EGYENES TENGELYŰ, A HOSSZA MENTÉN VÁLTOZÓ JELLEMZŐKKEL BÍRÓ, HAJLÍTÓ LENGÉST VÉGZŐ RÚD SAJÁTKÖRFREKVENCIÁINAK JAVÍTHATÓ KÖZREFOGÁSA

II. RÉSZ

BOSZNAY ÁDÁM*
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA
és
RICHLIK GYÖRGY**—TÓTH GYÖRGY***

[Beérkezett: 1979. május 8-án]

A dolgozat a címbeli feladatot a Poincaré—Rayleigh—Ritz-módszer és a Fichera-féle eljárás segítségével oldja meg, s felhívja a figyelmet a numerikus megoldás kapcsán előadódó néhány problémára.

1. Bevezetés, célkitűzés

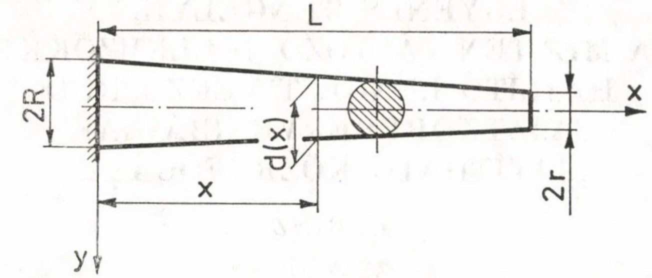
A fenti címmel megjelent előző tanulmány [1] tömören összefoglalja a címbeli feladat egy lehetséges megoldását, nevezetesen a javítható felső korlátokat a Poincaré—Rayleigh—Ritz-féle finitizálással számítja, majd bemutatja a Fichera-formula használatát javítható alsó korlátok meghatározására. A gyakorlat számára való hozzáférhetőség előmozdítása végett szerzők szükségesnek tartják, hogy számpélda kapcsán felhívják a figyelmet néhány, az alkalmazás során előforduló problémára. A továbbiakban [1]-et jelen tanulmány I. részének tekintjük, és az erre történő hivatkozások esetén az illetékes egyenletszám előtt az I. jelölést alkalmazzuk.

2. A példa

Vizsgálatunk tárgya: egyik végén befogott, másik végén szabad, a hossztengelye mentén lineárisan változó átmérőjű, körszelvényű rúd, melyről feltételezzük, hogy homogén tömegeloszlású és rugalmassági modulusa állandó. A rúd „saját koordinátarendszerét” és meghatározó geometriai paramétereit az 1. ábrán tüntettük fel. Ezek segítségével a d átmérő, az A keresztmetszeti terület és a keresztmetszeti síkidom itt szükséges I_z másodrendű nyomatéka:

$$d(x) = \frac{2}{L}[LR - (R - r)x], \tag{1}$$

* Prof. Dr. Bosznay Ádám, 1123 Budapest, Győri út 12.
** Richlik György, 1073 Budapest, Akácfa u. 59.
*** Tóth György, 1016 Budapest, Gellérthegy u. 20—22.



1. ábra. A rúd saját koordináta-rendszere és meghatározó geometriai paraméterei

$$A(x) = \frac{\pi}{L^2}[LR - (R - r)x]^2, \tag{2}$$

$$I_z(x) = \frac{\pi}{4L^4}[LR - (R - r)x]^4. \tag{3}$$

Ezen függvények, valamint $\varrho =$ áll. és $\mathbf{E} =$ áll. ismeretében az I. (4)-ben definiált operátor szimbólumokat meghatároztuk. Az I. (6) peremfeltételrendszer jelen esetben a

$$v(o) = 0\,, \quad v'(o) = 0 \tag{4}$$

geometriai és

$$v''(L) = 0\,, \quad v'''(L) = 0 \tag{5}$$

dinamikai peremfeltételekkel egyenértékű. (Vesszővel x-szerinti differenciálást jelölünk.)

3. A $\varphi_n(x)$ bázisfüggvények megválasztásáról

Az alábbiakban *csak* azt a részproblémát vizsgáljuk e kérdés kapcsán, hogy elegendő-e példánkban ezeket a függvényeket a megengedett (a peremfeltételek közül csak a geometriaiakat kielégítő) függvényosztályból választani.

E bővebb függvényosztály alkalmazhatóságához elégséges, ha a feladat egy speciális definitségi feltételnek [2] tesz eleget, melyet Collatz az elv felfedezője, Kamke nevének kezdőbetűjéről **K**-definitségnek nevezett [4].

A **K**-definitség fennállásának vizsgálatához esetünkben elegendő a Rayleigh-hányados számlálójában szereplő $(\mathcal{A}\varphi, \varphi)$ skalárszorzat vizsgálata.

Kétszeres parciális integrálással

$$(\mathcal{A}\varphi, \varphi) = \int_0^L EI_z(x)\,\varphi''^2(x)\,dx + \big[R(\varphi)\big]_0^L \tag{6}$$

adódik, ahol

$$R(\varphi) = \big[\varphi(x)\big(EI_z(x)\varphi(x)\big) - EI_z(x)\varphi'(x)\varphi''(x)\big]_0^L \tag{7}$$

a Dirichlet-féle peremtag.

KAMKE [2] szerint e definitség vizsgálatára példánkban azután kerülhet sor, ha (7)-ből az (5) alatti dinamikai peremfeltételekkel ki lehet küszöbölni a második és harmadik deriváltakat. Esetünkben a $\varphi''(0)$-t és $\varphi'''(0)$-t tartalmazó tagok (5)-tel nem küszöbölhetők ki, így a **K** definitség vizsgálatára sor sem kerülhet.

Példánkban tehát a Kamke-féle elv alapján nem lehetséges a megengedett függvények alkalmazása. A φ_n függvényeket (lásd I.-et) ezért a komparatív függvények halmazából fogjuk választani.

4. Az alkalmazott φ_n függvények

Numerikus kísérleteink szerint pontosabb korlátokat kapunk, ha Hermite-polinomok helyett a (4) és (5) peremfeltételekkel ellátott $d^4/(dx)^4$ operátor sajátfüggvényeivel dolgozunk. Hasonló feladatban MICHLIN is ezeket alkalmazta [3]. Ezek:

$$\varphi_n = a_{1n} \sin \beta_n x + a_{2n} \cos \beta_n x + a_{3n} \sinh \beta_n x + a_{4n} \cosh \beta_n x, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

ahol a β_n-ek a

$$\cosh \beta L \cdot \cos \beta L + 1 = 0 \tag{9}$$

transzcendens egyenlet pozitív β gyökei, a_{jn}-nek ($j = 1, 2, 3, 4$) pedig ki kell, hogy elégítsék a (4), (5) peremfeltételekből következő

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \beta_n & 0 & \beta_n & 0 \\ -\beta_n^2 \sin \beta_n L & -\beta_n^2 \cos \beta_n L & \beta_n^2 \sinh \beta_n L & \beta_n^2 \cosh \beta_n L \\ -\beta_n^3 \cos \beta_n L & \beta_n^3 \sin \beta_n L & \beta_n^3 \cosh \beta_n L & \beta_n^3 \sinh \beta_n L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ a_{4n} \end{bmatrix} = 0$$

egyenletrendszert. Itt az együttható mátrix rangja 3, mert pl. a bal alsó sarokelemhez tartozó harmadrendű aldetermináns

$$\beta_n^3 \cosh \beta_n L + \beta_n^3 \cos \beta_n,$$

illetve a (9) karakterisztikus egyenletet is figyelembe véve

$$\beta_n^3 \left(\cosh \beta_n L - \frac{1}{\cosh \beta_n L} \right)$$

értékű, ami csak $\beta_n = 0$ esetében zérus, ezt az esetet viszont az előzőekben kirekesztettük.

Ennek következtében az a_{jn}-ek közül egy szabad ismeretlenünk van; egy lehetőség például az $a_{1n} = 1$ választás; egy másik lehetőség az, ha például az $(\mathcal{A}\varphi_n, \varphi_n) = 1$ előírással normáljuk φ_n-et. Így számol pl. MICHLIN [3].

Az a nyilvánvaló tény, hogy a sajátkörfekvenciákra így nyerhető felső korlátokat a szabad ismeretlen választása nem befolyásolja, numerikus vizsgálatainkban is tükröződött. Számításainkban mi az $a_{4n} = 1$ választással éltünk, s így

$$a_{2n} = - a_{4n} = -1 ,$$

valamint

$$a_{1n} = - a_{3n} = \frac{\cos \beta_n L + \cosh \beta_n L}{\sin \beta_n L + \sinh \beta_n L} .$$

7. Alsó korlátok számítása

Alsó korlátokat az I. (12) formula segítségével számíthatunk, ha előzetesen az I. (13) ortogonális invariánsban szereplő integrálok értékeit meghatároztuk. Ehhez először ismernünk kell az I. (14)-ben definiált operátorokat. Konkrét esetünket tekintve, az

$$E_a \doteq E, \qquad \varrho_a \doteq \varrho$$

$$A_a \doteq A(L) = r^2\pi , \quad I_{za} \doteq I_z(L) = \frac{r^4\pi}{4} \tag{10}$$

állandók megadásával definiált „alsó alapfeladat" (eredeti feladatunk geometriai peremfeltételeit kielégítő, prizmatikus olyan körszelvényű rúd, amelynek átmérője az eredeti feladatunkban szereplő rúd legkisebb átmérőjével egyenlő, vagy annál kisebb, és eredeti rúdunkkal azonos anyagjellemzőkkel rendelkezik) birtokában az $\mathcal{A}_a$, $\mathcal{B}_a$, $\mathcal{C}_a$ és $\mathcal{M}_a$ operátorokat az I. részben közölt összefüggések szerint felírhatjuk. A $\mathcal{G}_a$ operátor az „alsó alapfeladat" Green függvényével, mint magfüggvénnyel képzett integráloperátor. A magfüggvény előállításához [4] induljunk ki az

$$\eta_a(x) = a_1 \pm b_1 + (a_2 \pm b_2)x + (a_3 \pm b_3)x^2 + (a_4 \pm b_4)x^3 \tag{11}$$

függvényből, ahol a „+" jel van érvényben, ha $x \leq \xi$, a „—" jel van érvényben, ha $x \geq \xi$ és $x, \xi \in [0, L]$. Az x-től független a_i, b_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ mennyiségeket a (4), (5) peremfeltételek segítéségvel határozhatjuk meg, ha tekintettel vagyunk arra, hogy az $x = \xi$ helyen $\eta_a(x)$, $\eta_a'(x)$, $\eta_a''(x)$ folytonos, $\eta_a'''(x)$-nek pedig $1/E\, I_{za}$ ugrása van. (Mechanikailag az így konstruált Green-függvény az „alsó alapfeladat" rúd tengelyének $x = \xi$, $\xi \in [0, L]$ támadáspontú, y tengellyel párhuzamos vektorú egységnyi erő hatására tetszőleges $x \in [0, L]$

helyen létrejött eltolódását adja meg.) Figyelembe véve, hogy az a_i, b_i ($i = 1, 2, 3, 4$) mennyiségek között lesznek ξ-től függők is, $\eta_a(x)$ helyett $G_a(x, \xi)$ jelölést használva esetünkben

$$G_a(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{6EI_{za}}(3\xi x^2 - x^3), & \text{ha} \quad x \leq \xi \\ \dfrac{1}{6EI_{za}}(3\xi^2 x - \xi^3), & \text{ha} \quad x \geq \xi . \end{cases} \tag{12}$$

(12)-ből látható, hogy tetszőleges **L** hosszúságú rúd esetében ugyanez a Green-függvény érvényes. Az I. (14)-ben szereplő határozott integrálok értékének kiszámítása, valamint a kijelölt mátrix invertálások számítógéppel elvégezhetők, amennyiben az ott szereplő $\eta_s(x)$ ($s = 1, \ldots k_1$) és $\zeta_t(x)$ ($t = 1, \ldots k_2$) lineárisan független rendszereket előzetesen megválasztjuk. (Megjegyezzük, hogy nem szükséges két lineárisan független függvényrendszert konstruálni, sőt felhasználható a (8) függvényrendszer is.) Ezután már I. (13) konkrét számérték formájában rendelkezésünkre áll, és így I. (12)-ből **n** számú alsó korlát nyerhető.

Összegezve az eddigieket, megállapíthatjuk, hogy számítógépre jól adaptálható algoritmus áll rendelkezésünkre választott feladatunk sajátkörfrekvenciáinak javítható közrefogása számára. I. (12) alapján könnyen belátható, hogy csak a tényleges megoldást jól közelítő felső korlátok felhasználásával remélhetünk elegendően jól közelítő alsó korlátokat. (A fokozott pontossági előírás elsősorban az első néhány felső korlátra vonatkozik.)

6. Számpélda

A vázolt módszer hatékonyságának érzékeltetésére az 1. táblázatban közöljük konkrét geometriai paraméterek (**R** = 20 mm, **r** = 15 mm, **L** = 10^3 mm) esetében kapott eredményeinket. Összehasonlításképpen a táblázat $\alpha_{adi}^2 \dfrac{\varrho}{E}$-vel, illetve $\alpha_{fdi}^2 \dfrac{\varrho}{E}$-vel jelölt soraiban közöljük a **2r**, illetve **2R** átmérőjű prizmatikus rudak megfelelő adatait.

Számításaink során azt tapasztaltuk, hogy a Poincaré—Rayleigh—Ritz-módszert alkalmazva, a bázisfüggvények számának 5-ig történő növelésével javult a felső korlátok értéke. A bázisfüggvények számának ötnél nagyobbra történő választása esetében az I. 9 sajátértékfeladatban az együtthatók mátrixához rendelt determináns értéke gyorsan közeledett a zérushoz, s ezzel együtt az eredményül kapott sajátkörfrekvenciák négyzeteire negatív számok is adódtak.

	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5
$\alpha^2_{fdi}\frac{\varrho}{E}$	$1{,}235 \cdot 10^{-3}$	$4{,}851 \cdot 10^{-2}$	$3{,}807 \cdot 10^{-1}$	1,462	3.997
$\alpha^2_{fi}\frac{\varrho}{E}$	$1{,}029 \cdot 10^{-3}$	$4{,}327 \cdot 10^{-2}$	$3{,}062 \cdot 10^{-1}$	1,143	3,217
$\alpha^2_{ai}\frac{\varrho}{E}$	$1{,}017 \cdot 10^{-3}$	$2{,}983 \cdot 10^{-3}$	$7{,}305 \cdot 10^{-2}$	$8{,}857 \cdot 10^{-2}$	$9{,}317 \cdot 10^{-2}$
$\alpha^2_{adi}\frac{\varrho}{E}$	$6{,}948 \cdot 10^{-4}$	$2{,}730 \cdot 10^{-2}$	$2{,}140 \cdot 10^{-1}$	$8{,}232 \cdot 10^{-1}$	2,248

1. táblázat

Az alsó korlátok számításánál a $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = 1$, valamint az $\eta(x) = \zeta(x) = 6x^2 - 4x^3 + x^4$ választásokkal éltünk a korlátozott gépóra lehetőségeink miatt. Vizsgálataink azt mutatták, hogy az „alsó alapfeladat" megfelelő választásával az alsó korlátok számításakor jelentkező numerikus hibák csökkenthetők. A kijelölt integrálásokat módosított Romberg-eljárás segítségével végeztük. Az I. 14-ben kijelölt invertálásokra a $k_1 = k_2 = 1$ választás miatt nem volt szükség.

A gépi munkát a MTA SZTAKI CDC 3300 típusú számítógépén végeztük. Az elkészült programrendszer váza SIMULA 67 programnyelven íródott. A (9) transzcendes egyenlet, valamint az I/9 sajátérték feladat megoldását dupla gépi pontosságú FORTRAN nyelvű program segítségével kaptuk meg.

IRODALOM

1. Kovács, M.—Richlik, Gy.—Takács, F.—Tóth, Gy.: Egyenes tengelyű, a hossza mentén változó jellemzőkkel bíró, hajlító lengést végző rúd sajátkörfrekvenciáinak javítható közrefogása, *Műszaki Tudomány* **54**, (1977), —
2. Kamke, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Akademische Verlagsgesellschaft, Geest und Portig K.—G. Leipzig 1956. 217.
3. Michlin, S. G.: Variationsmethoden der mathematischen Physik, Akademie-Verlag, Berlin 1962, 338.
4. Collatz, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig K.-G. Leipzig 1949. 58, 202.

Improveable Bracketing of the Angular Eigenfrequency of a Straight Rod with Characteristics Changing along its Length, Carrying out Flexural Oscillations. — II. — The paper solves the problem using the Poincaré—Ryleigh—Ritz and Fichera's methods and points out some difficulties arising in the numerical solution.

Verbesserungsfähige Einschließung der Eigenkreisfrequenz von geradachsigen Stäben mit entlang der Länge veränderlichen Charakteristiken. — II. — Die Arbeit löst die im Titel genannte Aufgabe mit Hilfe der Poincaré—Rayleigh—Ritzschen Methode und des Ficheraschen Verfahrens und weist auf einige im Zusammenhang mit der numerischen Lösung sich ergebende Probleme hin.