

MÁTRIX-ANALITIKUS MÓDSZER SZIMMETRIKUS HÁLÓZATI RENDSZERŰ RÁCSHENGERT ERŐJÁTÉKÁNAK VIZSGÁLATÁRA

HEGEDÜS ISTVÁN*

[Beérkezett: 1979. VIII. 23-án]

A dolgozat mátrix-analitikus módszert mutat be szabályos gyűrűpoligonokból, szimmetrikus összekötőrudakkal kialakított egyrétegű rácsenger rúderőinek számítására és az erőjáték sajátosságainak vizsgálatára. A vizsgálat eredményeiből kitűnik, hogy számos egyezés mellett — alapvető eltérések vannak a rácsszerkezet és egy analóg terhelésű ill. geometriai kialakítású membránhenger erőjátéka között, ezért a membránhenger nem tekinthető a vizsgált rács helyettesítő kontinuumának. A dolgozat bemutatja azt a szerkezetet is, mely erőjátékának sajátosságai alapján valóban a vizsgált rács helyettesítő kontinuumának tekinthető. A dolgozat célja a vizsgálatához használt mátrix-analitikus módszer hatékonyságának illusztrálása, valamint az, hogy felhívja a figyelmet arra a veszélyre, amelyet az egyrétegű térbeli rácsok és a membránhéjak erőjátéka közti hasonlóság nem kellő körültekintéssel való alkalmazása magában rejt.

1. Bevezetés

A statikailag határozott térbeli rácsok vizsgálatára igen sok példa található a műszaki irodalomban. Ezek nagyobb része a térbeli rács hálózatának specialitásai alapján adható egyszerűsítéseket mutatja be. Viszonylag kevés olyan eljárás ismert, amely az erőjáték kvalitatív vizsgálatára is alkalmazható. Ezek egyik csoportja a rács csomóponti egyensúlyi egyenletrendszerének sajátos struktúrája alapján ad az erőjáték jellemzőiről általánosításra is alkalmas képet [1—4], a másik csoport pedig a membránhéjak és az egyrétegű térbeli rácsok erőjátéka közti hasonlóság intuitív vagy részletes vizsgálatokon alapuló feltételezésével a rács erőjátékát egy hasonló alakú és terhelésű membránhéj metszeterőit alapján vizsgálja [5, 6].

Az itt bemutatásra kerülő vizsgálat a rúderőrendszer kvalitatív vizsgálatára alkalmas módszerek említett első csoportjába sorolható.

A kialakult gyakorlatnak megfelelően feltételezzük, hogy a szerkezet rúdjai ideális csuklókkal kapcsolódnak egymáshoz, az alakváltozások elhanyagolhatóan kicsinyek, a rácsrudak nem hajolnak ki, a terhek a szerkezet csomópontjain működnek. A vizsgálati módszer bemutatásához ismertnek feltételezzük a szorzásban felcserélhető blokkokból álló hipermátrixok analízisének alapelveit és módszereit [7]. A vizsgálatához végzett mátrix-analitikai levezeté-

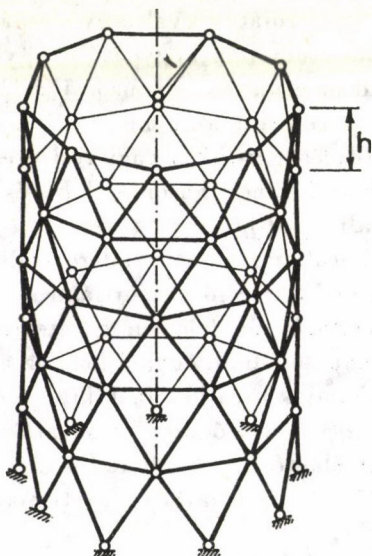
* Dr. Hegedüs István 2083 Solymár, Váci Mihály u. 10.

seknek csak a menetét és eredményeit közöljük, az egyes lépések részletezésére részint azok viszonylagos műszaki érdektelensége, részint terjedelmessége miatt nincsen lehetőség.

2. A rácsos henger rúderőinek egyenletrendszere

A vizsgált rácsszerkezet hálózati rendszerét az 1. ábra mutatja. A csomópontok egy r sugarú henger palástjain fekszenek úgy, hogy az azonos szinten fekvő csomópontokat összekötő rudak egy-egy n oldalú szabályos sokszöget alkotnak. Az egymás alatti sokszögek h nagyságú tengelyirányú eltolással és $\varphi = \pi/n$ elforgatással hozhatók egymással fedésbe. Hasonló elmozdítással hozhatók fedésbe a legalsó rúdpolygon csúcsai azokkal a pontokkal, melyekben a szerkezet az aljzathoz kapcsolódik.

Ha az egymás feletti rúdpolygonok számát m -mel jelöljük, a szerkezet úgy is felfogható, mintha m darab egymás fölé épített olyan rácskoszorúból állna, amelyek mindegyike egy n oldalú rúdpolygonból és ezt az aljzathoz kapcsoló kétszer n darab, szimmetrikus helyzetű összekötő rúdból tevődik össze. Annak, hogy a szerkezetet a továbbiakban ilyen rácskoszorúból összeállítottak tekintjük — ritmikus ismétlődések egyszerű figyelembevételén túl — az a magyarázata, hogy az összekötő rudak alsó végein rögzített rácskoszorú éppen kielégíti a statikai határozottság szükséges feltételeit, és amennyiben a



1. ábra

statikai határozottság valóban fennáll, a rúderők meghatározása tetemesen egyszerűsíthető.

Az egyszerűsített számítás elve a következő:

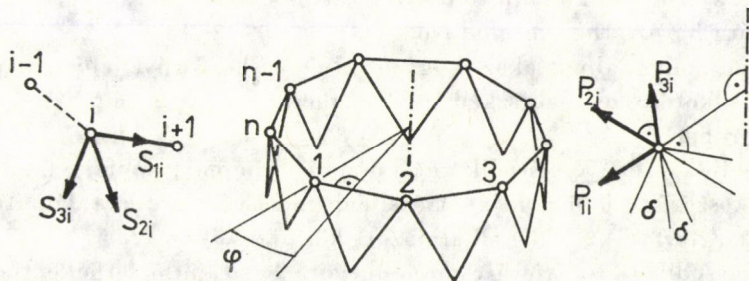
A legfelső rácskoszorú rúderőit a rácskoszorú statikai határozottsága esetében a csatlakozó szerkezettrésztől függetlenül meghatározhatjuk. Ezt elvégezve, a rácskoszorút gondolatban eltávolítjuk, természetesen az ismert rúderőkkel helyettesítve az elhagyott rudak hatását. Az így módosított szerkezet legfelső rácskoszorújának (vagyis az eredeti rács második rácskoszorújának) az erőjátéka most az előzőhöz hasonlóan meghatározható. Az eljárást m lépésben végrehajtva a teljes erőjáték birtokába juthatunk.

Vizsgáljuk először egy rácskoszorú erőjátékát. A rácspoligon csomópontjait 1-től n -ig futó számokkal azonosítjuk. Minden csomóponthoz három teherkomponens és három rúderő rendelhető hozzá (2. ábra). A P_{1i} , P_{2i} és P_{3i} teherkomponensek közül P_{1i} a henger tengelyére merőleges, P_{2i} és P_{3i} pedig az i jelű csomópontba befutó két összekötő rúd síkjában fekszik. Az alkalmazott komponensekre bontás előnye, hogy egyszerűvé teszi a rácskoszorú csomóponti egyensúlyi egyenletrendszerének felírását. A hipermátrix-együtthatós vektor-egyenletként felírt egyenletrendszer független és függő változóiként a teherkomponenseket és a rúderőket egy-egy $\mathbf{p}$, ill. $\mathbf{s}$ hipervektorba foglaljuk, melynek n skálaelemű $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$, ill. $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ hiperelemei a P_{1i}, P_{2i}, P_{3i} , ill. az s_{1i}, s_{2i}, s_{3i} teherkomponenseket, ill. rúderőket tartalmazzák a csomópontok sorrendjében.

A csomóponti egyensúlyi egyenletrendszer az alábbi:

$$\mathbf{K}\mathbf{s} = \begin{bmatrix} (\mathbf{E} + \mathbf{\Omega}^*) \sin \varphi \\ (-\mathbf{E} + \mathbf{\Omega}^*) \cos \varphi & -\mathbf{E} \sin \delta & \mathbf{E} \cos \delta \\ 0 & \mathbf{E} \sin \delta & \mathbf{E} \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{p}, \quad (1)$$

ahol δ a kapcsolórudak egymással bezárt szögének fele, $\mathbf{E}$ az n -ed rendű egység-mátrix, $\mathbf{\Omega}$ pedig az n -ed rendű primitív ciklus permutáló mátrix [7], amelynek minden eleme zérus, kivéve az első jobb oldali mellékátló elemeit és a bal alsó sarokelemet, ahol 1 található.



2. ábra

K felcserélhető blokkokból álló hipermátrix, ezért determinánsa

$$\det \mathbf{K} = \det \mathbf{Det} \mathbf{K} = -\sin \varphi \cdot \sin 2\delta \cdot \det (\mathbf{E} + \mathbf{\Omega}^*) .$$

Mivel

$$\det (\mathbf{E} + \mathbf{\Omega}^*) = 1 + (-1)^{n+1}$$

értéke $n = 2k$ esetében zérus, a páros csomópontszámú rácskoszorú csomóponti egyensúlyi egyenletrendszere szinguláris. A rácskoszorú tehát csak páratlan csomópontszám esetében határozott statikailag. A továbbiakban ezért fel kell tételeznünk, hogy a hálózat ilyen kialakítású.

A rácskoszorú rúderőinek meghatározását az (1) egyenletrendszer invertálásával végezzük. Az inverz mátrix egyszerűen meghatározható, ha kihasználjuk a blokkok felcserélhetőségét:

$$\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{L} = \begin{bmatrix} a(\mathbf{H} + \mathbf{E}) & 0 & 0 \\ b\mathbf{H} & -c\mathbf{E} & d\mathbf{E} \\ -b\mathbf{H} & c\mathbf{E} & d\mathbf{E} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

ahol

$$a = 1/(2 \sin \varphi), \quad b = 1/(2 \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \delta),$$

$$c = 1/(2 \sin \delta), \quad d = 1/(2 \cos \delta),$$

$$\mathbf{H} = (\mathbf{E} - \mathbf{\Omega}^*)(\mathbf{E} + \mathbf{\Omega}^*)^{-1}.$$

H olyan ferdén szimmetrikus ciklikus mátrix, melynek első sora $(0, 1, -1, 1 \dots 1, -1)$.

Jelöljük $\mathbf{p}^{(1)}$, ill. $\mathbf{s}^{(1)}$ hipervektorral a legfelső rácskoszorúra ható terhek, ill. a rúderők vektorát.

(1) és (2) alapján a legfelső rácskoszorú rúderői:

$$\mathbf{s}^{(1)} = \mathbf{L}\mathbf{p}^{(1)}.$$

Az előjáróban ismertetett számítási elképzelés szerint a következő feladatunk az első rácskoszorú elhagyásával módosuló szerkezet legfelső rácskoszorújára ható terhek meghatározása.

Némi bonyodalmat okoz, hogy az első rácskoszorú 1 jelű csomópontján áthaladó alkotóra nem illeszkedik csomópont, csak a harmadik, ötödik stb. rácskoszorúban.

Kezdjük ezért a második rácskoszorú csomópontjainak számozását az első rácskoszorú 1 jelű pontjával átellenben fekvő alkotón található csomóponttal, megtartva az eddig alkalmazott körüljárási irányt.

A második rácskoszorú csomópontjaira ható külső terheket jelölje $\mathbf{p}^{(2)}$. Az $\mathbf{s}^{(2)}$ vektorba foglalt második szintű rúderők meghatározásakor figyelembe

kell vennünk $\mathbf{p}^{(2)}$ -n kívül az elhagyott első rácskoszorúról leadódó erőket is, ezért $\mathbf{s}^{(2)}$ -t a következőképpen módosított tehervektor alapján kell számolnunk:

$$\mathbf{s}^{(2)} = \mathbf{L}(\mathbf{p}^{(2)} + \mathbf{M}\mathbf{s}^{(1)}) . \quad (3)$$

Az $\mathbf{M}$ hipermátrix az alábbi lesz:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -e\Phi & -e\Phi^* \\ 0 & -f\Phi & f\Phi^* \\ 0 & g\Phi & g\Phi^* \end{bmatrix}, \quad (4)$$

ahol

$$e = 2 \sin \delta \cdot \tan \frac{\varphi}{2}, \quad f = \sin \delta, \quad g = \cos \delta$$

és

$$\Phi = \Omega^{\frac{n+1}{2}}.$$

Az (1)–(4) egyenletek ismételt felhasználásával az egész rács megoldható: $\mathbf{p}^{(k)}$ -val jelölve a k -adik rácskoszorú csomópontjaira ható terhek vektorát, $\mathbf{s}^{(k)}$ -val pedig ugyanennek a rácskoszorúnak a rúderővektorát,

$$\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{L}\mathbf{p}^{(k)} + \mathbf{L}\mathbf{M}\mathbf{s}^{(k-1)} \quad k = 2, \dots, m. \quad (5)$$

Ha a k -adik rácskoszorú terheletlen, rúderőit az $\mathbf{L}\mathbf{M}\mathbf{s}^{(k-1)}$ tag szolgáltatja. Az $\mathbf{L}\mathbf{M}$ szorzatmátrixot szerepe alapján rácsrúderő-átviteli mátrixként értelmezhetjük. Bevezetve az $\mathbf{L}\mathbf{M} = \mathbf{N}$ jelölést, az (5) rekurzív képlet alapján az alábbi képletet kapjuk:

$$\mathbf{s}^{(k)} = \sum_{j=1}^k \mathbf{N}^{k-j} (\mathbf{L}\mathbf{p}^{(j)}), \quad (6)$$

ahol

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha(\mathbf{E} + \mathbf{H})\Phi & -\alpha(\mathbf{E} + \mathbf{H})\Phi^* \\ 0 & -\beta\mathbf{H}\Phi + \Phi & -\beta\mathbf{H}\Phi^* \\ 0 & \beta\mathbf{H}\Phi & \beta\mathbf{H}\Phi^* + \Phi^* \end{bmatrix},$$

továbbá

$$\alpha = \sin \delta / (1 + \cos \varphi), \quad \beta = \tan \frac{\varphi}{2} \cdot \cot \varphi.$$

A (6) képlet mutatja $\mathbf{N}$ átviteli mátrixnak és hatványainak központi szerepét a rúderőrendszer alakulásában. A rúderőrendszer sajátosságainak vizsgálatát is $\mathbf{N}$ és hatványai mátrix-analízisével célszerű elvégezni.

3. A rúderőrendszer sajátságainak vizsgálata

A rács rúderőrendszerével kapcsolatos első igen lényeges megállapítás, mely a (6) képlet szerkezete alapján nyilvánvaló, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott rácskoszorú rúderőinek a nagyságát nem befolyásolják a rácskoszorú alatti csomópontokon működő terhek, viszont minden magasabban fekvő csomópont terhei hatással lehetnek az erőjátéokra. Az erőjáték részletes vizsgálata úgy tehető áttekinthetővé, ha követjük a rácskoszorú-erőjáték „terjedését” egyetlen, külső terhekkkel terhelt rácskoszorú erőjátékából indulva. Az egyszerűség kedvéért vegyük azt az esetet, amikor $\mathbf{p}^{(1)} \neq 0$, $\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}^{(3)} = \dots \mathbf{p}^{(m)} = 0$. Ez esetben az egymást követő rácskoszorúk rúderővektorai

$$\mathbf{s}^{(1)} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{p}^{(1)},$$

$$\mathbf{s}^{(2)} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{s}^{(1)},$$

$$\mathbf{s}^{(3)} = \mathbf{N}^2 \mathbf{s}^{(1)},$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{s}^{(j)} = \mathbf{N}^{j-1} \mathbf{s}^{(1)},$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{s}^{(m)} = \mathbf{N}^{m-1} \mathbf{s}^{(1)}.$$

Ha az $\mathbf{N}$ átviteli mátrixnak van egynél nagyobb abszolútértékű sajátértéke, és $\mathbf{s}^{(1)}$ kezdőszinti rúderővektor nem ortogonális a legnagyobb abszolútértékű sajátérték invariáns alterére, akkor elegendően nagy m érték esetében az erőjáték terjedésében feltételenül dominánssá válik a legnagyobb abszolútértékű sajátértékhez tartozó, átvitelenként legerősebben növekvő sajátvektor-komponens rúderőrendszere.

Meg kell tehát vizsgálnunk az $\mathbf{N}$ mátrix sajátértékeit. A karakterisztikus polinom unitér transzformációra invariáns, ezért először Ω komplex elemű modáljaiból [1, 7] egy $3n \times 3n$ nagyságú hiper-diagonál alakú unitér mátrixpárt alkotunk, ezek felhasználásával $\mathbf{N}$ unitér transzformációval diagonál elemű blokkokból álló hipermátrixba vihető át. Ennek karakterisztikus determinánsát kifejtve, a karakterisztikus egyenletet közvetlenül első- és másodfokú gyök-tényezők szorzataként írhatjuk fel. A végeredményben valós együtthatójú, $3n$ -edfokú karakterisztikus egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$D(\lambda) \equiv \prod_{k=1}^n \lambda \left\{ \lambda^2 - 2(-1)^k \frac{\cos^2 k\varphi + \cos \varphi}{\cos k\varphi(1 + \cos \varphi)} \lambda + 1 \right\} = 0 \quad (7)$$

Az egyenlet minden gyöke valós. A sajátértékeket célszerű $\lambda_{i,k}$, $i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, \dots, n$ kettős indexezéssel azonosítani. Ezt alkalmazva:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{1,k} &= 0, \\
 \lambda_{2,k} &= \frac{(-1)^k (\cos^2 k\varphi + \cos \varphi) + \sin k\varphi \sqrt{\cos^2 \varphi - \cos^2 k\varphi}}{\cos k\varphi (1 + \cos \varphi)} \\
 \lambda_{3,k} &= \frac{(-1)^k (\cos^2 k\varphi + \cos \varphi) - \sin k\varphi \sqrt{\cos^2 \varphi - \cos^2 k\varphi}}{\cos k\varphi (1 + \cos \varphi)}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

A poligon-oldalszám páratlan, ezért $(-1)^k = -(-1)^{n-k}$, továbbá

$$\cos k\varphi = -\cos(n-k)\varphi \text{ és } \sin k\varphi = \sin(n-k)\varphi.$$

Ezek alapján belátható, hogy

$$\lambda_{2,k} = \lambda_{3,(n-k)}, \quad k < n.$$

Mivel ugyanakkor

$$\lambda_{2,n} = \lambda_{3,n} = 1,$$

minden sajátérték legalább kétszeres multiplicitású.

A (7) egyenlet struktúrájából következik, hogy

$$\lambda_{2,k} \cdot \lambda_{3,k} = 1,$$

vagyis minden sajátértéknek a reciproka is sajátérték.

Az említett két 1 abszolútértékű sajátértéken — $\lambda_{2,n}$ -en és $\lambda_{3,n}$ -en kívül — csupán négy további 1 abszolútértékű sajátérték van:

$$\lambda_{2,1} = \lambda_{3,1} = \lambda_{2,(n-1)} = \lambda_{3,(n-1)} = -1,$$

ezért az átviteli mátrixnak $n > 3$ esetben feltétlenül van egynél nagyobb abszolútértékű sajátértéke. A részletes vizsgálat megmutatja, hogy a legnagyobb abszolútértékű sajátérték $k = (n+1)/2$, illetve $k = (n-1)/2$ felvételével adódik. A legnagyobb abszolútértékű sajátérték abszolútértéke n növekedtével a $2n/\pi$ értékhez tart. Ez az érték az esetek többségében igen nagy, ezért a leggyorsabban növekvő sajátvektorkomponens — amennyiben szerepel a kiinduló rúderő-vektorban — többnyire néhány átviteli lépésen belül dominánssá válik. Az egymást követő rácskoszorúk rúderő vektorainak normája ezután nagy kvociensű mértani sorozat szerint növekszik.

Az átviteli mátrix struktúrája azt is lehetővé teszi, hogy viszonylag egyszerű eszközökkel meghatározzuk N minimálpolinomját. A (-1) kivételével a minimálpolinom minden gyöke egyszeres gyök. A kétszeres multiplicitású (-1) gyök miatt azonban N nem egyszerű struktúrájú mátrix, ezért a rács-rúderő terjedésében nem kizárólag mértani sor szerint változó normájú saját-

vektor komponensek szerepelnek. Az elemi osztók elméletével végzett struktúravizsgálat azt mutatja, hogy a (-1) sajátértékek a mátrix kanonikus alakjában található két másodrendű Jordan-blokkban fekszenek. Ebből következik, hogy a (-1) sajátértékhez tartozó, a sajátvektorokhoz hasonló szerepű két-két fővektor közül az egyik az átvitel során egy előjelváltáson kívül változatlan marad, tehát a sajátvektorokkal megegyező módon terjed, a másik pedig úgy változik meg, hogy az előjelváltáson kívül minden átvitelnél megnövekszik az előbbi, csupán alternáló előjelű fővektor értékével, vagyis az előjelváltástól eltekintve, az átvitelek számának lineáris függvénye szerint növekedve terjed. A sajátvektorok és a fővektorok együtt alkotják azt a $3n$ dimenziós lineáris teret, melynek minden pontjához egy rácskoszorú erőjáték és $-L$ regularitása miatt — egy külső teherrendszer rendelhető hozzá.

Nagyon szemléletadó a különböző sajátértékekhez tartozó — különböző terjedési tulajdonságot mutató — sajátvektorok, illetve az ezekhez tartozó külső terhek mechanikai értelmezése.

A $\lambda = 0$ sajátértékhez tartozó, nem terjedő sajátvektorok olyan rácsrúdrendszert jelölnek, amelyeket a rácspoligon síkjában működő olyan erőrendszer kelt, amelynek a rácspoligon kötélpoligonja. Olyan erőrendszer tehát, amelyet a rácspoligon csuklós rúdláncként elviselhet.

A $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó, változatlan értékkel terjedő két rúderővektor a rács Wenger központos nyomása, ill. tiszta csavarása által keltett rúd-erőrendszert írja le. Figyelemre méltó, hogy a központosan nyomott — azaz a legfelső rácspoligon minden csomópontján azonos nagyságú alkotóirányú teherrel terhelt — rács Wenger vízszintes síkban fekvő rúdjai nem feszültségmentesek.

A $\lambda = -1$ sajátértékhez tartozó két fővektor-pár a rács Wenger rúdszerű nyomatóki-nyírási erőjátékát írja le. A terjedésben mutatkozó előjelváltások magyarázata az, hogy az egymás alatti rácskoszorúk azonos sorszámú rácsponthai egymással átellenben találhatók. Az előjelváltástól eltekintve, változatlan terjedést mutató fővektorok a keresztmetszeti nyíróerő két egymásra merőleges komponensének megfelelői, míg az átvitel szám lineáris függvényeként változó vektorok konstans része a két egymásra merőleges hajlítási síkban értelmezhető „tiszta nyomatóki erőjáték”, változó része pedig a nemzérus nyíróerőhöz tartozó „nyomatóki növekmény erőjáték”. A fizikai értelmezés így egyértelmű magyarázatot ad N átviteli mátrix nem egyszerű struktúráltságára.

Az n -től függő sajátértékekhez tartozó sajátvektor-erőjátékok rácskoszorúként egyensúlyi erőrendszert alkotó, az elszorítottól lineárisan független tehervektorok által keltett erőjátékokat írnak le, mégpedig oly módon, hogy a Wenger tengelyével párhuzamos irányú erőcsoportok által keltett rácskoszorú-erőjátékok az $|\lambda| \leq 1$ sajátértékek alterében maradnak, a tengelyre merőleges komponenssel is rendelkező erőből álló erőcsoportok által keltett rács-

koszorú-erőjátékok viszont az $|\lambda| > 1$ sajátértékek alterében található komponenssel is rendelkeznek, amennyiben a terhek vízszintes komponenseiből alkotott vektorok nem a rúdlánccal felvehető terhek vektorterébe esnek.

Mind a sajátvektorok, mind pedig a sajátvektorok által leírt rácskoszorú-erőjátékot keltő csomóponti terhek vektorai olyan vektorok, amelyek elemeit a vektorokhoz tartozó sajátérték a (8) képletekben értelmezett k indexének, ill. az elemnek az s , ill. p vektorok n méretű s_1, s_2, s_3 , ill. p_1, p_2, p_3 minorvektorai-ban elfoglalt helye sorszámanak a szorzatától függő trigonometrikus függvényként lehet megadni. Az egyre nagyobb abszolútértékű sajátértékéhez tartozó sajátvektorok elemei egyre erősebben változnak az elem-sorszám függvényében, ezért pl. a legnagyobb abszolútértékű sajátértékhez tartozó sajátvektor egymást követő elemei rendre ellentétes előjelű, közel azonos nagyságú számok. Viszonylag egyenletes eloszlású külső teher olyan rácskoszorú-erőjátékot kelt, amely elsősorban az 1-hez közeli abszolútértékű sajátértékekhez tartozó sajátvektorkomponensekből tevődik össze, de amennyiben a rúderővektor nem tökéletesen ortogonális a gyorsan növekvő sajátvektorokra, ezek hatása előbb-utóbb dominánssá válik az erőjáték terjedésében. Lényeges megállapítás, hogy az egyetlen csomóponti erőből álló külső teher keltette rácskoszorú-erőjáték vektora csak abban az esetben nem tartalmazza az erősen növekvő terjedésű sajátvektorokat komponensként, ha az erő a henger alkotóival párhuzamos irányú.

A rúdszerű igénybevételekkel analóg sajátvektor-erőjátékok mintájára az n -től függő sajátértékek sajátvektorait is értelmezhetjük általánosított rúdszerű igénybevételek analogonjaiként. Az exponenciális terjedés is csak első pillanatban ad értelmezési nehézséget: a gátolt csavarás vizsgálatánál bevezetett általánosított rúdszerű igénybevételek — a delirációs nyomatók — pl. szintén a csavart rúd hossz tengelye mentén exponenciális függvény szerint változnak.

4. A rácsos henger pontosított helyettesítő kontinuum

Az ismertetett vizsgálat eredményei alapján megállapítható, hogy a vizsgált rácshenger erőjátéka számos olyan sajátsággal rendelkezik, amelyek nem hozhatók összhangba az egyrétegű rácsfelületek és a membránhéjak erőjátéka közti rokonság alapján kialakítható elvárásokkal [5]. Az eltéréseket a következőkben foglalhatjuk össze:

- A csupán alkotóirányú erőkkel terhelt rácshengernek a gyűrűirányt képviselő poligonrúdjai nem feszültségmentesek még az egyenletes teherrel statikailag egyenértékű külső teher működtekor sem.

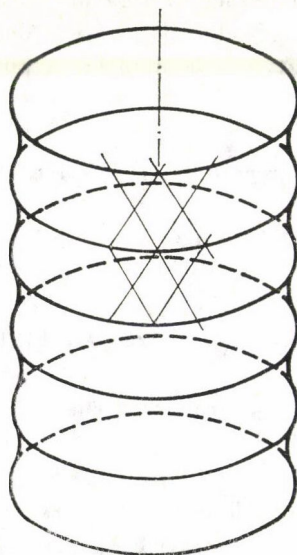
- A rácshenger terheletlen szakaszán a rácsrúderő-rendszer egyes komponensei a tengelyirányú koordináta (diszkrét) exponenciális függvényeként változnak.

Leszögezhetjük tehát, hogy a vizsgált rácshenger helyettesítő kontinuum nem membrán körhenger. Az erőjáték sajátosságainak ismeretében azonban nem nehéz meghatározni azt a szerkezetet, amely a diszkrét, illetve a folytonos matematikai modellű szerkezetek erőjátéka közti elkerülhetetlen különbségektől eltekintve éppen a vizsgált rács típus erőjátékának sajátosságaival rendelkezik. Ez a szerkezet egymáshoz hajlékony peremtartók közvetítésével csatlakozó olyan membrán forgáshiperboloidok sorozata, melyek egyenes alkotóinak seregébe a rácskoszorúk ferde összekötőrúdjai éppen besorolhatók (3. ábra). A szerkezet külső terhei a peremtartókon hatnak.

A hiperboloid-sor erőjátékát a rácshoz hasonlóan, a legfelső hiperboloidnál kezdve lépésenként határozhatjuk meg. A gyűrűirányban változó terhek hatásának figyelembevételét megkönnyíti, ha a teherfüggvényeket Fourier-sorba fejtjük, a peremtartók igénybevételét és a hiperboloid membrán-metszeterőinek peremértékeit hasonló Fourier-sor formájában keressük.

Az erőjáték vizsgálata azt mutatja, hogy a Fourier-sorok egyes tagjai által leírt erőjáték-komponensek héj-elemenkénti változása éppen a (8) képletben felírt sajátértékeknek megfelelő kvociensekkel jellemezhető növekvés, stagnálás vagy lecsengés. Kézenfekvő és részletes vizsgálattal igazolható is a következtetés, hogy az egyes teherharmonikusok által keltett és szintenként újra és újra megjelenő „saját-erőjátékok” éppen a rácskoszorúk sajátvektor-erőjátékainak folytonos megfelelői.

Megtalálható és teljes az analógia fővektorok és a hiperboloidsor nyomateki-nyírási erőjátéka között is.



3. ábra

Mivel tehát a peremtartókból és a hiperboloidokból álló szerkezet „saját-erőjátékai” — a $0, 1, \dots, (n - 1)$ Fourier-tagokig — közvetlenül megfeleltethetők a rácskoszorúk sajátvektor-erőjátékainak, a membrán henger helyett ez a hiperboloid sor használható arra, hogy a rácsrúderők meghatározásánál helyettesítő kontinuumként alkalmazzuk.

Ennek a „felfedezésnek” közvetlen számítástechnikai előnnyel járó haszna nyilvánvalóan nincs, jelentősége mégis nagy az egyrétegű térbeli rácsok és az analóg geometriájú és terhelésű membránhéjak erőjátékának összevetése szempontjából.

5. Az általánosítás lehetőségei, következtetések

A dolgozatban ismertetett módszer lényegtelen módosításokkal alkalmazható olyan rácskúpra, ahol az egymásra épülő rácskoszorúk arányos nagyítással, ill. kicsinyítéssel egybevágókká tehetők. Az ilyen szerkezet erőjátéka ugyanolyan értelemben tér el a membránkúp erőjátékától, mint a bemutatott rács-hengeré a membrán hengerétől. Lényegesebb módosítás szükséges, ha szimmetrikus hálózati rendszerű, de tetszőleges vezérgörbéjű rácsos héjra alkalmazzuk a módszert. A számítás alapelve ugyan nem változik, de L , M és N skalár együtthatóit minden rácskoszorú, ill. átvitel számításakor módosítanunk kell. Az erőjáték terjedését ezért ilyen szerkezeteken nem egy konstans átviteli mátrix hatványai, hanem a rácskoszorúként módosuló átviteli mátrixok szorzatai szabják meg. Szemben az ismertetett vizsgálattal — az ilyen hálózatos rácsok számítása már nem feltétlenül végezhető kézi számítással gazdaságosan. Kivételnek tekinthetjük az olyan szimmetrikus hálózatos forgás-hiperboloid rácsot, amelynek villarúdjai a hiperboloid egyenes alkotóira illeszkednek. Az ilyen rács-hiperboloid számítására igen hatékony kézi számítási módszert biztosít a bemutatott mátrix-analitikus eljárás módosítása.

A vizsgálatok gyakorlati szempontból való értékelése egyébként arra a konklúzióra vezet, hogy — egy-egy kivételes esettől eltekintve — a szélsőségesen kedvezőtlen erőterjedési mechanizmusban rejlő veszélyek miatt, a rácsfelületek szimmetrikus rendszerű hálózata nem javasolható sem konkrét mérnöki szerkezetként, sem pedig membránhéjak helyettesítő számítási modelljeként. Térbeli keretszerkezetek megoldására alkalmas módszerrel végzett vizsgálatok azt mutatják, hogy ha a csomópontok nyomaték felvételére alkalmas kapcsolattal vannak kialakítva, a bemutatott erőterjedési mechanizmus lényegesen kedvezőbbé válik, ilyenkor a hálózat kedvezőtlen hatása a szélsőséges rúderő-eloszlás helyett többnyire csak abban jelentkezik, hogy a szerkezet bizonyos elrendezésű terhek működtetésekor a vártnál lényegesen nagyobb alakváltozásokat szenved.

A bemutatott vizsgálatok keretében nem vállalkoztunk annak a tisztázására, hogy milyen feltételeket kell állítanunk ahhoz, hogy ne léphessen fel

az egyrétegű térbeli rácsok és a hasonló alakú, analóg terhelésű membránhéjak erőjátéka közt a bemutatotthoz hasonló jellegű anomális eltérés. Számos jelenség arra enged következtetni, hogy a kérdés gyökere a rácsozás háromszöglapjainak egymással bezárt szögeivel kapcsolatos vizsgálatokkal közelíthető meg. Ha a rácsenger rácsozását olyan formán módosítjuk, hogy az egyik villarúd a henger alkotóinak irányába essék, a rácsháromszögek csak a forgástengely felől konvex szögtöréssel csatlakoznak egymáshoz, ezzel egyidőben az összes megfigyelt anomáliák megszűnnek. Ugyancsak minden szempontból a várakozásnak megfelelő az egyezés az egyköpenyű forgáshiperboloid membrán-erői és egy olyan rács szimmetrikus hálózati rendszerű rúderői közt, amelynek csomópontjai a hiperboloid felületen fekszenek, villarúdjai pedig a hiperboloid egyenes alkotóira illeszkednek. Ebben a hálózatban a rácsháromszögek ugyan konvex és konkáv szögtöréssel is csatlakoznak egymáshoz, de ez a sajátosság egybe esik azzal, hogy a forgáshiperboloidon is kijelölhetünk a forgástengely felől szemlélve homorú és domború metszésgörbéket, melyek rendre az egymást metsző egyenes alkotók által kijelölt szögszektorok egyikében vagy másikában futnak.

Amennyiben megfogalmazhatók a hálózat és az analóg héj ismert saját-ságai alapján az anomáliák elkerülhetőségének feltételei, ezek megtalálása rendkívül fontos feladat, ugyanis a feltételek ismerete nélkül nemcsak az egyrétegű rácsfelületek és a membránhéjak közti analógia elve, hanem a membránfeladatok egyes finitizáláson alapuló megoldásmódszerei sem használhatók kellő biztonsággal és általánossággal a szerkezetek tervezésében.

IRODALOM

1. BÉRES E.—LOVASS NAGY V.—SZABÓ J.: Ciklikus szimmetriával bíró térbeli rácsos tartók rúderőinek meghatározása hipermátrixok alkalmazásával. MTA Mat. Kutató Int. Közl. (1956) Bp.
2. DEAN, D. L.: On the Statics of Latticed Shells. A.I.P.C. (I.A.B.S.E.) Memoires, Vol. 25. (1965) Zürich.
3. NAKA, T.—KATO, B.—TADA, H.: The design and analysis of a one-sheet hyperboloidal tower, Space Structures, ed. by Davies (1966) Oxford
4. HUSSEY, M. I. L.—HUMPIDGE: The elastostatic and elastic critical loads of extensive cyclic domes, loc. cit. 3
5. WRIGHT, D. T.: Membrane Forces and Bending in Reticulated Shells, ASCE J. Struct. Div. Vol. 91. No ST 1 (1965)
6. HEGEDÜS I.: Komponens egytengelyű feszültségállapotok alkalmazása membránhéjak és rácsfelületek vizsgálatára. A MTA Műsz. Mech. Munkaközösség 1. ülésszakának közleményei (1975). Bp.
7. RÓZSA P.: Lineáris algebra és alkalmazásai. M. K. 1974. Bp.

A Matrix-analytic Method for the Investigation of the Stress Pattern in a Lattice Cylinder of Symmetrical Network. A matrix-analytical method is presented to the calculation of the internal bar-forces and to the investigation of the stress pattern in a single-layer lattice cylinder composed of regular ring polygons and symmetrically arranged connecting bars. From the results of the research investigation became evident that, beside several agreements, basic differences occur between the stress distribution in a lattice structure and that of a membrane cylin-

der of geometrical shape attacked by analogous load; therefore, the membrane cylinder cannot be considered as the substituting continuum of the lattice construction investigated. Also the construction is presented which, due to the particularities of its stress distribution, might readily be considered as the substituting continuum of the lattice structure in question. The purpose of the paper is the demonstration of the efficiency of the matrix-analytical method used to the investigation, as well as to draw the attention to the danger which is involved in the application without due caution of the resemblance between the single-layer space lattice structures and membrane shells.

Eine matrix-analytische Methode zur Untersuchung der Kräftespiel eines Gitterzylinders von symmetrischem Netzwerk. Ein matrix-analytisches Verfahren zur Berechnung der Stabkräfte eines aus regelmässigen Ringpolygonen mit symmetrischen Bindestäben hergestellten einschichtigen Gitterzylinders wird behandelt. Aus den Untersuchungsergebnissen erweist sich, daß es — neben zahlreichen Übereinstimmungen — zwischen den Kräftespielen eines Gitterwerks und eines geometrisch ausgestalteten, analog belasteten Membranzylinders grundlegende Unterschiede gibt, weshalb kann der Membranzylinder nicht als ein Ersatzkontinuum für das untersuchte Gitterwerk betrachtet werden. Auch eine derartige Konstruktion wird vorgelegt, die aufgrund der Eigenartigkeiten des Kräftespiels tatsächlich als das Ersatzkontinuum des behandelten Gitterwerks betrachtet werden kann. Der Zweck der Abhandlung ist die Effektivität des matrix-analytischen Verfahrens nachzuweisen sowie auf die Gefahr hinzuweisen, welche die unvorsichtige Anwendung der Ähnlichkeit der Kräfteverteilungen von einschichtigen räumlichen Gitterwerken und Membranschalen in sich schließt.