EGY EGYENLŐTLENSÉGI RELÁCIÓ AZ ALAKVÁLTOZÁSI ENERGIÁVAL KAPCSOLATBAN

ECSEDI ISTVÁN*

[Beérkezett 1978. május 18-án]

E tanulmány a homogén, izotrop, lineárisan rugalmas anyagú test alakváltozási energiájával kapcsolatban egy egyenlőtlenségi relációt ismertet. A bizonyított egyenlőtlenségi reláció alkalmazását példa szemlélteti.

Fontosabb jelölések

x, y, z derékszögű koordináták,
e_x, e_y, e_z egységvektorok,
$r = xe_x + ye_y + ze_z$ helyvektor,
$u = u(r) = u(r)\, e_x + v(r)\, e_y + w(r)\, e_z$ elmozdulásvektor,
$\varepsilon = \varepsilon(r)$ alakváltozási tenzor,
$\mathbf{T} = \mathbf{T}[r]$ feszültségi genzor,
V térbeli tartomány,
A a V tartomány határoló felülete,
$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} e_x + \frac{\partial}{\partial y} e_y + \frac{\partial}{\partial z} e_z$ Hamilton-féle differenciáloperátor,
„ · " skaláris szorzás jele,
„ : " kétszeres skaláris szorzás jele;
$p = p(r) = p_x e_x + p_y e_y + p_z e_z$ felületi terhelés,
$q = q(r)$ térfogati terhelés,
$\bar{u} = \bar{u}(r)$ adott elmozdulásvektor;
$(u\nabla), (\nabla u)$ az u és ∇ vektorok diadikus szorzatai,
G csúsztató rugalmassági modulus,
$m = \frac{1}{\nu}$ *Poisson*-féle szám,
$\mathbf{K}$ negyedrendű szimmetrikus pozitív definit tenzor,
$\mathbf{I}$ másodrendű egységtenzor,
A_p, A_u komplementer felületszakaszok ($A_u + A_p = A$),
T feszültségi tenzor első skalárinvariánsa,
ε az alakváltozási tenzor első skalárinvariánsa,
U alakváltozási energia,
$U_{11}, \tilde{U}_{12}, \tilde{U}_{21}, \tilde{W}_{12}, \tilde{W}_{21}$ energia, illetve munka jellegű mennyiségek,
n felületi normális egységvektor.

Egyéb mennyiségeket, változókat a szöveg értelmez.

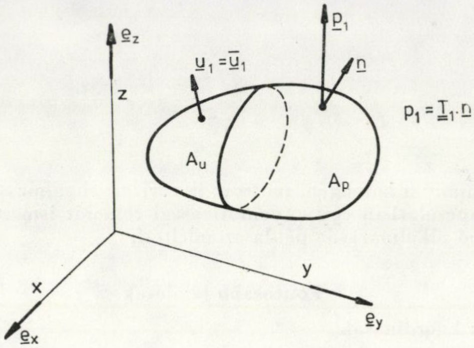
2. Bevezetés, rugalmasságtani alapok, egyenlőtlenségi reláció

E tanulmány tárgya az 1. ábrán vázolt homogén, izotrop, lineárisan rugalmas anyagú kontinuum elasztosztatikai peremértékfeladatára vonatkozik. Az adott test kijelölt elasztosztatikai peremértékfeladatának megoldásához

* Dr. Ecsedi István, H-3531 Miskolc, Vászonfehérítő u. 24. IV/1.

rendelt alakváltozási energiával kapcsolatban egy egyenlőtlenségi relációt bizonyít a dolgozat.

A tanulmány az elasztosztatika szokásos feltevéseit használja (az alakváltozások és az elmozdulások kicsik, érvényes a Hooke-törvény, a szuperpozíció elv, a hőhatások elhanyagolhatók, stb.).



1. ábra. Rugalmas anyagú test

Jelölje a vizsgált kontinuum $q_1 = q_1(r)$ térfogati terheléshez, $p_1 = p_1(r)$ felületi terheiéshez és $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(r)$ kinematikai előíráshoz tartozó elasztosztatikai peremértékfeladatának megoldását az $u_1 = u_1(r)$ elmozdulásmező, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(r)$ alakváltozási tenzormező, $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1(r)$ feszültségi tenzormező. Tudvalevő, hogy az $u_1 = u_1(r)$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(r)$, $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1(r)$ az alábbi mezőegyenletek és peremfeltételek által kijelölt kerületérték feladat megoldásából állíthatók elő ([1], [2]):

$$\mathbf{T}_1 \cdot \nabla + q_1 = 0 \qquad r \in V, \tag{1}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2G}\left(\mathbf{T}_1 - \frac{T_1}{m+1}\mathbf{I}\right) = \mathbf{K} : \mathbf{T}_1 \qquad r \in V, \tag{2}$$

$$(T_1 = \mathbf{T}_1 : \mathbf{I}), \tag{3}$$

$$2\varepsilon_1 = (\nabla u_1) + (u_1 \nabla) \qquad r \in V, \tag{4}$$

$$\mathbf{T}_1 \cdot n = p_1 \qquad r \in A_p, \tag{5}$$

$$u_1 = \bar{u}_1 \qquad r \in A_u .$$

A test alakváltozási energiáját az

$$U_1 = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{T}_1 : \varepsilon_1 \, dV = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{T}_1 : \mathbf{K} : \mathbf{T}_1 \, dV \tag{6}$$

formulával értelmezzük ([2], [3]).

Megjegyzendő, hogy a (3) mezőegyenletben és a (6) formulában szereplő negyedrendű **K** tenzor *szimmetrikus* és *pozitív definit* az alábbi értelemben [5]:

1. bármely szimmetrikus másodrendű **X** és **Y** tenzorokkal fennáll az

$$\mathbf{X} : \mathbf{K} : \mathbf{Y} = \mathbf{Y} : \mathbf{K} : \mathbf{X} \tag{7}$$

azonosság,

2. bármely szimmetrikus másodrendű **X** tenzorral teljesül az

$$\mathbf{X} : \mathbf{K} : \mathbf{X} \geq 0 \tag{8}$$

egyenlőtlenségi reláció és továbbá

$$\mathbf{X} : \mathbf{K} : \mathbf{X} = 0 \tag{9}$$

csak akkor, ha $\mathbf{X} = \mathbf{0}$.

Külső erőrendszer munkájának kétszeresét a

$$W_1 = \int_V q_1 \cdot u_1 \, dV + \int_A (\mathbf{T}_1 \cdot n) \cdot u_1 \, dA = \int_V q_1 \cdot u_1 \, dV + \tag{10}$$
$$+ \int_{A_p} p_1 \cdot u_1 \, dA + \int_{A_u} (\mathbf{T}_1 \cdot n) \cdot \bar{u}_1 \, dA$$

formula alapján számoljuk.

Célszerűnek látszik bevezetni az alábbi mennyiséget:

$$U_{11} = 2 U_1 . \tag{11}$$

Legyen $\tilde{\mathbf{T}}_2 = \tilde{\mathbf{T}}_2(r)$ egy tetszőleges V-ben folytonosan differenciálható *szimmetrikus* másodrendű tenzor, legyen továbbá

$$\tilde{\varepsilon}_2 = \frac{1}{2G}\left(\tilde{\mathbf{T}}_2 - \frac{\tilde{T}_2}{m-1}\mathbf{I}\right) = \mathbf{K} : \tilde{\mathbf{T}}_2 ,$$
$$(\tilde{T}_2 = \mathbf{T}_2 : \mathbf{I}) .$$

A $\tilde{\mathbf{T}}_2 = \tilde{\mathbf{T}}_2(r)$ tenzormező alapulvételével a következő mennyiségeket definiáljuk:

$$\tilde{U}_{22} = \int_V \tilde{\mathbf{T}}_2 : \tilde{\varepsilon}_2 dV = \int_V \tilde{\mathbf{T}}_2 : \mathbf{K} : \tilde{\mathbf{T}}_2 dV , \tag{13}$$

$$\tilde{U}_{12} = \int_V \mathbf{T}_1 : \varepsilon_2 dV , \qquad \tilde{U}_{21} = \int_V \varepsilon_1 : \tilde{\mathbf{T}}_2 dV , \qquad (14), (15)$$

$$q_2 = \tilde{q}_2(r) = -(\tilde{\mathbf{T}}_2 \cdot \nabla) \qquad r \in V , \tag{16}$$

$$\tilde{p}_2 = \tilde{\mathbf{T}}_2 \cdot n \qquad r \in A , \tag{17}$$

$$\tilde{W}_{21} = \int_V \tilde{q}_2 \cdot u_1 \, dV + \int_A (\tilde{\mathbf{T}}_2 \cdot n) \cdot u_1 \, dA . \tag{18}$$

A negyedrendű **K** tenzor szimmetriájának következménye az alábbi egyenlőség:

$$\tilde{U}_{12} = \tilde{U}_{21} . \tag{19}$$

A szorzatfüggvény deriválási szabályának és a Gauss-féle integrálátalakítási tételnek az együttes alkalmazásával a

$$\int_V \tilde{\mathbf{T}}_2 : (u_1 \nabla)\, dV = \int_V T_2 : \epsilon_1\, dV \tag{20}$$

azonosságból kapjuk az

$$U_{21} = W_{21} \tag{21}$$

egyenlőséget.
Abban a speciális esetben, mikor $\tilde{\mathbf{T}}_2 = \tilde{\mathbf{T}}_2(r)$ a vizsgált kontinuum egy elasztosztatikai peremértékfeladatának megoldása, vagyis mikor is a

$$(\nabla \tilde{u}_2) + (\tilde{u}_2 \nabla) = 2\tilde{\epsilon}_2 \qquad r \in V \tag{22}$$

parciális differenciálegyenletnek létezik az $\tilde{u}_2 = \tilde{u}_2(r)$ vektormezőre egyértékű folytonos megoldása, értelmezhetők az alábbi mennyiségek is:

$$\tilde{W}_{12} = \int_V q_1 \cdot \tilde{u}_2\, dV + \int_A (\mathbf{T}_1 \cdot n) \cdot \tilde{u}_2\, dA , \tag{23}$$

$$\tilde{W}_{22} = \int_V \tilde{q}_2 \cdot \tilde{u}_2\, dV + \int_A (\tilde{\mathbf{T}}_2 \cdot n) \cdot \tilde{u}_2\, dA . \tag{24}$$

Könnyen kimutatható, hogy ekkor

$$\tilde{W}_{12} = \tilde{U}_{12} , \tag{25}$$

$$\tilde{W}_{22} = \tilde{U}_{22} . \tag{26}$$

A tanulmány célja bebizonyítani azt, hogy fennáll az

$$U_{11} \tilde{U}_{22} \geq (\tilde{W}_{21}) \tag{27}$$

egyenlőtlenségi reláció.

A (27) egyenlőtlenségi reláció az irodalomból jól ismert

$$U_{11}\, U_{22} \geq (W_{12})^2 \qquad (W_{12} = W_{21}) \tag{28}$$

egyenlőtlenségi reláció általánosításának tekintendő, ahol U_{11}, U_{22}, $W_{12} = W_{21}$ a vizsgált rugalmas test *statikailag* és *kinematikailag* egyaránt lehetséges (tehát ténylegesen megvalósítható) állapotaival kapcsolatos energetikai és munkajellegű mennyiségeket jelölnek [6].

2. A (27) egyenlőtlenségi reláció bizonyítása

Az alakváltozási energiával kapcsolatos (27) egyenlőtlenségi reláció származtatásához tekintsük az alábbi $\Phi = \Phi(\lambda)$ függvényt:

$$\Phi = \Phi(\lambda) = \int_V (\mathbf{T}_1 - \lambda\tilde{\mathbf{T}}_2) : (\mathbf{T}_1 - \lambda\tilde{\mathbf{T}}_2)\, dV. \tag{29}$$

A (29) egyenletben elvégezve a kijelölt kétszeres skaláris szorzást, tagonként integrálva — tekintettel a (6), (13), (14), (15), (19) egyenletekre, a következő eredményre jutunk:

$$\Phi = \Phi(\lambda) = U_{11} - 2\tilde{U}_{12}\lambda + \tilde{U}_{22}\lambda^2. \tag{30}$$

A $\Phi = \Phi(\lambda)$ függvénnyel kapcsolatban a következő megjegyzéseket tehetjük:

a) $\Phi = \Phi(\lambda)$ a λ változó másodfokú racionális egész függvénye, minden valós λ-ra értelmezett,

b) $\Phi = \Phi(\lambda)$ nem negatív, azaz $\Phi(\lambda) \geq 0$ bármely λ-ra,

c) $\Phi(\lambda) = 0$ csak akkor lehetséges, ha $\tilde{\mathbf{T}}_2 = \mu\mathbf{T}_1$, ahol μ egy zérustól különböző egyébként tetszőleges valós állandót jelöl.

A $\Phi = \Phi(\lambda)$ függvény b) és c) tulajdonsága abból következik, hogy a **K** tenzor negyedrendű *pozitív definit szimmetrikus* tenzor a (7), (8), (9) egyenletek által adott értelmezéseknek megfelelően. Az a) és b) tulajdonság következménye, hogy a $\Phi(\lambda) = 0$ egyenlet D diszkriminánsa *nem pozitív*, azaz

$$D = 4\,[(\tilde{U}_{12})^2 - U_{11}\tilde{U}_{22}] \leq 0. \tag{32}$$

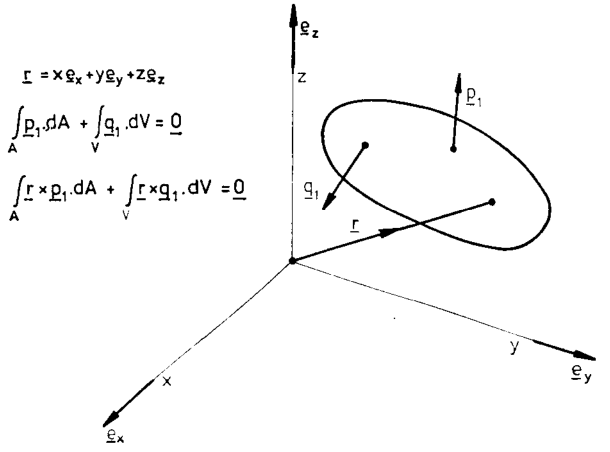
A (32) egyenlőtlenségből következik, hogy

$$U_{11}\tilde{U}_{22} \geq (\tilde{U}_{12})^2. \tag{33}$$

A (33) egyenlőtlenség és a (19), (21) egyenletek kombinálásával kapjuk a bizonyítandó (27) egyenlőtlenségi relációt. A (33), illetve a (27) egyenlőtlenségi relációban az egyenlőség jele csak akkor érvényes a $\Phi = \Phi(\lambda)$ függvény c) tulajdonsága miatt, ha $\tilde{T}_2 = \mu\mathbf{T}_1$.

3. Példa

Az alábbi példában a (27) egyenlőtlenségi reláció alkalmazásával alsó korlátot adunk az egyensúlyi erőrendszerrel terhelt rugalmas test alakváltozási energiájára (2. ábra).



2. ábra. Egyensúlyi erőrendszerrel terhelt rugalmas test

A felületi és térfogati terhelést ismertnek tételezzük fel. Természetesen

$$\int_A \boldsymbol{p}_1 \, dA + \int_V \boldsymbol{q}_1 \, dV = \boldsymbol{0}, \tag{34}$$

$$\int_A \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_1 \, dA + \int_V \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{q}_1 \, dV = \boldsymbol{0}. \tag{35}$$

Legyen

$$\tilde{\mathbf{T}}_2 = f\mathbf{I}, \tag{36}$$

ahol f zérustól különböző tetszőleges skalár állandót jelöl. A tanulmány (13), (18) formulái szerint

$$\tilde{U}_{22} = \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)G} f^2 V, \tag{37}$$

$$\tilde{W}_{21} = f \int_A \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}_1 \, dA = f \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{u}_1 \, dV = f \int_V \varepsilon_1 \, dV. \tag{38}$$

Az irodalom rovatban [4] alatt említett mű 447. oldalán található (42) formula szerint

$$\int_V \varepsilon_1 dV = \frac{1-2\nu}{6(1+\nu)G} \Big(\int_V \boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{r} \, dV + \int_A \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{r} \, dA \Big). \tag{39}$$

A (7) egyenlőtlenségi reláció és (37), (38), (39) egyenletek kombinálásával kapjuk az alábbi alsó korlátot az U_{11} számára:

$$U_{11} \geq \frac{1-2\nu}{18(1+\nu)G} \Big(\int_V \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{r} \, dV + \int_A \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r} \, dA \Big)^2. \tag{40}$$

IRODALOM

1. S. TIMOSHENKO—I. N. GOODIER: Theory of Elasticity, McGraw-Hill. New York—London—Toronto 1951, Sec. Ed., pp. 146—178
2. A. I. LURJE: Theory of Elasticity (In Russian). Izd. Nauka Moscow 1970, pp. 148—173
3. Mechanik der Elastischen Körper. Handbuch der Physik. Band VI. Verlag von Julius Springer, Berlin 1928, pp. 66—77
4. W. NOWACKI: Theory of Elasticity (In Russian). Izd. Nir. Moscow
5. HANDBUCH der Physik. Ed. S. Flügge. Festkörpermechanik II., Band VI. a/2. Springer-Verlag Berlin—Heidelberg—New York 1972
6. BARTA JÓZSEF: Szóbeli közlés

An Inequality Relation in Connection with the Energy of Deformation. The author reports on an inequality relation in connection with the energy of deformation of a homogeneous, isotropic, linearly elastic body. The verified applicability of the inequality relation is demonstrated by an example.

Eine Ungleichheitsrelation in Zusammenhang mit der Verformungsenergie. Es wird eine Ungleichheitsrelation in Zusammenhang mit der Verformungsenergie der homogenen, isotropen Körper aus linearelastischem Material beschrieben. Die Anwendung der nachgewiesenen Ungleichheitsrelation wird anhand eines Beispieles demonstriert.