rangle = \psi(\tau) \Phi(\tau) = \psi(\tau) \langle \delta_\tau, \Phi \rangle = \langle \delta_\tau, \psi(\tau) \Phi \rangle,$$

azaz a (10)-et is felhasználó

$$\langle \psi \delta_\tau, \Phi \rangle = \langle \psi(\tau) \delta_\tau, \Phi \rangle$$

összefüggés, valamint a disztribúciókra vonatkozó egyenlőség definíciója alapján

$$\psi(t) \delta(t - \tau) = \psi(\tau) \delta(t - \tau). \quad (13)$$

Legyen $g \in \mathcal{D}'$ adott disztribúció és keressük a primitív függvényét (szimbolikus értelemben véve). Ez megállapodásszerűen a

$$\langle g, \Phi \rangle \doteq \langle f', \Phi \rangle, \quad \Phi(t) \in \mathcal{D}$$

egyenlet megoldását jelenti f -re; $f \in \mathcal{D}'$ a keresett primitív függvény. Bizonyítható, hogy a primitív függvények csak additív konstansban térnek el

egymástól [9]. Beh bizonyítható az is, hogy tetszőleges $\Phi(t) \in \mathfrak{D}$ esetében fennálló

$$\langle f', \Phi \rangle \doteq \langle \delta_\tau, \Phi \rangle = \langle h'_\tau, \Phi \rangle$$

összefüggésből δ_τ primitív függvényére

$$f(t) = h(t - \tau) + \text{konst.} \quad (14)$$

adódik, h_τ primitív függvényét pedig az

$$\langle f', \Phi \rangle \doteq \langle h_\tau, \Phi \rangle$$

egyenlőségből az

$$f(t) = (t - \tau) h(t - \tau) + \text{konst.} \quad (15)$$

formula szolgáltatja.

Végezetül megemlítjük a későbbiekben felhasználásra kerülő, s a $h(t)$ függvény definíciójából közvetlenül belátható

$$\int_0^x h(t - \tau) \psi(t) dt = h(t - \tau) \int_\tau^x \psi(t) dt \quad (16)$$

összefüggést, ahol $\psi(t)$ tetszőleges folytonos függvény és $t, \tau, x \in [0, 1]$.

4. Inverz operátorok és a δ függvény

Legyen a $\mathfrak{K}$ közönséges, lineáris differenciál operátor a $v(x)$, $x \in [0, 1]$ függvények terében értelmezve. A $v(x)$ függvények $\mathfrak{K}$ -nak megfelelően sokszor differenciálható, valamilyen peremfeltételeket kielégítő függvények. $\mathfrak{K}^{-1}$ jelölje $\mathfrak{K}$ inverzét oly módon, hogy $\mathfrak{K}\mathfrak{K}^{-1} = \mathfrak{K}^{-1}\mathfrak{K} = \mathfrak{E}$ és $\mathfrak{K}v = v$ [10].

Feltételezzük, hogy $\mathfrak{K}^{-1}$ integrál operátor a

$$\mathfrak{K}^{-1}v = \int_0^1 K(x, t) v(t) dt \quad (17)$$

összefüggés szerinti $K(x, t)$ maggal. (17)-ből formálisan

$$v(x) = \int_0^1 \mathfrak{K}K(x, t) v(t) dt, \quad (18)$$

mert $\mathfrak{K}$ x vonatkozásában jelent differenciálást.

Mivel a $v(x)$ függvények teljesítik a teszt függvényekre tett kikötéseket, azért (9) és (18) összevetéséből

$$\mathfrak{K}K(x, t) = \delta(x - t). \quad (19)$$

Végeredményben tehát a $K(x, t)$ magfüggvényt (19)-ből határozhatjuk meg úgy, hogy elvégezzük a

$$K(x, t) = \mathfrak{K}^{-1} \delta(x - t) \quad (20)$$

összefüggésben $\mathfrak{K}^{-1}$ által kijelölt integrálásokat, szem előtt tartva az előző pontban összefoglaltakat. Az integrálások során fellépő konstansokat a $v(x)$ függvényekre kiszabott peremfeltételek segítségével határozhatjuk meg.

Közelebből vizsgálva ezt a kérdést, tekintsük a

$$\mathfrak{K}v = f, \quad \mathfrak{S}v = 0 \quad (21)$$

peremérték problémát, ahol f tetszőleges függvénye $x \in [0, 1]$ -nek, $\mathfrak{S}$ a $v = v(x)$ függvényekre kirótt peremfeltételeket kijelölő lineáris operátor. (21)-ből

$$\mathfrak{S}v = \mathfrak{S}\mathfrak{K}^{-1}f = 0,$$

azaz a

$$\int_0^1 \mathfrak{S}K(x, t) f(t) dt = 0$$

összefüggésből $f(t)$ tetszőlegessége miatt

$$\mathfrak{S}K(x, t) = 0 \quad (22)$$

következik. Tehát a $K(x, t)$ mag, mint x függvénye, ki kell, hogy elégítse a $v(x)$ -ekre tett megkötéseket.

5. A dinamikai probléma megoldása

A bevezetésben említett probléma mozgásegyenletének, a benne szereplő fizikai mennyiségek jelentésének részletes ismertetése helyett (ezek megtalálhatók [4] 37–38. oldalain) kiindulásul választjuk a feladat

$$(\mathfrak{A} - \alpha^2 \mathfrak{B})v = 0 \quad (23)$$

operátoros egyenletét, ahol

$$\mathfrak{A}v \doteq \frac{d^2}{dx^2} \left(P \frac{d^2 v}{dx^2} \right), \quad (24)$$

$$\mathfrak{B}v = qv. \quad (25)$$

A (23)–(25)-ben alkalmazott jelölések:

- α a sajátkörfrekvencia,
- $v = v(x)$ az amplitúdó eloszlás függvény,
- $p = p(x), q = q(x)$ a rúd geometriai és anyagi jellemzőit magukban foglaló, pozitív, elegendően sokszor differenciálható függvények, a $[0, 1]$ intervallumon belül sehol sem egyenlők nullával,
- x a független változó a rúd tengelye mentén.

Figyelembe véve, hogy $x \in [0, 1]$, a (23) egyenlethez tartozó peremfeltétel-rendszer:

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, & v'(0) &= 0, \\ v''(1) &= 0, & v'''(1) &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

(Vesszővel itt és a későbbiekben x -szerinti differenciálást jelölünk.)

A (24), (25)-ben definiált $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ operátorok lineárisak, pozitívak, szimmetrikusak, s $\mathcal{A}$ egyben önadjungált differenciáloperátor is. Következésképpen a (23) és (26) egyenletekkel meghatározott sajátértékfeladatnak megszámlálhatóan végtelen sok izolált pozitív sajátértéke van, és ezek a végesben nem torlódhatnak [5]. A sajátértékeket nagyságuk szerint rendezhetjük, a többszörösek megfelelő sokszor véve:

$$\alpha_1^2 \leq \alpha_2^2 \leq \dots \leq \alpha_r^2 \leq \dots \quad (27)$$

Bevezetve ezek után a

$$\mathcal{K}^{-1} \doteq \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}, \quad \mu \doteq \frac{1}{\alpha^2} \quad (28)$$

jelöléseket, a (23)-as egyenlet a

$$\mathcal{K}^{-1} v = \mu v \quad (29)$$

alakot veszi fel, ahol $\mathcal{K}^{-1}$ egy $K(x, t)$ maggal (1) szerint értelmezett integrál operátor. (27)-ből a (28) helyettesítéssel élve

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r \geq \dots \quad (30)$$

Feladatunk a (30) sajátértéksorozat számára felső korlátokat számítani a Trefftz—Fichera módszer segítségével, ha feltételezzük, hogy rendelkezünk k darab

$$\mu'_1 \geq \mu'_2 \geq \dots \geq \mu'_k$$

[4]-ben ismertetett módon meghatározott alsó korláttal.

Először (19) alapján előállítjuk a $K(x, t)$ magot. Az operátorok értelmezését, valamint (13)-at figyelembe véve a

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(p(x) \frac{d^2 K(x, t)}{dx^2} \right) = q(t) \delta(x - t)$$

egyenlethez jutunk. A (14) összefüggés tekintetbevételével

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d^2 K(x, t)}{dx^2} \right) = q(t) h(x - t) + \beta_1(t), \quad (31)$$

majd újabb integrálást végezve (15) alkalmazásával

$$\frac{d^2 K(x, t)}{dx^2} = q(t) h(x - t) \frac{x - t}{p(x)} + \beta_1(t) \frac{x}{p(x)} + \beta_2(t) \frac{1}{p(x)}. \quad (32)$$

A (16) összefüggés felhasználásával (32)-t még kétszer integrálva

$$\begin{aligned} K(x, t) = & q(t) h(x - t) \int_t^x \int_t^u \frac{s - t}{p(s)} ds du + \\ & + \beta_1(t) \int_0^x \int_0^u \frac{s}{p(s)} ds du + \beta_2(t) \int_0^x \int_0^u \frac{1}{p(s)} ds du + \beta_3(t)x + \beta_4(t), \end{aligned} \quad (33)$$

ahol $\beta_1(t), \dots, \beta_4(t)$ tetszőleges függvények, amelyeket (21), (22)-nek megfelelően (26) segítségével határozhatjuk meg. Így $K'''(1, t) = K''(1, t) = 0$ -ból (31) és (32) alapján, mivel $h(1 - t) = 1$

$$\beta_1(t) = -q(t), \quad \beta_2(t) = tq(t). \quad (34)$$

$K'(0, t) = K(0, t) = 0$ -ból (33)-at, (34)-et és $h(-t) = 0$ -t alapul véve

$$\beta_3(t) = \beta_4(t) = 0 \quad (35)$$

következik. (34)-et és (35)-öt (33)-ba helyettesítve

$$K(x, t) = q(t) h(x - t) \int_t^x \int_t^u \frac{s - t}{p(s)} ds du + q(t) \int_0^x \int_0^u \frac{t - s}{p(s)} ds du. \quad (36)$$

A

$$\begin{aligned} \chi(x) &= \int_0^x \frac{ds}{p(s)}, \quad \psi(x) = \int_0^x \frac{s ds}{p(s)}, \\ \eta(x) &= \int_0^x \chi(s) ds, \quad \zeta(x) = \int_0^x \psi(s) ds \end{aligned}$$

függvények bevezetésével (36) a

$$K(x, t) = \begin{cases} q(t) [t \eta(x) - \zeta(x)], & x < t \\ q(t) [xt \chi(t) - x \psi(t) + t \psi(t) - t^2 \chi(t) + t \eta(t) - \zeta(t)], & x > t \end{cases} \quad (37)$$

alakba írható. Az $x > t$ esetet tovább vizsgálva, a szögletes zárójelben levő

kifejezést $x \eta(t) - \zeta(t)$ egyidejű hozzáadásával és levonásával az

$$x \eta(t) - \zeta(t) + (x - t) \xi(t)$$

formába írhatjuk, ahol

$$\xi(t) = t \chi(t) - \psi(t) - \eta(t). \quad (38)$$

A (38) egyenletet t szerint differenciálva

$$\frac{d\xi}{dt} = \chi(t) + \frac{t}{p(t)} - \frac{t}{p(t)} - \chi(t) = 0,$$

amiből $\xi(t) = \text{konst.}$ következik tetszőleges $t \in [0, 1]$ -re. A konstans értéke $\xi(0) = 0$ miatt zérussal egyenlő, és így (37) a

$$G(x, t) = \begin{cases} t \eta(x) - \zeta(x), & x < t \\ x \eta(t) - \zeta(t), & x > t \end{cases} \quad (39)$$

szimmetrikus függvény bevezetésével a

$$K(x, t) = q(t) G(x, t) \quad (40)$$

egyszerű kifejezést nyerjük. (Megjegyezzük, hogy $G(x, t)$ a (26) peremfeltételek mellett az $\mathcal{A}$ operátorhoz tartozó Green-függvény [11], [12], [15].)

(29)-ből (40) segítségével

$$\int_0^1 q(t) G(x, t) v(t) dt = \mu v(x).$$

Az egyenletet beszorozva $\sqrt{q(x)}$ -el és a $w(x) = \sqrt{q(x)} v(x)$ helyettesítést alkalmazva [13], [14], az

$$\int_0^1 \sqrt{q(x) q(t)} G(x, t) w(t) dt = \mu w(x) \quad (41)$$

egyenletet kapjuk. Az így végzett transzformáció során a μ sajátértékek nem változnak, viszont az új

$$K^*(x, t) = \sqrt{q(x) q(t)} G(x, t)$$

mag szimmetrikus és így alkalmazható a Trefftz–Fichera-módszer, azaz a

$$K^*(x, x) = K(x, x)$$

egyenlőség miatt (5) közvetlenül felhasználható.

6. Számpélda

A bemutatott eljárás gyakorlati használhatóságát illusztrálendő, legyen egy körkeresztmetszetű, 1 m hosszú rúd átmérője

$$d(x) = ax + b,$$

ahol $a = -10^{-2}$, $b = 4 \cdot 10^{-2}$ m. Ekkor

$$p(x) = \frac{\pi E(ax + b)^4}{64},$$

$$q(x) = \frac{\pi \rho(ax + b)^2}{4}.$$

Itt $E = \text{konst.}$ a rugalmassági modulus és $\rho = \text{konst.}$ a sűrűség. Ezeket paraméternek hagyva, az 1. táblázat mutatja a számítások eredményeit az első öt sajátkörfrekvenciára vonatkozóan.

1. táblázat

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
$\alpha_{ji}^2 \frac{\rho}{E}$	$1,0284 \cdot 10^{-3}$	$4,327 \cdot 10^{-2}$	$3,062 \cdot 10^{-1}$	1,143	3,217
$\alpha_{ai}^2 \frac{\rho}{E}$	$1,0283 \cdot 10^{-3}$	$4,311 \cdot 10^{-2}$	$2,986 \cdot 10^{-1}$	1,045	2,545

A táblázat első sorában a Poincaré—Rayleigh—Ritz módszerrel számolt felső korlátokat, második sorában a Trefftz—Fichera-módszerrel meghatározott alsó korlátokat találjuk. A felső korlátok számításához szükséges numerikus munkát az MTA SZTAKI C D C 3300 típusú számítógépen végeztük. Alsó korlátok számításához kézi kalkulátor használata is elégségesnek bizonyult.

IRODALOM

1. WEINSTEIN, A.: Bounds for Eigenvalues and the Method of Intermediate Problems. Partial Differential Equations and Continuum Mechanics, Editor R. E. Langer, Madison, The University of Wisconsin Press 1961, 39—53
2. BAZLEY, N. W.—FOX, D. W.: Truncations in the Method of Intermediate Problems for Lower Bounds to Eigenvalues. *Journal of Research of the National Bureau of Standards — B. Mathematics and Mathematical Physics* 65 B (1961), 105—111
3. BOSZNAY, Á.: Lectures on the Université de Liège, 1976. Nov. Old and New Methods for Improvable Bracketing of Eigenfrequencies of Structures
4. KOVÁCS, M.—RICHLIK, GY.—TAKÁCS, F.—TÓTH, GY.: Egyenes tengelyű, a hossza mentén változó jellemzőkkel bíró, hajlító lengést végző rúd sajátkörfrekvenciáinak javítható közrefogása. *Műszaki Tudomány* 54 (1978)

5. BOSZNAY, Á.: Kontinuumnak modellezett rúdszerkezet sajátfrekvenciáinak javítható közrefogása. Doktori értekezés, Budapest 1974
6. WEINBERGER, H. F.: Variational Methods for Eigenvalue Approximation. *Society for Industrial and Applied Mathematics*. J. W. Arrowsmith Ltd., Bristol 3, England, 1974, 115—121
7. WEINSTEIN, A.—STENGER, W.: Methods of Intermediate Problems for Eigenvalues. *Mathematics in Science and Engineering*, Vol 89 (1972), 118—122
8. ZEMANIAN, A. H.: Distribution Theory and Transform Analysis International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw—Hill Book Company, 1965, 1—79
9. SCHWARTZ, L.: Théorie des distributions, vols I. *Actualités Scientifiques et Industrielles*, Hermann & Cie, Paris, 1957, 1959
10. ROACH, G. F.: Green's Functions: Introductory Theory with Applications. Van Nostrand Reinhold Company, London 1970, 142—164
11. COLLATZ, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K.-G. Leipzig 1949, 60—81
12. KANWAL, R. P.: Linear Integral Equations, Theory and Technique. Academic Press New York and London 1971, 61—93
13. FRANK, PH.—MISES, R.: A mechanika és fizika differenciál- és integrálegyenletei I. kötet. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1966, 620—636
14. PENNY, J. E.—REED, J. R.: An Integral Equation Approach to the Fundamental Frequency of Vibrating Beams. *Journal of Sound and Vibration* 19 (1971), 393—400
15. SCHMEIDLER, W.: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik I. Akademische Verlagsgesellschaft, Geest u. Portig K.-G. Leipzig 1950, 328—348

Application of Trefftz—Fichera's Method for the Corrective Delimitation of the Natural Angular Frequency of a Beam Subject to Flexural Oscillation. The numerical experiments suggest that in case of beams subject to some kind of oscillation it is not necessarily reasonable to apply to corrigible delimitation of the angular eigenfrequency the method in general use for the functional analysis due to the laboursome numerical calculation work. The purpose of the paper is to justify the efficiency of the Trefftz—Fichera's method in connection with the calculation of the corrigible lower limits of the angular eigenfrequencies associated with flexural oscillation. The upper limits needed for the delimitation might be determined by the Poincaré—Rayleigh—Ritz's method. To the application of the Trefftz—Fichera's method the inversion of the differential operator of variable coefficient, originally entering in the calculations, is needed. The paper carries out the inversion by making use of the theory of distribution and, at the same time, summarizes the respective elements of the general theory.

Anwendung der Trefftz—Ficheraschen Methode zur korrigierbaren Eingrenzung der Eigenkreisfrequenzen des Biegeschwingungen durchführenden Stabes. Die numerischen Versuche zeigen, daß im Fall der einerlei Schwingung durchführenden Stäbe zur korrigierbaren Eingrenzung der Eigenkreisfrequenzen die Anwendung der allgemein geltenden Methoden der Funktionalanalysis nicht unbedingt zweckmäßig ist. Das Ziel der Abhandlung ist die Wirksamkeit des Trefftz—Ficheraschen Verfahrens im Zusammenhang mit der Berechnung der korrigierbaren unteren Grenzen der zur Biegeschwingungen gehörigen Eigenkreisfrequenzen zu beweisen. Die zur Eingrenzung benötigten oberen Grenzen können mit Hilfe der Poincaré—Rayleigh—Ritzschen Methode ermittelt werden. Zur Anwendung der Trefftz—Ficheraschen Methode ist die Invertierung des ursprünglich vorgekommenen Differentialoperators von veränderlichem Koeffizient nötig. Die Invertierung wird mit Hilfe der Distributionstheorie durchgeführt und die betreffenden Elemente der allgemeinen Theorie werden zusammengefaßt.