

ÉRINTKEZÉSI FELADATOK TÁRGYALÁSA VARIÁCIÓS ELVEKKEL*

PÁCZELT ISTVÁN**

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1979. március 22-én]

Jelen beszámoló a rugalmas súrlódás nélküli érintkezési feladatok megoldására alkalmas variációs elvekről ad áttekintést, majd további kutatásokra alkalmas aktuális témákat javasol.

Bevezetés

A műszaki gyakorlatban gyakran fordulnak elő olyan szerkezetek, amelyek — vagy alkotó elemeik — érintkeznek egymással. Velük kapcsolatban a mechanikának feleletet kell adnia olyan kérdésekre, milyen a tényleges érintkezési tartomány alakja, mekkora annak nagysága, hogyan oszlik meg felette az érintkezési feszültség, mint az érintkezésben álló testek között, a szóba jöhető érintkezési tartományon kialakuló, felületen megoszló belső erőrendszer sűrűségvektora, az érintkezésben álló testek elmozdulási és feszültségi állapota megfelelnek-e a szerkezet működéséből adódó követelményeknek, dinamikailag megfelelően viselkednek-e.

A testek közötti kapcsolatok lehetnek egy-, ill. kétoldalúak. Egyoldalú kapcsolatoknál az érintkezési feszültség csak a testbe mutathat, míg ideálisnak tekintett kétoldalú kapcsolat esetében az érintkezési feszültség irányára, nagyságára nincs korlátozás. A nem ideális kétoldalú kapcsolatokkal ragasztásoknál találkozhatunk. Amíg az érintkezési feszültség értéke nem haladja meg a ragasztás által biztosított maximális „adhéziós feszültséget”, a kapcsolat kétoldalú marad, nagyobb feszültségeknél a testek korábban együttmozgó pontjai már elválnak egymástól.

Egyoldalú kapcsolatoknál súrlódásos és súrlódás nélküli eseteket különböztetünk meg.

Áttekintve a téma kutatásának történetét és gazdag irodalmát, azt látjuk, hogy a testek közötti érintkezési kölcsönhatás tisztázása már régóta a kutatás központjában áll a mechanikában. Az első HERTZ által elvégzett vizsgálat óta [1] közel egy évszázad telt el. A HERTZ által kidolgozott elmélet az érintkezési tartomány kis méretét tételezi fel a test többi méretéhez képest.

* A Műszaki Mechanikai Bizottság 1979. február 21-i ülésén elhangzott beszámoló.

** Dr. Páczelt István, Nehézipari Műszaki Egyetem, Mechanikai Tanszék, Egyetemváros, 3515 Miskolc

Ennek ellenére, számos, gépészeti problémánál jelentkező érintkezési feladat tisztázására nyílt lehetőség [2], [3].

Az érintkezési feladatokkal kapcsolatos újabb keletű kutatások a 30-as években kezdődtek el. Így STAERMANN [4], GALIN [5], LURJE [6], MUSZHELIS-VILI [7] jelentősen előrevitték a térbeli és síkbeli rugalmasságtan problémáinak megoldását.

A rugalmasságtanban találjuk a legkidolgozottabb érintkezési feladatokat. Jóval kevesebb munka született az érintkezéssel kapcsolatos peremérték-feladatok megoldására a képlékenységtanban, a visco-rugalmasságtanban, éppen az anyag bonyolult törvények szerinti viselkedése miatt.

A különféle típusú érintkezési feladatok megoldására szolgáló módszerekről ad igen részletes átfogó képet az 1976-ban megjelent, az irodalmi jegyzékben [8] alatti monográfia.

Széles körű alkalmazásra találtak a komplex változós függvényekre alapozott módszerek [5], [7], a szinguláris integrál egyenletek, Wiener–Hopf-féle módszer [9], a duál integrálegyenletekre vezető eljárások [10], a különféle aszimptotikus módszerek [11], és végezetül a vegyes peremérték feladatnak végtelen számú algebrai egyenletrendszeren keresztül történő megoldási módszerei.

Amíg a HERTZ által publikált munka 1882-ben jelent meg, addig az érintkezési feladattal kapcsolatos variációs elvet SIGNORINI csak 1959-ben fogalmazta meg [12]. Feltételezte, hogy a rugalmas test, felületének egy szakaszán merev testtel, súrlódás nélkül úgy érintkezhetik, hogy az említett felületek a terhelés hatására el is válhatnak egymástól. Ezt az elméletet FICHERA fejlesztette tovább [13], aki a rugalmas súrlódás nélküli érintkezési feladatmegoldás létezésének és egyértékűségének bizonyítását is elvégezte. A Coulomb-féle súrlódás feltételezésével megfogalmazható érintkezési feladattal elsőként, a DUVAT—LIONS szerzőpáros által írt könyv foglalkozik [14]. Megadják a megoldás unicitását és existenciáját abban az esetben, amikor az érintkezési feszültség érintőleges összetevő abszolút értékének felső határa (a normál-feszültség súrlódási tényezővel történő szorzata) előzetesen ismert. Úgy tűnik, nincs kidolgozva olyan variációs elv, amely eme korlátozással nem számolna.

A visco-rugalmasságtani érintkezési feladatok megoldásának létezését, egyértékűségét DUVAT [15] és BOUCHER [16] bizonyították.

A fentiekben említett munkák a problémát a funkcionálanalízis eszközeivel tárgyalják, nem térnek ki arra az esetre, amikor az érintkezésben álló mindkét test rugalmas, továbbá nem foglalkoznak a variációs elvekre alapozott számítástechnikai módszerek realizálásának kérdéseivel. A rugalmas testek közötti normális (súrlódás nélküli) érintkezési feladatok megoldására szolgáló variációs elvekkel a [17–21] munkák foglalkoznak.

Az érintkezési feladatok osztályozásáról, megoldatlan problémáiról adnak áttekintést KALKER munkái [22], [23], míg normális érintkezési feladatok közelítő megoldásával kapcsolatos munkákról a [19] munka ad áttekintést.

1. A peremértékfeladat megfogalmazása

Vizsgáljunk egy két rugalmas testből (elemből) felépített szerkezetet. A V^e térfogatú e jelű testet S^e felület határolja. Mindenütt a V^e térfogaton q^e térfogaton megoszló terhelés, az S_p^e felületen adott p^0 sűrűségű felületi terhelés működik, míg S_u^e felületen ismert az u^0 elmozdulás. Az S^e felület megmaradó részén az e jelű test a szomszédos testtel érintkezhetik. A felület ezen részét jelölje S_c^e , amelyet a továbbiakban az e -ik test *szóba jöhető érintkezési tartománya*nak fogunk nevezni.

Kis elmozdulást és alakváltozást feltételezve az érintkezés — rés (elválás) feltételét annak figyelembevételével, hogy az S_c^e ($e = 1, 2$) felületek terheletlen állapotban a viszonyítási koordinátarendszerben közel azonos függvény-nyel jellemezhetők, az alábbiak szerint fogalmazhatjuk meg.

Az érintkező testek S_c^e felületén levő pontjait párba állítjuk (a párt a testek egy-egy pontja alkotja), majd ezen pontok elmozdulását vagy annak bizonyos (pl. normális irányú) komponensét szemléljük az alakváltozás folyamán. A továbbiakban feltételezzük, hogy e pontok az alábbi szabály szerint vannak párba állítva:

Az 1-es test S_c^1 felületén levő Q_1 pontnak a 2-es testen levő Q_2 pontbeli párját, a Q_1 -ben vett n^1 felületi normális által a 2-es test S_c^2 felületéből kidőftt pont alkotja. Mivel az S_c^1 és S_c^2 felületek pontjai egymásnak megfelelői, a jelölések egyszerűsítése érdekében az S_c^e felületeket egyszerűen Ω -val fogjuk jelölni.

Az alakváltozás után az S_c^e ($e = 1, 2$)¹ felületek közötti n^1 irányban mért távolság

$$y(x) \stackrel{\text{def}}{=} u_N^2(x) - u_N^1(x) + h(x) \quad x \in \Omega \quad (1.1)$$

összefüggéssel jellemzett, ahol

$$u_N^e = n^1 \cdot u^e, \quad (1.2)$$

$h(x)$ — a Q_1, Q_2 pontok közötti távolságot, a kezdeti hézagot jelöli, $x = (x_1, x_2, x_3)$ pedig térbeli koordinátát jelöl.

Érintkezés lép fel, ha áll az

$$y = 0 \quad x \in \Omega_p \quad (1.3)$$

geometriai feltétel, és rés van jelen, ha

$$y(x) > 0. \quad x \in \Omega_0 \quad (1.4)$$

Az előzetesen nem ismert Ω_p érintkezési és Ω_0 rés tartományok kielégítik az $\Omega = \Omega_0 + \Omega_p$ feltételt. Itt meg kell jegyezni, hogy az Ω tartományon kívüli

¹ Az e index a továbbiakban 1 és 2 értéket vesz fel. A vektorokat, tenzorokat kövér betűvel, a skaláris és vektoriális szorzást „ $\cdot$ ”, „ $\times$ ”-al jelöljük.

pontokban $y(x) > 0$ $x \in \Omega$ feltételnek kell teljesülnie. Ez a feltétel az érintkezési feladat megoldásakor az Ω „szóba jöhető érintkezési tartomány” helyes kijelölésének ellenőrzésére ad lehetőséget.

Egyoldalú kapcsolatnál az 1-es testre ható érintkezési feszültség rés esetében zérus, vagyis

$$\mathbf{p}(x) = \mathbf{0}, \quad x \in \Omega_0 \quad (1.5)$$

míg érintkezéskor

$$\mathbf{p}(x) = -p_N \mathbf{n}^1 + \mathbf{p}_T \quad x \in \Omega_p \quad (1.6)$$

összefüggéssel jellemzett, ahol $p_N \geq 0$ érintkezési nyomás, $\mathbf{p}_T$ a $\mathbf{p}$ vektor érintőleges összetevője.

Abban az esetben, ha

$$\mathbf{p}_T = \mathbf{0}, \quad (1.7)$$

akkor *súrlódás nélküli ún. normális érintkezési feladatról* beszélünk.

Súrlódás esetében, amennyiben az 1-es test pontjainak a 2-es-hez képesti sebessége

$$\mathbf{v}(x) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p}_T(x) \neq \mathbf{0}, \quad x \in \Omega \quad (1.8)$$

teljes adhézióról beszélünk.

Coulomb-féle súrlódásnál, $y(x) = 0$, $\mathbf{v}(x) = \mathbf{0}$ esetében az adhéziós tartományt találjuk, ahol

$$|\mathbf{p}_T(x)| \leq \mu p_N(x), \quad x \in \Omega_a \quad (1.9)$$

míg $y(x) = 0$, $\mathbf{v}(x) \neq \mathbf{0}$ -nál csúszás lép fel, amikor is

$$\mathbf{p}_T(x) = -\mu p_N(x) \frac{\mathbf{v}(x)}{|\mathbf{v}(x)|} \quad x \in \Omega_s. \quad (1.10)$$

Itt $\Omega_p = \Omega_a + \Omega_s$, illetve az $y(x) > 0$ esetében az Ω_0 rés tartományt kapjuk meg. Vagyis súrlódás esetében az Ω tartomány csúszási, adhéziós és rés tartományokra bomlik fel, míg súrlódás nélküli esetben érintkezési és réstartományokat különböztetünk meg. Mivel mindkét fajtájú érintkezésnél az említett tartományok előzetesen ismeretlenek és általában bonyolult alakúak, a klasszikus megoldási módszerek meghatározásukra alkalmatlanok.

Az érintkezési feladat megoldásakor testenként három, egymással kapcsolatban álló mezőt keresünk: az $\mathbf{u}^e$ elmozdulási, a $\mathbf{T}^e$, $\mathbf{A}^e$ feszültségi és alakváltozási tenzormezőket.

A feszültségi tenzormező köteles kielégíteni a

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^e + \mathbf{q}^e = \mathbf{0}, \quad x \in V^e \quad (1.11)$$

egyensúlyi egyenletet —, az

$$\mathbf{n}^e \cdot \mathbf{T}^e = \mathbf{p}^0, \quad x \in S_p^e \quad (1.12)$$

dinamikai peremfeltételt, az elmozdulásmező az

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{u}^0 \quad x \in S_u^e \quad (1.13)$$

kinematikai peremfeltételt; továbbá fennáll az¹

$$\mathbf{A}^e = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^e + \mathbf{u}^e \nabla) = \mathbf{A}^{eT}, \quad x \in V^e \quad (1.14)$$

geometriai egyenlet, a

$$\mathbf{T}^e = \mathbf{C}^e \dots \mathbf{A}^e; \quad \mathbf{A}^e = \mathbf{C}^{e-1} \dots \mathbf{T}^e \quad (1.15)$$

anyagegyenlet, ahol $\mathbf{C}^e$ — az anyagállandók 4-rendű tenzora. Az Ω tartományban a testek közötti kapcsolat fajtájától függően fennállnak:

Kétoldalú kapcsolatnál az

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{T}^1 + \mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{T}^2 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1 + \mathbf{h} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad x \in \Omega, \quad (1.16a, b)$$

dinamikai és kinematikai illesztési egyenletek ($\mathbf{h}$ — az elmozdulásmezőben fennálló szakadás pl. túlfedésből adódó), *egyoldalú kapcsolatnál, súrlódás nélküli esetben a normál feszültségek vonatkozásában*

$$\begin{aligned} \sigma_N^1 &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{T}^1 \cdot \mathbf{n}^1 = -p_N \leq 0 & x \in S_c^1, \\ \sigma_N^2 &\stackrel{\text{def}}{=} -\mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{n}^2 = -p_N \leq 0 & x \in S_c^2, \end{aligned}$$

azaz

$$\sigma_N^1 = \sigma_N^2, \quad \sigma_N^1 \leq 0, \quad \sigma_N^2 \leq 0, \quad x \in \Omega \quad (1.17)$$

a dinamikai illesztési feltétel, míg a súrlódás hiánya miatt az érintőleges irányú feszültségek

$$\mathbf{p}_T^e = \mathbf{T}^e \cdot \mathbf{n}^e \pm \sigma_N^e \mathbf{n}^1 = \mathbf{0}, \quad \tau^e \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{p}_T^e|, \quad \begin{cases} e = 1 \\ e = 2 \end{cases} \quad x \in \Omega. \quad (1.18)$$

A kinematikai illesztési feltétel

$$y(x) \geq 0, \quad x \in \Omega_d \quad (1.19)$$

¹ T felső index a transzponálás jele, ∇ -Hamilton-féle differenciáloperátort, „ $\cdot \cdot \cdot$ ” kétszeres skalárszorozást jelöl.

ami azt a tényt fejezi ki, hogy a testek egymásba akadálytalanul nem hatolhatnak be. Ugyanakkor, ha az Ω tartomány tetszőleges pontjában érintkezés lép fel, akkor

$$y(x) = 0, \quad p_N(x) > 0, \quad x \in \Omega_p, \quad (1.20a, b)$$

és ha rés van, akkor

$$y(x) \geq 0, \quad p_N(x) = 0, \quad x \in \Omega_0, \quad (1.21a, b)$$

vagyis

$$y(x) p_N(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.22)$$

ahol $\Omega = \Omega_0 + \Omega_p$, Ω_0 , illetve Ω_p tartományok előzetesen nem ismeretesek.

Az érintkezés és rés tartományát az

$$y(x) = 0, \quad p_N(x) \geq 0, \quad x \in \Omega'_p \quad (1.23a, b)$$

$$y(x) > 0, \quad p_N(x) = 0, \quad x \in \Omega'_0 \quad (1.24a, b)$$

feltétellel is megadhatjuk. Az utóbbi abban különbözik az előzőtől, hogy az érintkezési és rés tartományok határát ($y = 0, p_N = 0$) az elválási tartományról az érintkezési tartományhoz csatolja. Természetesen itt is igaz, hogy $\Omega = \Omega'_0 + \Omega'_p$.

Coulomb-féle súrlódás esetében az (1.9)–(1.10) alatti feltételek állnak fenn.

2. Variációs elvek alkalmazása normális érintkezési feladatok megoldására

A variációs elveket oly módon építjük fel, hogy feltételezzük: 1. a keresett mezők testekként, illetve azon belül egymástól függetlenek; 2. a választott elvtől függően követeljük meg előre – „a priori” – a perem-, illesztési – feltételek és mezőegyenletek kielégítését; 3. a $\mathbf{T}^e$ és $\mathbf{A}^e$ tenzorok szimmetricitását eleve adottnak vesszük.

Ha a mező kielégíti a neki megfelelő mezőegyenletet (ME) vagy a perem-, illesztési feltételt (PF), (IF) akkor *kötöttnek* nevezzük, ellenkező esetben szabadnak a ME, PF és IF vonatkozásában. Röviden *szabad egyenletnek* fogjuk nevezni mindazokat a ME–IF-ket, amelyek „a priori” nem voltak kielégítve.

Ismeretes, hogy egyetlen elemből álló szerkezet esetében ($N = 1$) a *szabad, egymástól független* $\mathbf{T}$ és $\mathbf{u}$ mezőkre alapozott számításnál a

$$\begin{aligned} \Pi_R = \Pi_R(\mathbf{T}, \mathbf{u}) = & \sum_{e=1}^N \left\{ \int_{V^e} [\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{u}) - U(\mathbf{T}) - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}] dV \right. \\ & \left. - \int_{S_p^e} \mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{u} dS - \int_{S_u^e} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^0) dS \right\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Reissner-féle funkcionál stacionaritása szükséges és elégséges feltétel a megfelelő szabad egyenletek „előállítására”, és az azokat kielégítő mezők valódiságára. Itt $U(\mathbf{T}) = \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{T} = \frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = U(\mathbf{u})$ az alakváltozási energiasűrűség.

A ME és dinamikai PF szempontjából kötött $\mathbf{T}$ mező esetében a

$$\Pi_c = \Pi_c(\mathbf{T}) = \sum_{e=1}^N \left\{ \int_{V^e} U(\mathbf{T}) dV - \int_{S_e^*} \mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS \right\} \quad (2.2)$$

kiegészítő energiára alapozott minimum elv, míg kinematikai PF szempontjából kötött elmozdulásmező esetében a

$$\Pi_p = \Pi_p(\mathbf{u}) = \sum_{e=1}^N \left\{ \int_{V^e} [U(\mathbf{u}) - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}] dV - \int_{S_p^e} \mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{u} dS \right\} \quad (2.3)$$

potenciális energiára alapozott minimum elv segítségével állítható elő a megoldás.

Kérdésként merül fel, hogyan kell módosítani a fenti klasszikus variációs elveket a normális érintkezési feladatok megoldása számára? A kérdésre adott választ az alábbi gondolattal vezethetjük be.

Először is tisztázzuk, miként módosul a Reissner-féle elv akkor, ha súrlódás nélküli kétoldalú kapcsolatot tételezünk fel az Ω tartomány mentén, majd megkeressük azokat a variációs feltételeket, amelyekkel ugyanez a funkcionál biztosítja az (1.17), (1.20)–(1.22) érintkezési–elválási feltételeket. Ha az egyoldalú kapcsolatból származó korlátozást elvetjük, akkor a kapott funkcionálnak biztosítania kell a már említett kétoldalú kapcsolathoz tartozó érintkezési feladat megoldását is. Látni fogjuk, hogy a bemutatásra kerülő modifikált Reissner-féle elvből a mezőkre kirótt kötöttségek mértékétől függően számos más elv könnyen levezethető.

2.1 Érintkezési feladat tárgyalása súrlódás nélküli kétoldalú kapcsolat esetében

Kétoldalú kapcsolatnál $y \equiv 0$, $x \in \Omega$. Ezt a feltételt, az elmozdulásmezőre kirótt megkötés nélkül, Lagrange-féle multiplikátor (LM) segítségével kívánjuk figyelembe venni. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a (3.1) funkcionálhoz a $-\int_{\Omega} \lambda \cdot \mathbf{y}(\mathbf{u}) dS$ integrált hozzáadva a kapott

$$L = L(\mathbf{T}, \mathbf{u}, \lambda) = \Pi_R(\mathbf{T}, \mathbf{u}) - \int_{\Omega} \lambda y dS \quad (2.4)$$

funkcionál stacionér helyzete szolgáltatja az összes szabad egyenletet.

Valóban, a

$$\delta L = \delta_T L + \delta_n L + \delta_\lambda L = 0 \quad (2.5)$$

egyenlet értelmében, ahol δ_x — az x mező szerinti első variációt jelenti, azt kapjuk, hogy

$$\delta_T L = \sum_{e=1}^2 \left\{ \int_{V^e} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{A}(\mathbf{u})) \cdot \delta \mathbf{T} dV \right. \\ \left. (\text{Hooke-törvény}), \right.$$

$$+ \int_{S_i^e} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{T} \cdot (\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}) dS \Big\} = 0 \quad (2.6a, b) \\ (\text{kinematikai PF}),$$

$$\delta_n L = \sum_{e=1}^2 \left\{ - \int_{V^e} (\nabla \cdot \mathbf{T} - \mathbf{q}) \cdot \delta \mathbf{u} dV \right. \\ (\text{egyensúlyi egyenlet}),$$

$$+ \int_{S_p^e} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{p}^0) \cdot \delta \mathbf{u} dS \\ (\text{dinamikai PF}),$$

$$+ \int_{S_i^e} \tau \delta u_T dS \Big\} \\ (\text{súrlódásmentesség feltétele}),$$

$$+ \int_{S^e} (\sigma_N^1 + \lambda) \delta u_N^1 dS \\ - \int_{S_i^e} (\sigma_N^2 + \lambda) \delta u_N^2 dS = 0 \quad (2.6c-g) \\ (\text{dinamikai illesztési feltétel}),$$

$$\delta_\lambda L = - \int_\Omega \delta \lambda (u_N^2 - u_N^1 + h) dS = 0 \quad (2.6e)$$

(kétoldali kapcsolat geometriai feltétele
súrlódásmentes esetben),

ahonnan az egyes integráloknál szereplő mezők egymástól független variálásokból adódóan nyerjük a zárójelbe írt egyenleteket, feltételeket. Látható az is, hogy az (1.16a) vektoregyenlet normális irányú skalár egyenlete helyett a

$$\sigma_N^1 + \lambda = 0, \quad \sigma_N^2 + \lambda = 0 \quad (2.7a, b)$$

egyenleteket kaptuk, vagyis a λ multiplikátor, mint normálfeszültség, átviteli szerepet tölt be a σ_N^e feszültségek között.

2.2 Módosított Reissner-féle variációs elvek alkalmazása

2.2.1 Első elv

Az egyoldalú kapcsolatból következik, hogy

$$\lambda = -\sigma_N^1 = -\sigma_N^2 \geq 0, \quad x \in \Omega.$$

Mivel a σ_N^e -t a $\mathbf{T}^e$ tenzorból állítjuk elő, és ennek előjelét nem egyszerű közvetlenül biztosítani, ismét az Ω tartomány felett értelmezett Lagrange-féle szorzót alkalmazzuk. Ezt, a nem negativitási követelményeket kielégítő mezőt, ami az érintkezési nyomásnak felel meg, a továbbiakban p_N helyett p -vel fogjuk jelölni. Ily módon a (2.4) helyett az

$$L_R^p = L_R^p(\mathbf{T}, \mathbf{u}, p) = \Pi_R - \int_{\Omega} p \cdot \gamma(\mathbf{u}) dS, \quad p \geq 0, \quad x \in \Omega \quad (2.8)$$

funkcionálra alapozva új variációs elv fogalmazható meg. A tényleges $\mathbf{T}^e$, $\mathbf{u}^e$ mezők és az átviteli szerepet betöltő p kielégítik az alábbi variációs egyenleteket—egyenlőtlenséget

$$\delta_{\mathbf{T}} L_R^p = 0, \quad \delta_{\mathbf{u}} L_R^p = 0, \quad \delta_p L_R^p \leq 0 \quad (2.9a-c)$$

azzal a feltétellel, hogy $p \geq 0$, vagyis rövidebben

$$\delta_p L_R^p \leq 0, \quad p \geq 0\text{-nál.} \quad (2.10)$$

A (2.9a)-ból következik (1.13), (1.15), [(2.6a, b)]; (2.9b)-ből $\lambda = p$ helyettesítéssel (2.7), (1.11), (1.12), (1.18) [2.6c-g]; míg (2.9c)-ből

$$\delta_p L_R^p = - \int_{\Omega} \delta p \cdot \gamma dS \leq 0$$

alapján, $p > 0$ esetén $\rightarrow \delta p$ tetszőleges ($p + \delta p > 0$) és $\gamma = 0$, míg $p = 0$ esetében $\rightarrow \delta p \geq 0$ és $\gamma \geq 0$, vagyis

$$p \geq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad p\gamma = 0 \quad x \in \Omega.$$

azaz megkaptuk az (1.20)–(1.22) érintkezési—elválási feltételeket.

Bizonyítható, hogy a szabadegyenleteknek a (2.6) alatt feltüntetett variált mezőkkel való szorzása és azoknak térfogaton, illetve megfelelő felületen vett integrálja a $\delta_{\mathbf{T}} L_R^p = 0$, $\delta_{\mathbf{u}} L_R^p = 0$ egyenletet adja.

Az (1.20a), (1.21a) alatti tagokat δp -vel megszorozva és azokat az Ω_p és Ω_0 felületeken integrálva, arra a következtetésre jutunk, hogy ezek az integ-

rálok nem lehetnek negatívak, mivel Ω_p felett δp tetszőleges értéket ($p + \delta p > 0$) vehet fel, míg Ω_0 felett $\delta p \geq 0$, a p -re vonatkozó feltételből adódóan. Összegezve ezeket az integrálokat a $-\delta p L_R^p \leq 0$ egyenlőtlenséget kapjuk.

Vagyis a $\delta L_R^p \leq 0$ feltétel szerint vett variáció $p \geq 0$, $x \in \Omega$ mellett, szükséges és elégséges feltételt ad a megfelelő egyenletek valódiságára.

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy ha a tényleges mezőkhöz tartozó funkcionál értékét $L_R^{pT} = L_R^{pT}(\mathbf{T}, \mathbf{u}, p \geq 0)$ -vel jelöljük, akkor a $\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{T} + \delta \mathbf{T}$, $\mathbf{u}^* = \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}$, $\bar{p} = p + \delta p$ lehetséges mezők esetében az L_R^p funkcionál értéke az alábbi egyenlőtlenséget elégíti ki

$$L_R^p(\bar{\mathbf{T}}, \mathbf{u}, \bar{p} \geq 0) \leq L_R^{pT} = L_R^p(\mathbf{T}, \mathbf{u}^*, p \geq 0),$$

vagyis az L_R^p funkcionál a $\bar{\mathbf{T}}$ és $\bar{p}$ vonatkozásában, maximummal rendelkezik a $\mathbf{T}$, $\mathbf{u}$, p pontban, míg tényleges $\mathbf{T}$ és $p \geq 0$, $x \in \Omega$ mezők esetén az $\mathbf{u}^*$ lehetséges mezőnél az L_R^p értéke azonos a tényleges mezőkhöz tartozó értékkel.

2.2.2 Második elv

Az Ω tartomány felett értelmezett testek közötti y rés mezőnek, mint multiplikátor mezőnek a felhasználásával egy új variációs elv fogalmazható meg. Nevezetesen (2.8)-ban p -t helyettesítve $-\sigma_N^e$ -el, majd hozzáadva $-\int_{\Omega} \hat{y} \sigma_N^e dS$ integrált, ahol $\hat{y} \geq 0$ — multiplikátor, az

$$\begin{aligned} L_R^y &= L_R^y(\mathbf{T}, \mathbf{u}, \hat{y}) \\ &= \Pi_R(\mathbf{T}, \mathbf{u}) + \begin{cases} \int_{\Omega} \sigma_N^1 \cdot (u_N^2 - u_N^1 + h - \hat{y}) dS \\ \int_{\Omega} \sigma_N^2 \cdot (u_N^2 - u_N^1 + h - \hat{y}) dS \end{cases} \end{aligned} \quad (2.11a, b)$$

funkcionál

$$\delta_{\mathbf{T}} L_R^y = 0, \quad \delta_{\mathbf{u}} L_R^y = 0, \quad \delta \hat{y} L_R^y \geq 0, \quad (2.12a-c)$$

$\hat{y} \geq 0$, $x \in \Omega$ melletti variációja szolgáltatja a szabad egyenleteket: (1.13), (1.15), $y = u_N^2 - u_N^1 + h$; (1.7), (1.11), (1.12), $\sigma_N^1 = \sigma_N^2$; továbbá (2.12c) feltételből adódóan

$$\text{ha } \hat{y} = 0, \text{ akkor } \delta \hat{y} \geq 0 \rightarrow \sigma_N^e \leq 0 \quad x \in \Omega'_p$$

$$\text{ha } \hat{y} > 0, \text{ akkor } \delta \hat{y} \text{ tetszőleges } (y + \delta y > 0) \rightarrow \sigma_N^e = 0 \quad x \in \Omega'_0$$

vagyis

$$\hat{y} \geq 0, \quad \sigma_N^e \leq 0, \quad \hat{y} \sigma_N^e = 0 \quad x \in \Omega$$

azaz megkaptuk az (1.22)–(1.24) alatti érintkezési-elválási feltételeket.

Igazak a következő egyenlőtlenségek is:

$$L_R^y(\bar{\mathbf{T}}, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{y}} \geq 0) \leq L_R^{yT} \begin{cases} \leq L_R^y(\mathbf{T}, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{y}}^* \geq 0) \\ = L_R^y(\mathbf{T}, \mathbf{u}^*, \hat{\mathbf{y}} \geq 0) \end{cases}$$

A fenti két elvnél, az érintkezési-elválási feltételekben szereplő egyenlőtlenségeket, pótlólagos — az eredeti peremérték-feladatban nem szereplő — mezők felvételével, közvetett úton elégítettük ki.

Alkalmazásukat, approximálásuk egyszerűsége teszi indokolttá. Ezeket az elveket módosított Reissner-féle *hibrid variációs elveknek* nevezhetjük. Amennyiben pótlólagos mezőket nem vesszük fel, úgy két lehetőség kínálkozik az érintkezési feladat tárgyalására. Első esetben a $\mathbf{T}^e$ mezőktől követeljük meg az Ω tartományon a $\sigma_N^1 \leq 0$ vagy $\sigma_N^2 \leq 0$ feltétel kielégítését, a második esetben az $\mathbf{u}^e$ elmozdulás mezőknek az $y = u_N^2 - u_N^1 + h \geq 0$ feltételt kell kielégíteniük.

2.2.3 Harmadik elv

A kérdéses funkcionál az első elvnél alkalmazottból oly módon vezethető le, hogy a p helyett — σ_N^e -et írunk, vagyis

$$\begin{aligned} L_R^a &= L_R^a(\mathbf{T}, \mathbf{u}) = \\ &= \Pi_R(\mathbf{T}, \mathbf{u}) + \begin{cases} \int_{\Omega} \sigma_N^1 y \, dS \\ \int_{\Omega} \sigma_N^2 y \, dS \end{cases} \end{aligned} \quad (2.13a, b)$$

A (2.13)-ra alapozott variációs elvnél, a variálás szabálya

$$\delta_{\mathbf{u}} L_R^a = 0, \quad \delta_{\mathbf{T}} L_R^a \leq 0 \quad a \begin{cases} \sigma_N^1 \leq 0 \\ \sigma_N^2 \leq 0 \end{cases}, \quad x \in \Omega \text{ feltétel mellett.}$$

Érdekes tényként jelenik meg, hogy egyidejűleg a σ_N^1 és σ_N^2 negativitását és azok egyenlőségét nem kell előírni.

A tényleges mezőkhöz tartozó megoldás környezetében áll

$$L_R^a(\bar{\mathbf{T}}, \mathbf{u}) \leq L_R^{aT} = L_R^a(\mathbf{T}, \mathbf{u}^*), \quad (2.14)$$

vagyis a $\mathbf{T}, \mathbf{u}$ pontban az L_R^a elfajult típusú nyeregponthoz rendelkezik.

2.2.4 Negyedik elv

Könnyen belátható, hogy amennyiben a $\sigma_N^1 = \sigma_N^2 = \sigma_N \leq 0$, $x \in \Omega$ feltételt biztosítani tudjuk, úgy a (2.13) alatti funkcionálból kiindulva, a benne szereplő $\int_V \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{u}) dV$ térfogati integrál Gauss–Osztrogradszkij-féle tétellel történő átalakítása révén nyert

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_R &= \tilde{\Pi}_R(\mathbf{T}, \mathbf{u}) = \\ &= -\Pi_c(\mathbf{T}) - \sum_{e=1}^2 \left(\int_{V^e} (\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{u} dV - \int_{\Omega} \tau^e \cdot \mathbf{u}_T^e dS - \right. \\ &\quad \left. - \int_{S^e} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{p}^0) \cdot \mathbf{u} dS \right) + \int_{\Omega} \sigma_N h dS \end{aligned} \quad (2.15)$$

funkcionál $\delta_{\mathbf{u}} \tilde{\Pi}_R = 0$, $\delta_{\mathbf{T}} \tilde{\Pi}_R \leq 0$ egyenlet-egyenlőtlenségek szerinti variációja csakis és csakis akkor áll fenn, ha a $\mathbf{T}^e$, $\mathbf{u}^e$ mezők a tényleges mezők. Ebben az esetben is érvényben van a (2.14) alatti egyenlőtlenség.

2.2.5 Ötödik elv

A (2.11)-ben megkövetelve az $y = u_N^2 - u_N^1 + h \geq 0$ feltétel teljesedését, az érintkezési feladat megoldását a $\Pi_R(\mathbf{T}, \mathbf{u})$ funkcionál

$$\delta_{\mathbf{T}} \Pi_R = 0, \quad \delta_{\mathbf{u}} \Pi_R \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.16)$$

szabály szerinti variálása szolgáltatja. A tényleges mezők kielégítik a (2.16) egyenletet és egyenlőtlenséget.

Ebben az esetben

$$\Pi_R(\bar{\mathbf{T}}, \mathbf{u}) \leq \Pi_R^T \leq \Pi_R(\mathbf{T}, \mathbf{u}^*) \quad (2.17)$$

vagyis a $\mathbf{T}$, $\mathbf{u}$ pont, nyeregpont.

A fenti elvekről ad összefoglaló áttekintést az 1. táblázat.¹

2.3 Módosított kiegészítő energiára alapozott variációs elvek

A fentiekben bemutatott elvekből kiindulva a $\mathbf{T}^e$ mezőkre kirótt kötöttségektől függően az alábbi variációs elvek fogalmazhatók meg.

¹ Ennél és a többi táblázatnál is, a táblázatban feltüntetett mezők a lehetséges mezők. A jelölések egyszerűsítése céljából elhagytuk a $\bar{\mathbf{T}}$, $\mathbf{u}^*$ stb. jelöléseket. Mindazok a lehetséges mezők, amelyek kielégítik az ehhez tartozó variációs egyenlet-egyenlőtlenségeket, egyúttal tényleges mezők.

1. táblázat

Normális érintkezési feladatok megoldására szolgáló módosított Reissner-féle variációs elvek

ELV	Funkcionál	Mezők és azok kötöttségei		Variációs egyenletek—egyenlőtlenségek	
1	$L_R^p = \Pi_R(\mathbf{T}, \mathbf{u}) - \int_{\Omega} p(u_N^2 - u_N + h) dS$	$\mathbf{T}^e, \mathbf{u}^e$ $\mathbf{A}^e = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^e + \mathbf{u}^e \nabla)$ $e = 1, 2$	$p \geq 0$ $x \in \Omega$	$\delta_{\mathbf{T}} L_R = 0$	$\delta_p L_R^p \leq 0$
2	$L_R^y = \Pi_R(\mathbf{T}, \mathbf{u}) + \int_{\Omega} \sigma_N^e(u_N^2 - u_N + h - \hat{y}) dS$ $e = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$		$\hat{y} \geq 0$ $x \in \Omega$	$\delta_{\mathbf{u}} L_R = 0$	$\delta_{\hat{y}} L_R^y \geq 0$
3	$L_R^g = \Pi_R(\mathbf{T}, \mathbf{u}) + \int_{\Omega} \sigma_N^e(u_N^2 - u_N + h) dS$ $e = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$		$\sigma_N^e \leq 0$ $e = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$ $x \in \Omega$	$\delta_{\mathbf{u}} L_R^g = 0$	$\delta_{\mathbf{T}} L_R^g \leq 0$
4	$\tilde{\Pi}_R = -\Pi_A(\mathbf{T}) - \sum_{e=1}^2 \left\{ \int_{V^e} (\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{u} dV \right.$ $\left. - \int_{\Omega} \tau^e u_T^e dS - \int_{S_p^e} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{p}^0) \cdot \mathbf{u} dS \right\} + \int_{\Omega} \sigma_N h dS$		$\sigma_N = \sigma_N^1$ $= \sigma_N^2$ ≤ 0 $x \in \Omega$	$\delta_{\mathbf{u}} \tilde{\Pi}_R = 0$	$\delta \tilde{\Pi}_R \leq 0$
5	$\Pi_R(\mathbf{T}, \mathbf{u})$	$u_N^2 - u_N + h \geq 0$ $x \in \Omega$		$\delta_{\mathbf{T}} \Pi_R = 0$	$\delta_{\mathbf{u}} \Pi_R \geq 0$

2.3.1 Hatodik elv

A (2.8) alatti funkcionált Gauss—Osztrogradszkij-féle integrál átalakítási tétel segítségével átalakítva, majd megkövetelve $\mathbf{T}^e$ -től az egyensúlyi egyenlet, a dinamikai PF és az (1.18) alatti feltétel kielégítését, a 2. táblázat L_C^p funkcionáljához jutunk, amelyben w^e — a normális irányú elmozdulásokat helyettesítő Lagrange-féle multiplikátor mező.

A tényleges mezők kielégítik a táblázatban feltüntetett variációs feltételeket az ott felsorolt mezőkre vonatkozó kötöttségek mellett.

2.3.2 Hetedik elv

Előző elvben a σ_N^e feszültségek negativitását a p mezőn keresztül biztosítottuk. Az L_R^γ analógiája alapján, a σ_N^e mezők negativitását $\hat{y}$ mező segítségével biztosítva, a 2. táblázat L_C^γ funkcionáljára alapozott variációs elvhez jutunk.

2.3.3 Nyolcadik elv

Az érintkezési nyomás pozitivitását a $\mathbf{T}^e$ tenzoroktól megkövetelve, a p , illetve $\hat{y}$ multiplikátorok feleslegessé válnak. Ekkor, ha σ_N^1 és σ_N^2 azonosságát „a priori” nem teljesítjük, úgy az L_C^γ funkcionálban az utolsó tag elhagyásával kapott L_C^e (lásd 2. táblázat) funkcionálra alapozva tisztázhatók az érintkezési-elválási tartományok, továbbá levezethetők a szabad egyenletek.

2.3.4 Kilencedik elv

Amennyiben $\sigma_N^1 = \sigma_N^2 = \sigma_N \leq 0$ feltételt biztosítani tudjuk a nyolcadik elvnél megfogalmazottakon kívül, úgy az érintkezési feladat megoldása során, keressük a

$$\tilde{N}_c = -\Pi_c(\bar{\mathbf{T}}) + \int_{\Omega} \bar{\sigma}_N h dS \quad (2.18)$$

maximumát a $\delta_{\mathbf{T}} \tilde{N}_c \leq 0$ egyenlőtlenség által meghatározott pontban a $\nabla \cdot \bar{\mathbf{T}}^e + \mathbf{q}^e = \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \in V^e$, $\mathbf{n}^e \cdot \bar{\mathbf{T}}^e = \mathbf{p}^0$, $\mathbf{x} \in S_p^e$, $\bar{\sigma}_N = \bar{\sigma}_N^1 = \bar{\sigma}_N^2 \leq 0$, $\bar{\tau}^e = 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$ feltételek „a priori” kielégítése mellett, mivel áll a

$$\tilde{N}_c(\bar{\mathbf{T}}) \leq \tilde{N}_c(\mathbf{T}) \quad (2.19)$$

egyenlőtlenség.

2.3.5 Tizedik elv

Gyakran lehetőség kínálkozik a Green-függvény pontos előállítására: a 2-es jelű testnél, adott támaszok mellett, míg az 1-es testnél, — amely merevtest-szerű mozgást is végezhet — az Ω tartománytól távoli kis területen ható fiktív támasz mellett.

2. táblázat

Normális érintkezési feladattal kapcsolatos módosított kiegészítő energiára alapozott variációs elvek

ELV	Funkcionál	Mezők és azok kötöttségei		Variációs egyenletek—egyenlőtlenségek	
6	$L_C^p = -\Pi_c(\mathbf{T}) - \int_{\Omega} [ph - w^i(p + \sigma_N^i) + w^z(p + \sigma_N^z)] dS$	$\mathbf{T}^e, w^e$	$p \geq 0$ $x \in \Omega$	$\delta_{\mathbf{T}} L_C = 0$	$\delta_p L_C^p \leq 0$
7	$L_C^y = -\Pi_c(\mathbf{T}) + \int_{\Omega} [\sigma_N^e h + (\sigma_N^i - \sigma_N^z) w^j - \hat{y} \sigma_N^e] dS$ $(e = 1, j = 2)$ $(e = 2, j = 1)$	Hooke törvény $\nabla \cdot \mathbf{T}^e + \mathbf{q}^e = \mathbf{0},$ $x \in V^e$	$\hat{y} \geq 0$ $x \in \Omega$	$\delta_w L_C = 0$	$\delta_{\hat{y}} L_C^y \geq 0$
8	$L_C^g = -\Pi_c(\mathbf{T}) + \int_{\Omega} [\sigma_N^e h + (\sigma_N^i - \sigma_N^z) w^j] dS$ $(e = 1, j = 2)$ $(e = 2, j = 1)$	$\mathbf{n}^e \cdot \mathbf{T}^e = \mathbf{p}^0, \quad x \in S_p^e$	$\sigma_N^e \leq 0$ $e = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$ $x \in \Omega$	$\delta_w L_C^g = 0$	$\delta_{\mathbf{T}} L_C^g \leq 0$
9	$\tilde{\Pi}_c = -\Pi_c(\mathbf{T}) + \int_{\Omega} \sigma_N h dS$	$\tau^e = 0, \quad x \in \Omega$ $e = 1, 2$	$\sigma_N = \sigma_N^i = \sigma_N^z \leq 0$ $x \in \Omega$	—	$\delta_{\mathbf{T}} \tilde{\Pi}_c \leq 0$
10	$L_K^p = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} p H(x, x') p' dS' dS + \int_{\Omega} p(f^1 - f^2 - h) dS$ $-\lambda_F \cdot \mathbf{F}(p) - \lambda_M \cdot \mathbf{M}(p)$	Hatásfüggvény felépíthető. λ_F, λ_M	$p \geq 0$ $x \in \Omega$	$\delta_{\lambda_F, \lambda_M} L_K^p = 0$	$\delta_p L_K^p \leq 0$

Az $\mathbf{n}^1$ irányba eső $\mathbf{x}'$ pontbeli egységnyi erőből származó $\mathbf{x}$ pontbeli $\mathbf{n}^1$ normális irányú elmozdulást $H^e(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ -el, a megtámasztott testekre ható ismert erőrendszerből származó normális irányú elmozdulást f^e -el jelölve, az érintkezési feladat vizsgálatára alkalmas funkcionál

$$\begin{aligned} L_K^p &= L_K^p(p, \lambda_F, \lambda_M) = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) (H^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + H^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}')) p(\mathbf{x}') dS' dS + \\ &+ \int_{\Omega} t p dS - \lambda_F \cdot \mathbf{F} - \lambda_M \cdot \mathbf{M}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

ahol $t = f^1 - f^2 - h$; λ_F, λ_M az 1-es test merevtestszerű elmozdulását meghatározó az origóval egybeeső pontjának elmozdulás- és szögelfordulás-vektora,

$$\mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}^0 - \int_{\Omega} \mathbf{n}^1 \cdot p dS, \quad (2.21a)$$

$$\mathbf{M} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}^0 - \int_{\Omega} \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 p dS, \quad (2.21b)$$

$[\mathbf{F}^0, \mathbf{M}^0]$ — az 1-es testre ható ismert erőrendszer origóbéli redukált vektorkettőse.

Az L_K^p funkcionálra alapozott variációs elv állítja, hogy a tényleges érintkezési nyomásmező és a λ_F, λ_M merevtestszerű elmozdulás vektorok kielégítik a

$$\delta_p L_K^p \leq 0, \quad \delta_{\lambda_F, \lambda_M} L_K^p = 0 \quad (2.22)$$

variációs egyenleteket a $p \geq 0, \mathbf{x} \in \Omega$ feltétel mellett. (2.22) értelmében fennállnak az (1.20)–(1.22) alatti feltételek, továbbá a (2.21) alatt definiált $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, vagyis a merevtestszerű mozgással bíró 1-es test egyensúlyban van. A megfogalmazott elv [26] a [24], [17] féle variációs elvek általánosításának tekinthető, mivel [24]-ben $\lambda_F = \lambda_M \equiv \mathbf{0}$ -nak, [17]-ben $f^e = 0$ -nak, továbbá λ_F, λ_M adottnak volt feltételezve.

2.4 Módosított potenciális energiára alapozott variációs elvek

Az anyagtörvényt, geometriai egyenletet adottnak véve, az $\mathbf{u}$ mezőktől a kinematikai PF kielégítését megkövetelve az L_R^p -ből kiindulva, az érintkezési feladat vizsgálatára alkalmas funkcionálok a 2.2–2.3 pontban tett gondolatoknak megfelelően levezethetők. Ezeket, és a hozzájuk tartozó 11.–13. jelű variációs elveket a 3. táblázat tartalmazza.

3. táblázat

Normális érintkezési feladatok vizsgálatára alkalmas módosított potenciális energiára alapozott variációs elvek

ELV	Funkcionál	Mezők és azok kötöttségei		Variációs egyenletek – egyenlőtlenségek	
11	$L_p^p = \Pi_p(\mathbf{u}) - \int_{\Omega} p(u_N^2 - u_N^1 + h) dS$	$\mathbf{u}^e$	$p \geq 0$ $x \in \Omega$	$\delta_{\mathbf{u}} L_p^p = 0$	$\delta_p L_p^p \leq 0$
12	$L_p^y = \Pi_p(\mathbf{u}) - \int_{\Omega} \sigma_N^e(u_N^2 - u_N^1 + h - \hat{y}) dS$ $e = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$	$\mathbf{u}^e = \mathbf{u}^0 \quad x \in S_u^e$ $\mathbf{A}^e = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^e + \mathbf{u}^e \nabla)$ $\mathbf{T}^e = \mathbf{C}^e \dots \mathbf{A}^e$	$\hat{y} \geq 0$ $x \in \Omega$		$\delta_y L_p^y \geq 0$
13	$\Pi_p(\mathbf{u})$	$e = 1, 2$	$u_N^2 - u_N^1 + h \geq 0$ $x \in \Omega$	$\delta_{\mathbf{u}} \Pi_p \geq 0$	—

2.5 Érintkezési feladatok megoldása „variációs elvek kombinálásával”

Gyakran a peremfeltételek lehetővé teszik az egyik test elmozdulási és feszültségi állapotának pontos meghatározását. Tételezzük fel, hogy a 2-es test $H^2(x, x')$, Green-függvénye, a terhelésből származó $\mathbf{n}^1$ irányú f^2 elmozdulása ismert.

Ekkor a test kiegészítő energiáját (2.20) alapján a

$$\Pi_c^2(p) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} p H^2(x, x') p' dS' dS + \int_{\Omega} f^2 p dS + \text{const} \quad (2.23)$$

összefüggéssel számolhatjuk. Figyelembe véve, hogy pontos megoldásnál $\Pi_p^2(p) = -\Pi_c^2(p)$, könnyen konstruálhatók újabb variációs elvek, amelyek az érintkezési nyomás pozitivitását a felvett $p \geq 0$, $x \in \Omega$ mezőn keresztül biztosítják. A szóba jöhető elvek az 1, 6, 11-ből, a 10-nél is alkalmazott variációs szabály figyelembe vételével származtathatók le. Így például a szabad $\mathbf{u}^1$ és $\mathbf{T}^1$ mezők esetében az

$$\begin{aligned} L_R^{pH} &= L_R^{pH}(\mathbf{T}^1, \mathbf{u}^1, p) = \\ &= \Pi_R^1(\mathbf{T}^1, \mathbf{u}^1) - \Pi_c^2(p) + \int_{\Omega} p(u_N^1 - h) dS \end{aligned} \quad (2.24)$$

funkcionál

$$\delta_{\mathbf{T}, \mathbf{u}} L_R^{pH} = 0, \quad \delta_p L_R^{pH} \leq 0, \quad p \geq 0, \quad x \in \Omega$$

szabály szerint vett variálásával jutunk a megoldáshoz, míg $\mathbf{u}^1$ kinematikailag lehetséges elmozdulásterület esetében az

$$\begin{aligned} L_p^{pH} &= L_p^{pH}(\mathbf{u}^1, p) = \\ &= \Pi_p^1(\mathbf{u}^1) + \Pi_p^2(p) - \int_{\Omega} p(h - u_N^1) dS \end{aligned} \quad (2.25)$$

funkcionálból az alábbi szabály szerint nyerhetők a szabad egyenletek:

$$\delta_{\mathbf{u}} L_p^{pH} = 0, \quad \delta_p L_p^{pH} \leq 0, \quad p \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^0, \quad x \in S_u^1.$$

A javasolt elvek előnyösen alkalmazhatók annak tisztázására is, hogy építmények, különféle típusú ágyazatai miként dolgoznak együtt, mivel az ágyazatok kiegészítő energiája, gyakran Green-függvény segítségével előállítható [34].

2.6 Merev elemeket tartalmazó rendszer vizsgálatára alkalmas variációs elvek

Tételezzük, hogy az 1-es test a merev. A variációs elvek szempontjából három eset különböztethető meg:

1. Ismeretes az 1-re működő külső erőrendszer (merevtestszerű mozgása ismeretlen);
2. 2-es test az 1 jelű mozdulatlan merev testre támaszkodik;
3. Az 1-es test merevtestszerű mozgása ismert.

Az 1. esetben az 1-es test egyensúlyának értelmében a (2.21) alatti $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, feltételnek kell teljesülniök. Ezeket a feltételeket az L_K^p funkcionálnál tettekhez hasonlóan λ_F , λ_M multiplikátorokkal vesszük figyelembe. Ily módon, egyik lehetséges variációs elv, az első elv módosításával az

$$\begin{aligned} L_R^p &= L_R^p(\mathbf{T}^2, \mathbf{u}^2, \lambda_F, \lambda_M, p) = \\ &= \Pi_R^2(\mathbf{T}, \mathbf{u}) - \int_{\Omega} p(u_N^2 + h) dS - \lambda_F \cdot \mathbf{F} - \lambda_M \cdot \mathbf{M} \end{aligned} \quad (2.27)$$

funkcionálra támaszkodik. Bizonyítható, hogy a tényleges mezők kielégítik a

$$\delta_{\mathbf{u}, \mathbf{T}, \lambda_F, \lambda_M} L_R^p = 0, \quad \delta_p L_R^p \leq 0, \quad p \geq 0, \quad x \in \Omega \quad (2.28)$$

egyenleteket—egyenlőtlenségeket.

A fentiekben bemutatott átalakítás analógiája alapján a többi elvből is könnyen levezethetők a megfelelő funkcionálok [25].

A 2. esetben megfogalmazható variációs elvekhez tartozó funkcionálokat az 1. esetben kapott funkcionálokban szereplő $\lambda_F \cdot \mathbf{F} + \lambda_M \cdot \mathbf{M}$ tag elhagyásával kapjuk meg.

A 3. esetben, mivel λ_F , λ_M ismeretesek az Ω tartományon, az 1-es test u_N^1 elmozdulása az ismert

$$u_N^1 = (\lambda_F + \lambda_M \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{n}^1$$

összefüggéssel számítható. Behelyettesítve ezen értéket az L_R^p stb. funkcionálba, illetve $\mathbf{T}^1 = \mathbf{A}^1 \equiv \mathbf{0}$ -t véve, megkapjuk az érintkezési feladat variációs elvek felhasználásával történő megoldásához szükséges funkcionálokat.

3. Variációs elvek számítástechnikai realizálásának néhány kérdése

3.1 A variációs elvekben szereplő mezők approximálására, a gyakorlatban szereplő, a bonyolult felépítésű és terhelésű szerkezeti elemek miatt célszerű lokális approximációt, vagyis a végeselemes módszert alkalmazni.

3.2 A tárgyalt variációs elvekre alapozva, a variációs egyenletek—egyenlőtlenségek révén, kvadratus programozási feladat fogalmazható meg.

Az egyenlőtlenségi rendszer méreteinek csökkentése céljából célszerű a „szuper-elem technikát” alkalmazni.

Az 1., 6. elvnél a $\delta_T L_D^p = 0$ ($\Delta = R, C$) egyenlet megoldása után, illetve 11. és 13. elvnél közvetlenül, a diszretizálásból származó programozási feladat formailag

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{q} \mid \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \right\} \quad (3.1)$$

alakban írható fel, míg a 2. és 7. elvnél a

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{j} \mid \hat{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0}, \mathbf{z}^T = [\mathbf{u}^T, \hat{\mathbf{y}}^T] \right\} \quad (3.2)$$

feladathoz jutunk [25]. Itt $\mathbf{K}$ és $\hat{\mathbf{C}}$ pozitív szemidefinit mátrixok, $\mathbf{u}$ — csomóponti elmozdulásokat, $\hat{\mathbf{y}}$ — rés diszkrét pontbeli értékeit tartalmazó vektorok. A 10. és 11. elvekre alapozott kvadratikus programozási feladat felállításával a [26], [27] munka részletesen foglalkozik.

A (3.1), (3.2) alatti „primál feladat”-ot a nemlineáris programozásban használatos Kuhn—Tucker-féle tétel felhasználásával [28] vissza tudjuk vezetni, olyan „duális” programozási feladatra, amelyben az ismeretlenek száma lényegesen lecsökken. Ismeretlenek az érintkezési nyomás vagy rés diszkrét pontbeli értékei, illetve a merevtestszerű mozgást végző testnél a merevtestszerű elmozdulást lekötő elmozdulás-koordináták.

Az 5. és 13. elvnél alakilag a (3.1) feladathoz jutunk, azonban az 1. és 11. elvnél kapott $\mathbf{A}$ és $\mathbf{b}$ mátrixok nem lesznek azonosak az 5. és 13-nál kapottakkal. Az 1. és 11. elvnél, érintkezés—elválás feltételét kis altartományok felett, integrál értelemben ellenőrizzük le, míg az 5. és 13-nál diszkrét pontokban. A 2., 7. elv realizálása több számítást igényel mint az 1. és 11-é. A 9. és 13. elvnél fennáll a

$$\tilde{\Pi}_c(\bar{\mathbf{T}}) \leq \tilde{\Pi}_c(\mathbf{T}) = \Pi_p(\mathbf{u}) \leq \Pi_p(\mathbf{u}^*)$$

egyenlőtlenség, vagyis a két elv segítségével felépített megoldás révén lehetőség nyílik a megoldások korlátok közé szorítására.

3.3 A „duális” programozási feladat előállítását csak akkor végezhetjük el racionálisan, ha az átalakításnál jelentkező egyenletrendszereket több jobboldallal sikerül megoldani. Ily módon az érintkezési feladatok megoldására alkalmas effektív számítógépi programok nagyméretű gépeket igényelnek.

4. Megjegyzések

4.1 A fentiekben a háromméretű testekre megfogalmazott variációs elvek természetesen érvényesek egy-, kétméretű testekre, illetve azok kombinációjára (rugalmas közegegre támaszkodó tartó, lemez stb.), sőt átvihetők a feltéte-

les geometriai (kinematikai) kapcsolatokat tartalmazó rúdszerkezetek vizsgálatára is.

4.2 Amennyiben a rúdszerkezet prizmatikus rudakból van felépítve és az a csomópontokban van terhelve, úgy a feszültségállapot meghatározására szolgáló variációs elvek, illetve az azokhoz kapcsolódó kvadratikusan programozási feladatok levezetésére célszerű a SZABÓ J.-féle tárgyalásmódot felhasználni [29]. Nagy elmozdulások hatását — másodrendű elmélet felhasználásával — [30] munka vizsgálja, míg elsőrendű elmélettel kapcsolatos eredményekről a [31] ad áttekintést. Korlátozott teherbírású kapcsolatok vizsgálatára [32] a fenti variációs elvek alkalmatlanok.

4.3 A dinamikai érintkezési feladatok vizsgálatára alkalmas funkcionálok a kvázistatikus esetbeli 1. — 4., 11., 13. elveknél kapottakból a Hamilton—Osztrogradszkij-féle variáció elv modifikálásával vezethetők le.

Bevezetve a

$$T = T(\dot{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^2 \int_{V^e} \rho \dot{\mathbf{u}}^2 dV \quad (4.1)$$

kinetikus energiát,¹ ahol ρ — a sűrűség, továbbá a $\lambda_1 = p$, $\lambda_2 = \dot{y}$, $\lambda_3 = \sigma_N^e$, $\lambda_4 = \sigma_N$, $\lambda_5 \equiv 0$, $L_{R1} = L_R^p$, $L_{R2} = L_R^y$, $L_{R3} = L_R^e$, $L_{R4} = \tilde{\Pi}_R$, $L_{R5} = \Pi_R$ jelöléseket, a dinamikai feladatok a

$$H_{Ri} = H_{Ri}(\mathbf{T}, \mathbf{u}, \lambda_i) = \int_{t_1}^{t_2} [T(\dot{\mathbf{u}}) - L_{Ri}] dt \quad (4.2)$$

funkcionál segítségével tárgyalhatók. Itt t_1, t_2 tetszőleges választott időintervallum határok. Feltételezve, hogy az $\mathbf{u}$ mező a t_1 és t_2 időpillanatokban előírt feltételeket kielégíti, igazolható, hogy mindazon $\mathbf{T}$, $\mathbf{u}$, λ_i mezők, amelyek kielégítik a

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{u}} H_{Rj} &= 0, \quad (j = 1, \dots, 4); \quad \delta_{\mathbf{T}} H_{Rk} = 0, \quad (k = 1, 2, 5); \\ \delta_{\mathbf{u}} H_{R5} &\geq 0, \quad u_N^2 - u_N^1 + h \geq 0, \quad x \in \Omega, \\ \delta_{\mathbf{T}} H_{Rs} &\leq 0, \quad \sigma_N^e \leq 0, \quad x \in \Omega, \quad e = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \quad s = \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases}; \\ \sigma_N &= \sigma_N^1 = \sigma_N^2 \leq 0 \quad x \in \Omega \\ \delta_p H_{R1} &\leq 0, \quad p \geq 0, \quad x \in \Omega; \quad \delta_{\dot{y}} H_{R2} \geq 0, \quad \dot{y} \geq 0, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (4.3)$$

variációs egyenlet—egyenlőtlenségeket tényleges mezők. Ennek fordítottja is igaz. Tényleges mezők esetében fennállnak a (4.3) alattiak.

¹ A t idő szerinti deriválást $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{\mathbf{u}}$ jelöli.

Hasonlóan nyerhetők a kinematikailag kötött elmozdulásmezőt felhasználó variációs elvek is. Így pl. a

$$H_{P1} = H_{P1}(\mathbf{u}) = \int_{t_1}^{t_2} [T(\dot{\mathbf{u}}) - \Pi_p(\mathbf{u})] dt \quad (4.4)$$

funkcionálból

$$\delta_{\mathbf{u}} H_{P1} \geq 0, \quad u_N^2 - u_N + h \geq 0, \quad x \in \Omega \quad (4.5)$$

egyenlőtlenségek fennállása esetében levezethető az összes szabadegyenlet, vagyis az az $\mathbf{u}^*$ mező, amely kielégíti a (4.5) feltételt, tényleges mező.

A fenti modifikált Hamilton—Osztrogradszkij-féle elvekből levezethető egyenletek: mezőegyenletek, perem- és illesztési feltételek. A dinamikai feladat megoldásához természetesen a $t = 0$ időpillanathoz tartozó kezdeti feltételekre is szükség van:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(0); \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(0). \quad (4.6)$$

A diszkretizálásból származó feladat H_{R1} , H_{R5} , H_{P1} esetében formailag

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T (\mathbf{q} - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}) \mid \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \right\} \quad (4.7)$$

alakban írható fel. Minthogy az $\ddot{\mathbf{u}}$ nem ismeretes, így a (4.7) feladat megoldhatósága érdekében azt megfelelő időlépés felvételével differenciámódszer alapján kell közelíteni, hiszen a testek közötti kezdeti hézag miatt — periodikus gerjesztő erő esetében sem lesz a rendszer mozgása periodikus. Ily módon ezen típusú rugalmas rendszerek dinamikai viselkedésének nyomon követése az $\ddot{\mathbf{u}}$ approximációjától függően vett időpontokbeli kvadrátikus programozási feladatok egymást követő megoldását követeli meg, aminek effektív végrehajtása nagy kapacitású számítógépek nélkül már nem képzelhető el.

A tárgyalt dinamikai kezdeti-peremértékfeladat megoldható oly módon is, hogy az elmozdulásmező időszerinti deriváltját, a $\mathbf{v}$ sebességet, az $\mathbf{u}$ mezőtől függetlenül approximáljuk, sőt az $\mathbf{I}$ impulzust is függetlenül vesszük fel. Ekkor pl. a H_{R1} helyett az

$$\begin{aligned} I_{R1} &= I_{R1}(\mathbf{T}, \mathbf{u}, \lambda_i, \mathbf{v}, \mathbf{I}) = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[-T(\mathbf{v}) + L_{R1} - \sum_{e=1}^2 \int_{V^e} \mathbf{I} \cdot (\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v}) dV \right] dt \end{aligned} \quad (4.8)$$

vagy a

$$\begin{aligned} J_{R1} &= J_{R1}(\mathbf{T}, \mathbf{u}, \lambda_i, \mathbf{I}) = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[T(\mathbf{I}) + L_{R1} - \sum_{e=1}^2 \int_{V^e} \mathbf{I} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV \right] dt, \end{aligned} \quad (4.9)$$

vagy a

$$K_{Ri} = K_{Ri}(\mathbf{T}, \mathbf{u}, \lambda_i, \mathbf{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \left[T(\mathbf{v}) + L_{Ri} - \sum_{e=1}^2 \int_{V^e} \rho \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV \right] dt \quad (4.10)$$

funkcionálokban a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{I}$ szerint vett variációkhoz tartozó kifejezéseket zérussal egyenlővé téve, illetve a (4.3) alatti variálási feltételeket betartva, az összes szabad egyenlet levezethető. A H_{Ri} -nél tárgyalt szabad egyenleteken kívül újabb típusú egyenletek is megjelennek. A korábbi mozgásegyenlet érvényét veszíti és helyette I_{Ri} -nél az $\dot{\mathbf{I}} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{q}$ mozgásegyenlet jelenik meg, továbbá $\mathbf{I} = \rho \mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}$ összeférhetőségi egyenletek vannak érvényben, J_{Ri} -nél az előbbi mozgásegyenlet és $\dot{\mathbf{I}} = \rho \dot{\mathbf{u}}$ összeférhetőségi egyenlet, végezetül K_{Ri} -nél $\rho \dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{q}$ mozgásegyenlet, $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}$ összeférhetőségi egyenlet vezethető le.

Mivel a (4.8)–(4.10) funkcionálokra alapozott számításnál nyert egyenlet–egyenlőtlenségekben az $\mathbf{u}$, illetve $\mathbf{v}$ mezők időszerinti első deriváltja szerepel csak és ezeknek közelítése pontosabban elvégezhető mint a másodrendű deriváltaké, így annak ellenére, hogy az összismeretlenek száma megnő, alkalmazásuk előnyös.

4.4 Rugalmas-képlékeny testek esetében a potenciális energia minimuma elvét (13. elv), illetve a módosított kiegészítő energia maximuma elvét (9. elv) állapotváltozásokra felírva, keressük azokat a sebességmezőket, amelyek az érintkezés-elválás feltételén túlmenően kielégítik a képlékeny tartományokban érvényes

$$f = 0, \quad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{T}}} \cdot \dot{\mathbf{T}} \leq 0$$

mellékfeltételeket is. Itt f – folyási függvény, $\dot{\mathbf{T}}$ – feszültségi sebességi tenzor-mező [33]. Ezek a feladatok is kvadratikusan programozási feladatra vezetnek.

5. Kutatási témák

Az érintkezési feladatokkal kapcsolatos, numerikus módszereket felhasználó kutatások hazánkban a szerző ismerete szerint a BME és NME-re korlátozódnak. Célszerű volna a kutatásokat olyan irányba szélesíteni, amelyek hozzájárulnának

1. a többretegű testek érintkezési feladatainak,
2. a rugalmas-képlékeny alakítási technológiával kapcsolatos érintkezési feladatok megoldásához,
3. a vékonyfalú elemek merevtestekkel történő érintkezési viszonyainak pontosabb tisztázásához,

4. a terhelés-átadással kapcsolatos számos optimalizációs feladat,
5. az ütközéssel, rezgéssel párosuló dinamikai érintkezési feladatok,
6. illetve a nagy elmozdulásokkal kapcsolatos érintkezési feladatok megoldásához.
7. Tovább kellene fejleszteni az analitikus és számítógépi módszereket, különös tekintettel a dinamikai súrlódásnélküli, illetve súrlódásos érintkezési feladatok megoldására.

IRODALOM

1. HERTZ, H.: Über die Berührung fester elastischer Körper, *Journ. für reine und angew. Math* (Crelle), **92** (1882) 156
2. DINNIK, A. N.: Udar i szsati'e uprugih tel. Izbrannie trudi, T. 1, Izd—vo AH USzSzR, 1952
3. BELJAEV, N. M.: Mes'tnije naprjazsenija pri szsatii uprugih tel, szb. sztat'eij „Inzsenernije szooruzsenija i sztroitelnaja mechanika, Izd-vo Put'j, Leningrad 1924
4. STAERMAN, I. Ja.: Kontaktnaja zadacsja t'eorii uprugoszt'i, *Gosztehizdat*, M. 1949
5. GALIN, L. A.: Kontaktnije zadacsi t'eorii uprugoszt'i, *Gosztehizdat*, M. 1953
6. LURJE, A. I.: Prosztransztvennije zadacsi t'eorii uprugoszt'i, *Gosztehizdat*, M. 1955
7. MUSZHELISVILI, N. I.: Nekotorije osznovnije zadacsi matematicszeszkoi t'eorii uprugoszt'i, izd. 5., „Nauka”, M. 1966
8. Razvit'ie t'eorii Kontaktnih zadacs v SzSzSzR, „Nauka”, M. 1976
9. WIENER, M.—HOPF, E.: Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, *Sitzungsber., Akad. Wiss.*, Berlin 1931
10. UFLJAND, J. S.: Integralnije preobrazovanija v zadacsah t'eorii uprugoszt'i. „Nauka”, Leningrad 1968
11. VOROVICS, I. I.—ALAKSZANDROV, B. M.—BABESKO, V. A.: Neklasszicszeszkije szmesannije zadacsi t'eorii uprugoszt'i, „Nauka”, M. 1974
12. SIGNORINI, A.: Questioni di elasticiti non linearizzata o semilinearizzata, *Rend. di Matem. e. delle suo Appl.*, **18**, (1959), 17—31
13. FICHERA, G.: Problemi elastostatici con vincali unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno, *Mem. Accad. Naz. Lincei*, Ser 8, **7**, (1964), 91—140
14. DUVAT, G.—LIONS, J. L.: Les inéquations en mécanique et en physique, „Dunot”, Paris, 1972
15. DUVAT, G.: Le problème de Signorini en — viscoélasticité linéaire, *C. R. Acad. Sci, Paris*, **268**, (1969), 1044—1046
16. BOUCHER, M.: Signorini's problem in viscoelasticity. *Proc. Symp of IUTAM: The mechanics of Contact between Deformable Bodies*, Eds.: De PATER, KALKER, „Delft UP”, (1975), 41—53
17. KALKER, J. J.—van RANDEN, Y.: A minimum Principle for Frictionless Elastic Contact with Application to Non — Hertzian Half — Space Contact Problem, *J. Engng. Math.*, **6** (1972), 193—206
18. PANAGIOTOPULUS, P. D.: On the Unilateral Contact Problem of Structures with a Non-quadratic Strain Energy Density, *Int. J. Solids Structures*, **13**, (1977), 253—261
19. PÁCZELT, I.: Rugalmas rendszerek érintkezési feladatainak megoldása matematikai programozással, *NME Közlemények*, IV. sorozat, *Természettudományok*, **22**, (1977), 184—224
20. KRAVCSUK, A. Sz.: Posztanovka zadacsi o kontakte neszkolkih deformirujemih t'el kak zadacsi nelinejnovo programmirovanija, *PMM*, tom **42**, (1978), 466—474
21. ROZIN, L. A.: Variacionnije posztanovki zadacs dlja uprugih szisztém, Izd. Leningradszkovo universite'ta, Leningrad 1978
22. KALKER, J. J.: Aspects of Contact Mechanics, *Proc. Symp. of IUTAM: The Mechanics of Contact between Deformable Bodies*, Eds.: De PATER, KALKER, „Delft UP”, (1975), 1—25
23. KALKER, J. J.: A Survey of the Mechanics of Contact between Solid Bodies, *ZAMM* **57**, (1977), T3—T17
24. FRIDMAN, V. M.—CSERNINA, V. Sz.: Iteracionnij processz dlja resen'ija konecsnomernoj kontaktnoj zadacsi, *Zs. VMiMF*, t. **7**, No 1 (1967), 160—163

25. PÁCZELT, I.: Primenenije kvadraticsnovo programirovanija v kontaktnih zadacsah t'eorii uprugoszt'i, *NME Idegennyelvi Közlemények*, D. Natural Sci. Vol 33 (1979), 171—221
26. PÁCZELT, I.: Some Remarks on the Approximate Solution of Frictionless Elastic Contact Problems., *Acta Techn. Hung.*, **83**, (1976), 337—355
27. PÁCZELT, I.—HERPAI, B.: Note to the Solution of Contact Problems of the Elastic Shells. *Achiwum Budowy Maszyn*, Tom XXIV, Zeszyt 2 (1977), 187—202
28. KUNZI, H. P.—KRELLE, W.: Nichtlineare Programmierung, Springer-Verlag, Berlin 1962
29. SZABÓ, J.—ROLLER, B.: Rúdszerkezetek elmélete és számítása, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972
30. ROLLER, B.—SZENTIVÁNYI, B.: Extremumsätze und deren Anwendungen in der Theorie zweiter Ordnung der Stab- und Flächentragwerke, *Acta Techn. Hung.* **83**, (1976), 381—392
31. PÁCZELT, I.—HERPAI, B.: Megjegyzés a feltételes kinematikai kapcsolatokkal rendelkező rúdszerkezetek számításához, *Műszaki Tudomány* **56** (1978), 49—85
32. KALISZKY, S.: Feltételes kapcsolatokat tartalmazó szerkezetek vizsgálata, *Építés- és Építészettudomány*. **6**, (1974), 325—339.
33. KALISZKY, S.: Képlékenységtan, Akadémiai Kiadó, Budapest 1975.
34. PÁCZELT, I.: A kombinált talajmodelleken fekvő rugalmas szerkezetek variációs elvek alapján való vizsgálata, *Építés- és Építészettudomány*. **11**, (1979), 209—220

Treatment of Contact Problems with the Aid of Variation Principles. The paper is a report on the variation principles which may be applied to the solution to the problems of elastic frictionless contact and suggests current subject-matters suitable for further research investigations.

Behandlung von Berührungsaufgaben mit Hilfe von Variationsprinzipien. Die Abhandlung gibt eine Übersicht über die Variationsprinzipien, die zur Lösung der elastischen, reibungsfreien Berührungsaufgaben geeignet sind, und schlägt zu weitere Forschungen geeignete aktuelle Gegenstände vor.