

TARTÓK KIFORDULÁSÁNAK VIZSGÁLATA A KVADRATIKUS OPERÁTORNYALÁBOK ELMÉLETE ALAPJÁN

TARNAI TIBOR*

[Beérkezett 1976. dec. 31-én]

A dolgozat a rugalmas gerendák kifordulás-vizsgálatának egy variációs számítási módszerével foglalkozik. A stabilitási feladat révén előálló kvadratikus sajátérték-feladat megoldásához felhasználja a lineáris operátorok kvadratikus nyalábjának matematikai elméletét. Megmutatja, hogy a Ritz—Galerkin-módszer kvadratikus sajátérték-feladatok megoldására is alkalmas. A vizsgált esetre bebizonyítja a Ritz—Galerkin-módszer konvergenciáját, és egyben formulát ad a kritikus teherparaméter közelítő értékének meghatározására.

1. Bevezetés

A rugalmas stabilitás elméletében a gerendák kifordulásának problémája — kis elmozdulások mellett — gyakran kvadratikus sajátérték-feladat alakjában fogalmazható meg. Így például a mindkét végén villásan megtámasztott, vékonyfalú, szimmetrikus nyitott szelvényű tartók esetében is, ha a tartót transzverzális erők terhelik, vagy a tartó végeire axiális erők hatnak.

A stabilitási feladatok megoldásának egyik kiterjedten alkalmazott fontos variációs módszere a Ritz—Galerkin-módszer. A lineáris sajátérték-feladatra vezető stabilitási problémáknál bizonyítva van, hogy ez a módszer konvergens [11], és így segítségével a kritikus teherparaméter tetszőleges pontossággal megközelíthető. Kvadratikus esetben azonban nem ismert, hogy a kritikus teherparaméter Ritz—Galerkin-módszerrel előállított közelítő értékeinek sorozata konvergens-e, és ha igen, akkor a kritikus teherparaméterhez konvergál-e.

A jelen dolgozatban ezzel a kérdéssel fogunk foglalkozni. Bizonyítani fogjuk, hogy a Ritz—Galerkin-módszer a kifordulási probléma kvadratikus sajátérték-feladata esetében is konvergens, és előállítja a kritikus teherparamétert. Meg fogjuk mutatni, hogy a gyakorlati számítás ezzel a módszerrel éppen olyan szisztematikussá tehető, mint lineáris feladatoknál.

A problémát általánosan, a funkcionálanalízis eszközeivel fogjuk tárgyalni. Az alkalmazott fogalmak többségét — bár ezek a mérnöki gyakorlatban még nem eléggé használatosak — nem definiáljuk, csupán utalunk pl. [1, 11, 15]-re, ahol ezeknek az alapfogalmaknak és a velük kapcsolatos

* Dr. Tarnai Tibor, 1037 Budapest, Kolostor u. 17.

alapvető tételeknek az értelmezése és bizonyítása megtalálható. Vizsgálatainkat a lineáris operátorok kvadratikus nyalábjának elméletére alapozzuk. A matematikában aránylag újkeletű ez az elmélet, amelyet a gyakorlatban eddig elsősorban rugalmas testek csillapított rezgéseinek a vizsgálatakor alkalmaztak. A dolgozatban megmutatjuk, hogy a lineáris operátorok kvadratikus nyalábjának elmélete eredményesen alkalmazható tartók kifordulás-vizsgálatára is.

Az A, B, C operátorok λ paramétertől függő $A + \lambda B + \lambda^2 C$ alakú halmazát kvadratikus operátornyalábnak vagy operátorseregnek hívják.

Az általunk vizsgált kifordulási probléma az $L(\lambda) = A - \lambda B - \lambda^2 C$ operátornyaláb

$$L(\lambda)u = Au - \lambda Bu - \lambda^2 Cu = 0 \quad (1)$$

sajátérték-feladatára vezet, ahol A, B, C egy H (komplex) Hilbert-térben értelmezett lineáris operátorok. Ha $u \in H$, $u \neq 0$ és az (1) egyenlőség teljesül, akkor a λ (komplex) szám az $L(\lambda)$ nyalábnak egy sajátértéke, az u elem pedig a λ -hoz tartozó sajátéleme.

Jelölje (φ, ψ) ; $\varphi, \psi \in H$ a H -térben értelmezett skalárszorzatot. Legyenek az $L(\lambda)$ nyalábban szereplő A, B, C lineáris operátorok szimmetrikusak (az A lineáris operátor szimmetrikus, ha $D(A)$ értelmezési tartománya sűrű H -ban, továbbá bármely $u, v \in D(A)$ elemre teljesül, hogy $(Au, v) = (u, Av)$), és még az alábbi feltételeknek tegyenek eleget:

(1.1) Az A operátor pozitív definit (létezik olyan $\alpha > 0$ szám, hogy $(Au, u) \geq \alpha^2 \|u\|^2$ minden $u \in D(A)$ -ra), diszkrét spektrumú és $D(A) \subset D(B) \cap D(C)$ (ill. $H_A \subset D(B) \cap D(C)$, ahol H_A az (Au, u) szerint teljessé tett $D(A)$ -t jelöli [11]).

(1.2) A C operátor pozitív $((Cu, u) > 0$ minden $u \in D(C)$, $u \neq 0$ -ra).

Az (1.1) feltétel teljesülése esetén A -nak létezik teljesen folytonos, önadjungált és pozitív inverze: A^{-1} ([11], 222. o. 5. tétel), mely a H -teret H_A -ba viszi. A $z = Au$ transzformációval és $A_1 = BA^{-1}$, $A_2 = CA^{-1}$ jelöléssel az (1) egyenlet a

$$|z - \lambda A_1 z - \lambda^2 A_2 z = 0 \quad (2)$$

egyenletbe megy át. Az A_1 és A_2 operátorokról feltételezzük, hogy

(1.3) A_1 és A_2 véges abszolút normájúak.

Ha az (1.1), (1.2), (1.3) feltételek teljesülnek, akkor A^{-1} szimmetrizálja A_1 -et és A_2 -t, azaz $A^{-1}A_1$, $A^{-1}A_2$ önadjungált operátorok, továbbá A_2 -nek csak pozitív sajátértékei lehetnek. Így HARAZOV [6] 1., 2., 3. tétele alapján az $L(\lambda)$ nyalábnak csak valós sajátértékei lehetnek, melyek nem torlódhatnak a valós tengely véges szakaszán. Ha A_1 nem végesrendű operátor, akkor

az $L(\lambda)$ nyalábnak megszámlálhatóan végtelen sok $0 \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$ sajátértéke van úgy, hogy $\lim |\lambda_n| = +\infty$, ha $n \rightarrow \infty$.

A jelen dolgozatban az $L(\lambda)$ nyaláb sajátértékeinek a variációs módszer segítségével történő meghatározásával foglalkozunk. Mivel a stabilitás szempontjából legfontosabb az $L(\lambda)$ nyaláb legkisebb pozitív (legnagyobb negatív) sajátértékének az ismerete, ezért ezek meghatározására szorítkozunk. A transzverzális erőkkel terhelt gerenda esetében ugyanis a legkisebb pozitív sajátérték adja a tartóra lefelé ható teher kritikus paraméterét, a legnagyobb negatív sajátérték pedig a tartóra felfelé (vagy ha úgy tetszik, a hossz tengelye mentén 180° -kal elforgatott tartóra lefelé) ható teher kritikus paraméterét. A végein axiális erőkkel terhelt tartó esetében a legkisebb pozitív sajátérték a kritikus húzóerő, a legnagyobb negatív sajátérték pedig a kritikus nyomóerő értékét szolgáltatja, ha az összefüggésekben a húzóerőt tekintjük pozitívnak.

Megjegyezzük, hogy az $A^{-1/2}(\cdot)A^{-1/2}$ transzformációval és $\mu = 1/\lambda$ jelöléssel az $L(\lambda)$ nyaláb $\hat{L}(\mu) = \mu^2 I - \mu \hat{B} - \hat{C}$ alakra hozható, ahol $\hat{B}$ és $\hat{C}$ önadjungált operátorok, $\hat{C}$ pozitív és I az identitásoperátor. Ilyen esetet vizsgált pl. MÜLLER [12, 13]. A μ paraméter transzlációjával [5] az $\hat{L}(\mu)$ nyaláb az $\tilde{L}(\mu) = \mu^2 I + \mu \tilde{B} + \tilde{C}$ alakra hozható, ahol $\tilde{B}$ és $\tilde{C}$ önadjungáltak, és $\tilde{C}$ pozitív. Ilyen alakú nyalábok vizsgálatával KREJN és LANGER [7, 8] foglalkozott.

Kézenfekvőnek látszik, hogy az $L(\lambda)$ sajátértékeit az $L(\lambda)$ valamely fenti, egyszerűbb transzformált alakjából határozzuk meg. A gyakorlati számítás során mégis célszerűbb, ha nem alkalmazzuk a fenti transzformációt, és az $L(\lambda)$ nyaláb számunkra szükséges legkisebb pozitív (legnagyobb negatív) sajátértékét magából az (1) egyenletből számítjuk. Így ugyanis a differenciáloperátorokkal megfogalmazott sajátérték-feladatot nem kell integráloperátoros alakra transzformálni. A sajátértékeket közvetlenül a differenciálegyenlet segítségével lehet meghatározni, és nincs szükség az ekvivalens integrálegyenlet felírására. Ezért nem érdektelen, ha a DUFFIN [3, 4] munkáiban használt variációs elvet, melyet korlátos önadjungált operátorokból álló kvadratikussal nyalábra LANGER [10] és KÜHNE [9] alkalmazott, a nem-korlátos operátorokat tartalmazó $L(\lambda)$ nyalábra is megfogalmazzuk.

2. A sajátérték-problémához rendelhető variációs feladat

Tekintsük az (1.1), (1.2) feltételeknek eleget tevő A, B, C szimmetrikus operátorokat. Ekkor $u \in D(A)$, $u \neq 0$ esetén az $(L(\lambda)u, u) = (Au, u) - \lambda(Bu, u) - \lambda^2(Cu, u)$ polinom nullahelyeivel definiálható két funkcionál:

$$\mathcal{F}^+(u) = \frac{1}{2(Cu, u)} [-(Bu, u) + \sqrt{(Bu, u)^2 + 4(Au, u)(Cu, u)}], \quad (3)$$

$$\mathfrak{F}^-(u) = \frac{1}{2(Cu, u)} [-(Bu, u) - \sqrt{(Bu, u)^2 + 4(Au, u)(Cu, u)}]. \quad (4)$$

Az (1.1) és (1.2) feltételekből következően ezekre fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$\mathfrak{F}^-(u) < 0 < \mathfrak{F}^+(u), \quad (u \in D(A), u \neq 0).$$

Most alkalmazzunk egy transzformációt, amely az A, B, C szimmetrikus operátorokat korlátos önadjungált operátorokba viszi. Evégből legyen $z = Au$, ($u \in H_A$), $\mu = 1/\lambda$, $E = A^{-1}$, $F = -A^{-1}BA^{-1}$, $G = -A^{-1}CA^{-1}$. Ez a transzformáció az $L(\lambda)$ nyalábot az

$$L_1(\mu) = \mu^2 E + \mu F + G \quad (5)$$

alakba viszi. Nyilvánvalóan teljesül az

$$(Fz, z)^2 > 4(Ez, z)(Gz, z) \quad (z \in H, z \neq 0) \quad (6)$$

feltétel. Az $(L_1(\mu)z, z)$ polinom nullahelyeivel is definiálható két funkcionál:

$$\mathfrak{F}^+(z) = \frac{1}{2(Ez, z)} [-(Fz, z) + \sqrt{(Fz, z)^2 - 4(Ez, z)(Gz, z)}], \quad (7)$$

$$\mathfrak{F}^-(z) = \frac{1}{2(Ez, z)} [-(Fz, z) - \sqrt{(Fz, z)^2 - 4(Ez, z)(Gz, z)}]. \quad (8)$$

Könnyen kimutatható, hogy

$$\mathfrak{F}^+(u) = \frac{1}{\mathfrak{F}^+(z)}, \quad \mathfrak{F}^-(u) = \frac{1}{\mathfrak{F}^-(z)}, \quad \text{ha } z = Au. \quad (9)$$

Az $L_1(\mu)$ nyaláb a (6) feltétellel azonos KÜHNE [9] erősen csillapított operátornyalábjával. A (7) és (8) funkcionál is azonos KÜHNE [9] p és s funkcionáljaival. Így KÜHNE [9] 5.2 tétele alapján fennáll a következő (figyelembe véve, hogy A^{-1} a H ortogonális altereit H_A ortogonális altereibe viszi):

Minden

$$\lambda_i^+ = \sup_{\mathfrak{L} \in \mathfrak{L}_i} \inf_{u \in \mathfrak{L} \setminus \{0\}} \mathfrak{F}^+(u) \quad (i = 0, 1, \dots) \quad (10)$$

érték pozitív sajátértéke az $L(\lambda)$ operátornyalábnak. (10)-ben $\mathfrak{L}_i$ ($i = 0, 1, \dots$) jelöli a H_A -tér olyan altereinek az összességét, amelyeknek ortogonális komplementuma H_A -ban i -dimenziós altér. És hasonlóan: *Minden*

$$\lambda_i^- = \inf_{\mathfrak{L} \in \mathfrak{L}_i} \sup_{u \in \mathfrak{L} \setminus \{0\}} \mathfrak{F}^-(u) \quad (i = 0, 1, \dots) \quad (11)$$

érték negatív sajátértéke az $L(\lambda)$ operátornyalábnak. Az $L(\lambda)$ operátornyaláb sajátértékeit tehát az $\mathfrak{F}^+(u)$ és $\mathfrak{F}^-(u)$ funkcionálok stacionárius értékei adják.

Ebben a szakaszban megvizsgáljuk, hogyan fogalmazható meg a variációs feladat az $L(\lambda)$ nyaláb legkisebb pozitív (legnagyobb negatív) sajátértékének a meghatározására.

Az $\mathfrak{F}^+(u)$ ($u \in D(A)$, $u \neq 0$) pozitív értékű, míg az $\mathfrak{F}^-(u)$ ($u \in D(A)$, $u \neq 0$) negatív értékű funkcionál. Ezért

$$\inf_{u \in D(A) \setminus \{0\}} \mathfrak{F}^+(u) = d \geq 0 \quad \text{és} \quad \sup_{u \in D(A) \setminus \{0\}} \mathfrak{F}^-(u) = e \leq 0.$$

1. *L e m m a.* Legyenek A, B, C az (1.1) és (1.2) feltételeknek megfelelő szimmetrikus operátorok.

a) Ha $d \geq 0$ az $\mathfrak{F}^+(u)$ funkcionál alsó határa, és van olyan $u_0 \in D(A)$, $u_0 \neq 0$ elem, hogy $\mathfrak{F}^+(u_0) = d$, akkor csak a $d > 0$ eset állhat fenn.

b) Ha $e \leq 0$ az $\mathfrak{F}^-(u)$ funkcionál felső határa, és van olyan $u_1 \in D(A)$, $u_1 \neq 0$ elem, hogy $\mathfrak{F}^-(u_1) = e$, akkor csak az $e < 0$ eset állhat fenn.

B i z o n y í t á s. A lemmának csak az a) részét bizonyítjuk, mivel a b) rész bizonyítása ezzel teljesen analóg. Tegyük fel, hogy $d = 0$. Ekkor

$$\mathfrak{F}^+(u_0) = \frac{1}{2(Cu_0, u_0)} [-(Bu_0, u_0) + \sqrt{(Bu_0, u_0)^2 + 4(Au_0, u_0)(Cu_0, u_0)}] = 0.$$

Mivel (Cu_0, u_0) egy véges szám, és így $(Cu_0, u_0)^{-1} \neq 0$, ezért $-(Bu_0, u_0) + \sqrt{(Bu_0, u_0)^2 + 4(Au_0, u_0)(Cu_0, u_0)} = 0$. Innen $(Au_0, u_0)(Cu_0, u_0) = 0$. De mivel $u_0 \neq 0$, következik, hogy $(Cu_0, u_0) \neq 0$, és így $(Au_0, u_0) = 0$. Az A operátor pozitív definit volta miatt $(Au_0, u_0) = 0$ csak akkor állhat fenn, ha $u_0 = 0$. Ez pedig ellentmond a lemma $u_0 \neq 0$ feltételének. Következésképp $d > 0$.

1. *T é t e l.* Legyenek A, B, C az (1.1), (1.2) feltételeket kielégítő szimmetrikus operátorok, és jelölje d az $\mathfrak{F}^+(u)$ funkcionál értékének alsó határát, e pedig az $\mathfrak{F}^-(u)$ funkcionál értékének felső határát.

a) Ha létezik egy $u_0 \in D(A)$, $u_0 \neq 0$ elem úgy, hogy

$$\mathfrak{F}^+(u_0) = \frac{1}{2(Cu_0, u_0)} [-(Bu_0, u_0) + \sqrt{(Bu_0, u_0)^2 + 4(Au_0, u_0)(Cu_0, u_0)}] = d, \quad (12)$$

akkor d az $L(\lambda)$ nyaláb legkisebb pozitív sajátértéke és u_0 ennek az értéknek megfelelő sajátélem.

b) Ha létezik egy $u_1 \in D(A)$, $u_1 \neq 0$ elem úgy, hogy

$$\mathfrak{F}^-(u_1) = \frac{1}{2(Cu_1, u_1)} [-(Bu_1, u_1) - \sqrt{(Bu_1, u_1)^2 + 4(Au_1, u_1)(Cu_1, u_1)}] = e, \quad (13)$$

akkor e az $L(\lambda)$ nyaláb legnagyobb negatív sajátértéke és u_1 ennek az értéknek megfelelő sajátélem.

B i z o n y í t á s. A tételnek csak az a) részét bizonyítjuk, mivel a b) rész bizonyítása ezzel teljesen analóg. Legyen $\eta \in D(A)$ tetszőleges elem, és legyen t egy tetszőleges valós szám. Mivel $D(A)$ lineáris altér, nyilvánvalóan $u_0 + t\eta \in D(A)$. A $\varphi(t) = \mathfrak{F}^+(u_0 + t\eta)$ függvénynek $t = 0$ -nál minimuma van,

és $\left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{t=0} = 0$. A differenciálást a 0 helyen elvégezve, és az így nyert egyenletben a négyzetgyökös kifejezések helyébe (12) alapján d megfelelő kifejezését írva, majd az egyenletet $[2d(Cu_0, u_0) + (Bu_0, u_0)](Cu_0, u_0)^{-1}$ -nel szorozva a következőt kapjuk: $Re[(Au_0, \eta) + ((Au_0, u_0)(Cu_0, u_0)^{-1}Cu_0, \eta) - (dBu_0, \eta) - (d(Bu_0, u_0)(Cu_0, u_0)^{-1}Cu_0, \eta) - (d^2Cu_0, \eta)] = 0$. Ez az összefüggés a skalárszorzat linearitása miatt egyetlen skalárszorzat valós részeként írható fel, és ebben a skalárszorzatban az egyik elem η : $Re(Au_0 - dBu_0 - d^2Cu_0 + (Cu_0, u_0)^{-1}[(Au_0, u_0) - d(Bu_0, u_0) - d^2(Cu_0, u_0)]Cu_0, \eta) = 0$. A (12) összefüggés következtében azonban $(Au_0, u_0) - d(Bu_0, u_0) - d^2(Cu_0, u_0) = 0$. Ezt felhasználva az alábbi egyenletet nyerjük:

$$Re(Au_0 - dBu_0 - d^2Cu_0, \eta) = 0. \quad (14)$$

Jelölje i az imaginárius egységet. Mivel $D(A)$ lineáris altér, nyilvánvalóan $u_0 + i\eta \in D(A)$ is teljesül. Az $u_0 + i\eta$ esetében véghezvitt számítást $u_0 + i\eta$ esetében is elvégezve, az eredmény

$$Im(Au_0 - dBu_0 - d^2Cu_0, \eta) = 0 \quad (15)$$

lesz. A (14) és (15) egyenlőségből következik, hogy

$$(Au_0 - dBu_0 - d^2Cu_0, \eta) = 0. \quad (16)$$

Ez az összefüggés minden $\eta \in D(A)$ -ra fennáll. Definíció szerint $D(A)$ sűrű H -ban. Mivel (16) szerint az $Au_0 - dBu_0 - d^2Cu_0$ vektor a H -tér egy mindenütt sűrű alterének minden elemére ortogonális, következik, hogy az csak a tér nulla eleme lehet. Ezért

$$Au_0 - dBu_0 - d^2Cu_0 = 0,$$

azaz d az $L(\lambda)$ nyalábnak egy sajátértéke és u_0 a neki megfelelő sajátteleme.

A d érték pozitív. Közvetlenül adódik ez az 1. lemmából. Azt kell még belátni, hogy d a pozitív sajátértékek között a legkisebb. E végett legyen $\hat{\lambda}$ az $L(\lambda)$ nyalábnak egy tetszőleges pozitív sajátértéke és $\hat{u}$ a hozzá tartozó sajátteleme. Ekkor $A\hat{u} - \hat{\lambda}B\hat{u} - \hat{\lambda}^2C\hat{u} = 0$. Skalárisan szorozva ezt az egyenlőséget $\hat{u}$ -val, majd belőle $\hat{\lambda}$ -t kifejezve azt kapjuk, hogy $\hat{\lambda} = [2(C\hat{u}, \hat{u})]^{-1}[-(B\hat{u}, \hat{u}) + \sqrt{(B\hat{u}, \hat{u})^2 + 4(A\hat{u}, \hat{u})(C\hat{u}, \hat{u})}]$. (Tekintettel az A, B, C szimmetrikus operátorok (1.1), (1.2) tulajdonságaira, továbbá arra, hogy $\hat{\lambda} > 0$, ebben a kifejezésben a négyzetgyök csak pozitív előjellel szerepelhet.) Így $\hat{\lambda}$ -t egy (3) alakú kifejezéssel adtuk meg. A d a (3) infimuma, ezért $d \leq \hat{\lambda}$. Ez az egyenlőtlenség fennáll minden $\hat{\lambda} > 0$ sajátértékre. Következésképp d a legkisebb pozitív sajátértéke $L(\lambda)$ -nak, és éppen ezt kellett bizonyítanunk.

Az 1. tétel alapján az $L(\lambda)$ nyaláb legkisebb pozitív sajátértékének meghatározási problémája a következő variációs feladatra redukálódik: meg kell keresni az $\mathfrak{F}^+(u)$ funkcionált minimalizáló elemet, ill. az $\mathfrak{F}^+(u)$ funkcionál

minimumát. A további tárgyalás szempontjából előnyösebb lesz, ha ezt a variációs problémát kicsit másképpen fogalmazzuk meg. Vezessük be a következő jelölést: $\psi = (Cu, u)^{-1/2}u$. Ekkor $(C\psi, \psi) = 1$ és $[2(Cu, u)]^{-1}[-(Bu, u) + \sqrt{(Bu, u)^2 + 4(Au, u)(Cu, u)}] = -\frac{1}{2}(B\psi, \psi) + \sqrt{\frac{1}{4}(B\psi, \psi)^2 + (A\psi, \psi)}$. Ψ helyébe ismét u -t írva variációs feladatunk a következőképpen szól: meg kell határozni a

$$-\frac{1}{2}(Bu, u) + \sqrt{\frac{1}{4}(Bu, u)^2 + (Au, u)} \quad (17)$$

funkcionál minimumát a

$$(Cu, u) = 1 \quad (18)$$

feltétel mellett. A legnagyobb negatív sajátérték esetén pedig meg kell határozni a

$$-\frac{1}{2}(Bu, u) - \sqrt{\frac{1}{4}(Bu, u)^2 + (Au, u)} \quad (19)$$

funkcionál maximumát a (18) feltétel mellett.

3. A Ritz-Galerkin-módszer

Tételezzük fel, hogy teljesülnek az 1. tétel feltételei. Ekkor az $L(\lambda)$ nyaláb d legkisebb pozitív sajátértékének a meghatározása a (17) funkcionál (18) feltétel melletti minimumának, az e legnagyobb negatív sajátértékének a meghatározása a (19) funkcionál (18) feltétel melletti maximumának a meghatározására redukálódik.

Minthogy ez a két feladat lényegében ugyanúgy kezelhető, ezért a továbbiakban csak a legkisebb pozitív sajátérték meghatározásával foglalkozunk. A feladatot Ritz—Galerkin-módszerrel fogjuk megoldani. Megjegyezzük, hogy a vizsgált esetben a Ritz- és a Galerkin-módszer között a lényeget tekintve semmi különbség nincs, ezért használjuk a közös Ritz—Galerkin-módszer elnevezést.

Legyen a $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ elemsorozat koordinátarendszer, azaz a φ_n elemek 1) $\varphi_n \in D(A)$ ($n = 1, 2, \dots$); 2) lineárisan függetlenek; 3) az A operátor energetikai szorzata értelmében teljes rendszert alkotnak H_A -ban (az A operátor energetikai szorzatán a $[\varphi_i, \varphi_j]_A = (A\varphi_i, \varphi_j)$; $\varphi_i, \varphi_j \in D(A)$ skalárszorzatot értjük).

Rögzített n esetén vegyük az

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \quad (20)$$

kifejezést, ahol a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) komplex konstans. Határozzuk meg a (17) funkcionál minimumát a (18) feltétel mellett úgy, hogy' most u ne legyen tetszőleges $D(A)$ -beli elem, hanem csak (20) alakú, azaz csak olyan elem, amely a $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ koordinátaelemek által kifeszített n -dimenziós altérből való. Jelöljük ezt az alteret R_n -nel. Nyilvánvalóan $R_n \subset D(A)$.

Ezzel az eredeti variációs feladatot a következővel helyettesítettük: meg kell keresni a

$$A_n = -\frac{1}{2}(Bu_n, u_n) + \sqrt{\frac{1}{4}(Bu_n, u_n)^2 + (Au_n, u_n)} \quad (21)$$

mennyiség minimumát a

$$(Cu_n, u_n) = 1 \quad (22)$$

feltétel mellett, midőn $u_n \in R_n$.

A (21), (22)-ben szereplő skalárszorzatok az alábbiak:

$$(Au_n, u_n) = \sum_{k,l=1}^n (A\varphi_k, \varphi_l) a_k \bar{a}_l,$$

$$(Bu_n, u_n) = \sum_{k,l=1}^n (B\varphi_k, \varphi_l) a_k \bar{a}_l,$$

$$(Cu_n, u_n) = \sum_{k,l=1}^n (C\varphi_k, \varphi_l) a_k \bar{a}_l.$$

(Ezekben a kifejezésekben $\bar{a}_l$ a_l komplex konjugáltját jelöli.) Így A_n az $a_1, a_2, \dots, a_n$ együtthatók függvénye. Ebből következően egy n komplex változótól függő, valós értékű függvény feltételes szélsőértékének a meghatározása lesz a feladat. Mivel $a_k = x_k + iy_k$; x_k, y_k valós; $k = 1, 2, \dots, n$, azt is mondhatjuk, hogy egy $2n$ -változós függvény feltételes szélsőértékét kell megkeresni.

Ezt a feladatot a Lagrange-féle multiplikátor módszerrel fogjuk megoldani. Megkonstruáljuk a

$$\Phi(u_n) = -\frac{1}{2}(Bu_n, u_n) + \sqrt{\frac{1}{4}(Bu_n, u_n)^2 + (Au_n, u_n)} - \nu[(Cu_n, u_n) - 1]$$

függvényt, ahol ν egy egyelőre meg nem határozott numerikus faktor, majd Φ -nek az a_l ($l = 1, 2, \dots, n$) együtthatók x_l valós és y_l képzetes része szerinti parciális deriváltjait egyenlővé tesszük nullával. A levezetés részleteinek mellőzésével ez az a_k ismeretlenekre a következő homogén lineáris egyenletrendszert eredményezi:

$$\sum_{k=1}^n a_k [(A\varphi_k, \varphi_l) - A_n(B\varphi_k, \varphi_l) - A_n^2(C\varphi_k, \varphi_l)] = 0, \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad (23)$$

Az a_k ismeretlenek nem lehetnek mind nullák, mert akkor (20)-ban $u_n = 0$ lenne, amiből $(Cu_n, u_n) = 0$ adódnék, és ez ellentmondana a (22) feltételnek. Innen következik, hogy a (23) egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, és ezért a rendszer determinánsának nullával kell egyenlőnek lennie. A determináns Δ_n -re egy egyenletet ad:

$$\begin{vmatrix} (\mathcal{A}\varphi_1, \varphi_1) - \mathcal{A}_n(\mathcal{B}\varphi_1, \varphi_1) - \mathcal{A}_n^2(\mathcal{C}\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\mathcal{A}\varphi_n, \varphi_1) - \mathcal{A}_n(\mathcal{B}\varphi_n, \varphi_1) - \mathcal{A}_n^2(\mathcal{C}\varphi_n, \varphi_1) \\ (\mathcal{A}\varphi_1, \varphi_2) - \mathcal{A}_n(\mathcal{B}\varphi_1, \varphi_2) - \mathcal{A}_n^2(\mathcal{C}\varphi_1, \varphi_2) & \dots & (\mathcal{A}\varphi_n, \varphi_2) - \mathcal{A}_n(\mathcal{B}\varphi_n, \varphi_2) - \mathcal{A}_n^2(\mathcal{C}\varphi_n, \varphi_2) \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathcal{A}\varphi_1, \varphi_n) - \mathcal{A}_n(\mathcal{B}\varphi_1, \varphi_n) - \mathcal{A}_n^2(\mathcal{C}\varphi_1, \varphi_n) & \dots & (\mathcal{A}\varphi_n, \varphi_n) - \mathcal{A}_n(\mathcal{B}\varphi_n, \varphi_n) - \mathcal{A}_n^2(\mathcal{C}\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0. \quad (24)$$

Megállapíthatjuk, hogy a (24) egyenlet pontosan $2n$ -edfokú, mivel $(-1)^n A_n^{2n}$ együttthatója a $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ elemek C operátor szerinti Gram-determinánsa, amely nem nulla, hiszen C pozitív operátor és a $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ koordináta elemek lineárisan függetlenek. Ebből az algebra alaptétele szerint következik, hogy a (24) egyenletnek $2n$ gyöke van.

Legyen $\lambda_n^{(i)}$ ezen gyökök valamelyike. Ezt behelyettesítve a (23) egyenletrendszerbe, a determinánst nullává téve, a rendszernek lesznek nemtriviális megoldásai. Legyen $a_k^{(i)}$, $k = 1, 2, \dots, n$ egy ilyen megoldás. Behelyettesítve $\lambda_n = \lambda_n^{(i)}$ -t és $a_k = a_k^{(i)}$ -t (23)-ba, azonosságot kapunk:

$$\sum_{k=1}^n a_k^{(i)}(A\varphi_k, \varphi_l) - \Lambda_n^{(i)} \sum_{k=1}^n a_k^{(i)}(B\varphi_k, \varphi_l) - (\Lambda_n^{(i)})^2 \sum_{k=1}^n a_k^{(i)}(C\varphi_k, \varphi_l) = 0, \\ l = 1, 2, \dots, n.$$

Ezt beszorozzuk $\overline{\alpha_l^{(l)}}$ -tal, és összegzünk minden l -re. Így a következőhöz jutunk:

$$\sum_{k,l=1}^n a_k^{(i)} \overline{a_l^{(i)}} (A\varphi_k, \varphi_l) - \Lambda_n^{(i)} \sum_{k,l=1}^n a_k^{(i)} \overline{a_l^{(i)}} (B\varphi_k, \varphi_l) - (\Lambda_n^{(i)})^2 \sum_{k,l=1}^n a_k^{(i)} \overline{a_l^{(i)}} (C\varphi_k, \varphi_l) = 0.$$

Legyen $u_n^{(i)} = \sum_{k=1}^n a_k^{(i)} \varphi_k$. Ekkor az előző egyenlőség az alábbi alakot nyeri:

$$(Au_n^{(i)}, u_n^{(i)}) - \Lambda_n^{(i)}(Bu_n^{(i)}, u_n^{(i)}) - (\Lambda_n^{(i)})^2(Cu_n^{(i)}, u_n^{(i)}) = 0.$$

A (22) feltétel miatt $(Cu_n^{(i)}, u_n^{(i)}) = 1$. Így az

$$(Au_n^{(i)}, u_n^{(i)}) - \mathcal{A}_n^{(i)}(Bu_n^{(i)}, u_n^{(i)}) - (\mathcal{A}_n^{(i)})^2 = 0 \quad (25)$$

összefüggést kapjuk, amely fennáll $i = 1, 2, \dots, 2n$ esetén. Az A, B szimmetrikus operátorok közül az A operátor pozitív definit, ezért (25) diszkriminánsa pozitív. Ebből következik, hogy a (24) egyenlet $\lambda_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$) gyökei valósak. Továbbmenve, valamelyik $u_n^{(i)} = u_n^o$ elem minimalizálja a (21) mennyiséget. A (25)-ből az is következik, hogy ez a minimum azonos a (24) egyenlet legkisebb pozitív gyökével. Jelöljük ezt a gyököt λ_n^{o+} -val. Legyen

$m > n$. Jelölje $\Lambda_m^{\circ+}$ m esetére a (21) mennyiség (22) feltétel melletti minimumát. Ekkor

$$\Lambda_n^{\circ+} \geq \Lambda_m^{\circ+} \geq d.$$

Ez az egyenlőtlenség nyilvánvalóan fennáll, hiszen $R_n \subset R_m \subset D(A)$, és egyrészt (21) minimuma egy bővebb halmazban nem növekedhet, másrészt (17) minimuma egy szűkebb halmazban nem csökkenhet. Ebből következik, hogy midőn $n \rightarrow \infty$, a $\Lambda_n^{\circ+}$ mennyiség monoton fogyón tart egy határértékhez, amely $\geq d$. A $\Lambda_n^{\circ+}$ számot az $L(\lambda)$ nyaláb, ill. az (1) egyenlet legkisebb pozitív sajátértéke n -ik Ritz—Galerkin-féle közelítésének nevezzük. Hasonlóképpen értelmezhetjük a $\Lambda_n^{\circ-}$ számot mint az $L(\lambda)$ nyaláb legnagyobb negatív sajátértékének n -edik Ritz—Galerkin-féle közelítését ($\Lambda_n^{\circ-} \leq e$).

2. Tétel. Legyen B a H -teret önmagába képező pozitív operátor ($(Bu, u) > 0, u \in D(B), u \neq 0$). Ha teljesülnek az 1. tétel feltételei, akkor az eddigi jelölések mellett fennáll a következő:

$$a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n^{\circ+} = d,$$

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n^{\circ-} = e.$$

Bizonyítás. A tételnek csak az a) állítását bizonyítjuk, mert b) bizonyítása ezzel analóg. Bevezetjük az $[u, v]_A = (Au, v)$, $[u, v]_B = (Bu, v)$, $[u, v]_C = (Cu, v)$; $u, v \in D(A)$ energetikus szorzatokat és az $|u|_A = \sqrt{[u, u]_A}$, $|u|_B = \sqrt{[u, u]_B}$, $|u|_C = \sqrt{[u, u]_C}$ energetikus normákat. Ezek segítségével a (17) funkcionál és a (18) feltétel így írható:

$$-\frac{1}{2}|u|_B^2 + \sqrt{\frac{1}{4}|u|_B^4 + |u|_A^2}, \quad (26)$$

$$|u|_C^2 = 1. \quad (27)$$

A tételben — kissé másképp fogalmazva — feltettük, hogy létezik olyan $u_0 \neq 0$, $u_0 \in D(A)$ elem, amelyen a (26) funkcionál a (27) feltétel mellett felveszi a d minimumát. Az 1. lemma szerint ekkor $d > 0$.

A (26) funkcionál az u_0 helyen folytonos, hiszen a normaképzés folytonos, és (26)-ban a különböző operátorok szerinti normákat folytonos műveletek kapcsolják össze. A $d > 0$ minimum volta és a (26) funkcionál u_0 -beli folytonossága miatt bármely pozitív ε -hoz léteznek $\delta, \delta_A, \delta_B$ pozitív számok és $u' \in D(A)$ elem úgy, hogy $\|u_0 - u'\| < \delta$ esetén

$$|u_0 - u'|_A < \delta_A, \quad (28)$$

$$|u_0 - u'|_B < \delta_B \quad (29)$$

és

$$d \leq -\frac{1}{2}|u'|_B^2 + \sqrt{\frac{1}{4}|u'|_B^4 + |u'|_A^2} < d + \varepsilon, \quad (30)$$

$$|u'|_C^2 = 1. \quad (31)$$

Mivel a φ_n ($n = 1, 2, \dots$) elemsorozat teljes az A operátor energetikus szorzatában, ezért található egy u'_N elem: $u'_N = \sum_{k=1}^N b_k \varphi_k$, $b_k = \text{konstans}$ úgy, hogy

$$|u' - u'_N|_A < \varepsilon. \quad (32)$$

Innen

$$|u'_N|_A \leq |u'|_A + \varepsilon. \quad (33)$$

A d a (3) funkcionál minimuma, ezért teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$d \leq \frac{1}{2|u' - u'_N|_C^2} (-|u' - u'_N|_B^2 + \sqrt{|u' - u'_N|_B^4 + 4|u' - u'_N|_A^2 |n' - u'_N|_C^2}).$$

Azonos átalakítások után:

$$d^2 |u' - u'_N|_C^2 + d |u' - u'_N|_B^2 \leq |u' - u'_N|_A^2.$$

Ebből (32) felhasználásával a következő becslések tehetők:

$$|u' - u'_N|_B^2 \leq \frac{1}{d} |u' - u'_N|_A^2 - d |u' - u'_N|_C^2 \leq \frac{1}{d} \varepsilon^2,$$

innen

$$|u'_N|_B \geq |u'|_B - \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}, \quad (34)$$

illetve

$$|u' - u'_N|_C^2 \leq \frac{1}{d^2} |u' - u'_N|_A^2 - \frac{1}{d} |u' - u'_N|_B^2 \leq \frac{1}{d^2} \varepsilon^2,$$

innen

$$|u' - u'_N|_C \leq \frac{\varepsilon}{d}. \quad (35)$$

Tekintsük ezután az

$$\tilde{u}_N = \frac{u'_N}{|u'_N|_C}$$

elemet. Ekkor $|\tilde{u}_N|_C = 1$. A továbbiak folyamán szükségünk lesz $\tilde{u}_N$ A és B operátor szerinti normáinak olyan becsléseire, mint u'_N -nek (33) és (34) becslései.

(35) alapján fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$|u'_N|_C \leq |u'|_C + \frac{\varepsilon}{d} = 1 + \frac{\varepsilon}{d}, \quad (36)$$

$$|u'_N|_C \geq |u'|_C - \frac{\varepsilon}{d} = 1 - \frac{\varepsilon}{d}. \quad (37)$$

A (37) és (33) becslések következtében

$$|\tilde{u}_N|_A = \frac{1}{|u'_N|_C} |u'_N|_A \leq \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{d}} |u'_N|_A \leq \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{d}} (|u'|_A + \varepsilon).$$

Elég kis $1 > \varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $K > 1$ véges szám, hogy

$$\frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{d}} \leq 1 + \frac{K}{d} \varepsilon$$

teljesül. Így

$$|\tilde{u}_N|_A \leq \left(1 + \frac{K}{d} \varepsilon\right) (|u'|_A + \varepsilon) = |u'|_A + \varepsilon \left(1 + \frac{K}{d} |u'|_A + \varepsilon \frac{K}{d}\right). \quad (38)$$

Továbbá a (36) és (34) egyenlőtlenségek miatt

$$\begin{aligned} |\tilde{u}_N|_B &= \frac{1}{|u'_N|_C} |u'_N|_B \geq \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{d}} |u'_N|_B \geq \frac{1 - \frac{\varepsilon}{d}}{1 - \left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^2} \left(|u'|_B - \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}\right) \geq \\ &\geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{d}\right) \left(|u'|_B - \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}\right), \end{aligned}$$

innen

$$|\tilde{u}_N|_B \geq |u'|_B - \varepsilon \left(\frac{1}{d} |u'|_B + \frac{1}{\sqrt{d}}\right). \quad (39)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\varepsilon(A) = \varepsilon \cdot \left(1 + \frac{K}{d} |u'|_A + \varepsilon \frac{K}{d}\right),$$

$$\varepsilon(B) = \varepsilon \cdot \left(\frac{1}{d} |u'|_B + \frac{1}{\sqrt{d}}\right).$$

Ekkor (38) és (39) az alábbi alakú lesz:

$$|\tilde{u}_N|_A \leq |u'|_A + \varepsilon(A), \quad (40)$$

$$|\tilde{u}_N|_B \geq |u'|_B - \varepsilon(B). \quad (41)$$

Az u'_N definíciójából és d minimum voltából következik, hogy

$$d \leq -\frac{1}{2} |\tilde{u}_N|_B^2 + \sqrt{\frac{1}{4} |\tilde{u}_N|_B^4 + |\tilde{u}_N|_A^2}.$$

Alkalmazzuk a következő jelölést:

$$h = -\frac{1}{2} |\tilde{u}_N|_B^2 + \sqrt{\frac{1}{4} |\tilde{u}_N|_B^4 + |\tilde{u}_N|_A^2}.$$

Ebből $h^2 + h|\tilde{u}_N|_B^2 - |\tilde{u}_N|_A^2 = 0$. Alkalmazva a (40) és (41) becsléseket,

$$h^2 + h(|u'|_B - \varepsilon(B))^2 - (|u'|_A + \varepsilon(A))^2 \leq 0$$

adódik. Innen

$$\begin{aligned} h &\leq -\frac{1}{2}(|u'|_B - \varepsilon(B))^2 + \sqrt{\frac{1}{4}(|u'|_B - \varepsilon(B))^4 + (|u'|_A + \varepsilon(A))^2} \leq \\ &\leq -\frac{1}{2}|u'|_B^2 + \sqrt{\frac{1}{4}|u'|_B^4 + |u'|_A^2} \cdot \sqrt{1 + \varepsilon(A) \frac{2|u'|_A + \varepsilon(A)}{\frac{1}{4}|u'|_B^4 + |u'|_A^2}} + \varepsilon(B)|u'|_B. \end{aligned}$$

Ennek az egyenlőtlenség-sorozatnak a jobb oldalán, a második négyzetgyökjel alatt 1 után egy pozitív mennyiség áll. Továbbá $x > -1$ esetén $\sqrt{1+x} \leq 1 + 1/2 x$. Ezekből következően

$$h \leq -\frac{1}{2}|u'|_B^2 + \sqrt{\frac{1}{4}|u'|_B^4 + |u'|_A^2} + \frac{\varepsilon(A)}{2} \frac{2|u'|_A + \varepsilon(A)}{\sqrt{\frac{1}{4}|u'|_B^4 + |u'|_A^2}} + \varepsilon(B)|u'|_B. \quad (43)$$

Jelölje $g(\varepsilon(A))$ a (43) utolsó előtti tagját. Becsüljük meg felülről ezt a

$$g(\varepsilon(A)) = \frac{\varepsilon(A)}{2} \frac{2|u'|_A + \varepsilon(A)}{\sqrt{\frac{1}{4}|u'|_B^4 + |u'|_A^2}}$$

mennyiséget. Helyettesítsük be ide $\varepsilon(A)$ helyére az őt értelmező kifejezést. Figyelembe véve, hogy (30) bal oldali egyenlőtlensége alapján

$$d \leq \sqrt{\frac{1}{4}|u'|_B^4 + |u'|_A^2},$$

és egy korábbi feltételezés szerint $\varepsilon < 1$, továbbá bevezetve az

$$a = \frac{K}{d} + \frac{1}{2} \left(\frac{K}{d} \right)^2, \quad b = \left(1 + \frac{K}{d} \right)^2, \quad c = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{K}{d} \right)^2$$

jelöléseket, az alábbi becslés igaz:

$$g(\varepsilon(A)) \leq \varepsilon \frac{1}{d} (|u'|_A^2 a + |u'|_A b + c).$$

A (28) egyenlőtlenségből következik, hogy $|u'|_A \leq |u_0|_A + \delta_A$, és így

$$g(\varepsilon(A)) \leq \varepsilon \frac{1}{d} [(|u_0|_A + \delta_A)^2 a + (|u_0|_A + \delta_A) b + c].$$

Mint hogy u_0 egy meghatározott rögzített elem, és így $|u_0|_A$ egy véges szám, ezért

$$g(\varepsilon(A)) \leq \varepsilon K_1, \quad (44)$$

ahol $K_1 > 0$ egy alkalmasan választott konstans. Adjunk felső becslést ezután az

$$\varepsilon(B)|u'|_B = \varepsilon \left(\frac{1}{d} |u'|_B^2 + \frac{1}{\sqrt{d}} |u'|_B \right)$$

menyiségre. A (29) egyenlőtlenség következtében $|u'|_B \leq |u_0|_B + \delta_B$. Ekkor

$$\varepsilon(B)|u'|_B \leq \varepsilon \left[\frac{1}{d} (|u_0|_B + \delta_B)^2 + \frac{1}{\sqrt{d}} (|u_0|_B + \delta_B) \right] \leq \varepsilon K_2, \quad (45)$$

ahol $K_2 > 0$ egy alkalmasan választott konstans. A (43) becslés (44) és (45) alapján így folytatható:

$$h \leq -\frac{1}{2} |u'|_B^2 + \sqrt{\frac{1}{4} |u'|_B^4 + |u'|_A^2} + \varepsilon(K_1 + K_2).$$

Ebből a (30) jobb oldali egyenlőtlenségének és a (42) egyenlőtlenségnek a felhasználásával kapjuk:

$$d \leq -\frac{1}{2} |\tilde{u}_N|_B^2 + \sqrt{\frac{1}{4} |\tilde{u}_N|_B^4 + |\tilde{u}_N|_A^2} < d + \varepsilon(1 + K_1 + K_2) = d + \eta,$$

ahol $\eta = \varepsilon(1 + K_1 + K_2)$. Továbbá Λ_N^{o+} a

$$-\frac{1}{2} (Bu_N, u_N) + \sqrt{\frac{1}{4} (Bu_N, u_N)^2 + (Au_N, u_N)}$$

kifejezés minimuma a $(Cu_N, u_N) = 1$ feltétel mellett, ahol $u_N = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k$. Így

$$d \leq \Lambda_N^{o+} \leq -\frac{1}{2} |\tilde{u}_N|_B^2 + \sqrt{\frac{1}{4} |\tilde{u}_N|_B^4 + |\tilde{u}_N|_A^2} < d + \eta, \quad |\tilde{u}_N|_C^2 = 1.$$

Ha $n \geq N$, akkor $\Lambda_n^{o+} \leq \Lambda_N^{o+}$, és $d \leq \Lambda_n^{o+} < d + \eta$ tetszőleges kicsi $\eta > 0$ -ra. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n^{o+} = d$, azaz a Λ_n^{o+} Ritz–Galerkin-féle közelítő értékek határértéke az $L(\lambda)$ nyaláb d legkisebb pozitív sajátértékét adja.

4. Kiegészítő megjegyzések

4.1. A (24) egyenlet hasonló ahhoz a karakterisztikus egyenlethez, amelyet pl. MIHLIN [11] az $Au - \lambda Bu = 0$ alakú lineáris sajátérték-feladat esetén közöl ($C = 0$ esetén azonos vele, ha A és B pozitív definit).

4.2. A 2. tétel valószínűleg akkor is igaz marad, ha a B operátortól nem követeljük meg, hogy pozitív legyen. Ennek a bizonyításával azonban nem foglalkoztunk.

4.3. Ha $n \rightarrow \infty$, akkor $\Lambda_n \rightarrow \lambda$. Λ_n a pozitív sajátértékeket monoton fogyón, vagyis felülről, a negatív sajátértékeket monoton növevőn, vagyis alulról

közelíti. *A Ritz–Galerkin-módszer tehát a kritikus teherparamétert kvadrátikus feladatoknál is abszolút értékben mindig felülről közelíti.*

4.4. Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_n &= [a_{ij}]; & a_{ij} &= (A\varphi_j, \varphi_i); & i, j &= 1, 2, \dots, n, \\ \mathbf{B}_n &= [b_{ij}]; & b_{ij} &= (B\varphi_j, \varphi_i); & i, j &= 1, 2, \dots, n, \\ \mathbf{C}_n &= [c_{ij}]; & c_{ij} &= (C\varphi_j, \varphi_i); & i, j &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Ezekkel a szimmetrikus n -edrendű mátrixokkal a (24) egyenlet a következőbe megy át:

$$|\mathbf{A}_n - \Lambda_n \mathbf{B}_n - \Lambda_n^2 \mathbf{C}_n| = 0. \quad (46)$$

A (46) egyenletre jutunk akkor is, ha tekintjük az

$$[\mathbf{A}_n - \Lambda_n \mathbf{B}_n - \Lambda_n^2 \mathbf{C}_n] \mathbf{x}_n = \mathbf{0} \quad (47)$$

sajátérték-feladatot. Ez, mint ismeretes [10, 14], a következő $2n$ -edrendű mátrix sajátértékeinek a meghatározására vezethető vissza:

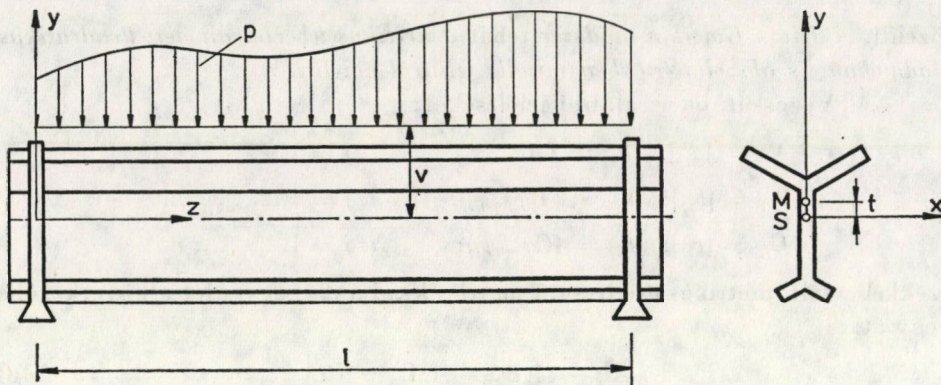
$$\mathbf{M}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_n \mathbf{A}_n^{-1} & \mathbf{C}_n \mathbf{A}_n^{-1} \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{I}_n$ az n -ik egységmátrix és $\mathbf{0}_n$ az n -ik nullamátrix. Az $\mathbf{M}_n$ mátrix sajátértékeinek a reciproka adja a (47) sajátértékeit. A vizsgálódásainkban szereplő $\mathbf{A}_n$ mátrix mindig invertálható, ezért az $\mathbf{M}_n$ mátrix mindig megkonstruálható. Ezek után az $\mathbf{M}_n$ mátrix legnagyobb pozitív, ill. legkisebb negatív sajátértékeit kell meghatározni, majd ezek reciprokát kell venni. Ezzel a feladat gépi számításra is alkalmas formát ölt, és elkerülhetők a (24) determináns kifejtésével járó nehézségek. Végül az eredeti (1) egyenlet keresett sajátértékeit az $\mathbf{M}_n$ mátrix említett sajátértékei reciprokának a határértéke eredményezi, midőn $n \rightarrow \infty$.

4.5. Ha a 3. szakaszban felvett $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ koordinátarendszer teljes ortonormált bázis, és az A, B, C operátorokat végtelen mátrixokkal reprezentáljuk ([1] 153. o.), majd tekintjük a velük felírt (1) sajátérték-feladatnak a $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ báziselemek által kifeszített n -dimenziós altérre vett $(\mathbf{A}_n - \Lambda_n \mathbf{B}_n - \Lambda_n^2 \mathbf{C}_n) \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ projekcióját, akkor ugyanazt az n -dimenziós sajátérték-feladatot, ill. karakterisztikus egyenletet nyerjük, mint a Ritz–Galerkin-módszer esetén. Ha $n \rightarrow \infty$, akkor $\mathbf{A}_n \rightarrow A$, $\mathbf{B}_n \rightarrow B$, $\mathbf{C}_n \rightarrow C$ és $\Lambda_n \rightarrow \lambda$.

5. A két végén villásan megtámasztott tartó kifordulása

Tekintsünk egy mindkét végén villásan megtámasztott, transzverzális erőkkkel terhelt, vékonyfalú, szimmetrikus és nyitott keresztmetszetű tartót (1. ábra). Ha a tartó keresztmetszete állandó, és a terhek a kifordulás előtt



1. ábra

a tartó szimmetriasíkjában működnek, akkor a tartó kifordult állapotbeli egyensúlyát az

$$EJ_{\phi} \vartheta'''' - t(M_x \vartheta)'' - GJ_c \vartheta'' - tM_x \vartheta'' - \frac{M_x^2}{EJ_y} \vartheta + r(M_x \vartheta')' - p v \vartheta = 0 \quad (48)$$

differentiálegyenlet írja le [2] a

$$\vartheta(0) = \vartheta(l) = \vartheta''(0) = \vartheta''(l) = 0 \quad (49)$$

peremfeltételek mellett. (48), (49)-ben az egyes jelölések értelmezése a következő:

x, y, z koordináták (lásd 1. ábra),

ϑ a keresztmetszet elfordulásának a szöge,

t a csavarási középpontnak a súlyponttól mért távolsága,

r a keresztmetszeti sugár $\left(r = \frac{1}{J_x} \cdot \int_F y(x^2 + y^2) dF \right)$, ahol J_x a keresztmetszet x tengelyre vett tehetetlenségi nyomatéka, F pedig a keresztmetszet felülete),

v a teher támadáspontjának a súlyponttól mért távolsága,

l a tartó támaszköze,

J_y a keresztmetszet y tengelyre vett tehetetlenségi nyomatéka,

J_c a keresztmetszet csavarási tehetetlenségi nyomatéka,

J_{ϕ} a keresztmetszet öblösödési állandója,

E a rugalmassági modulus,

G a nyírási rugalmassági modulus,

p a transzverzális teher,

M_x a p teherből származó x irányú hajlítónyomaték,

$(\cdot)' = \frac{d}{dz}$ a z változó szerinti differenciálás jele.

Jelölje p_0 a teher paraméterét. Ekkor a teher és a hajlítónyomaték függvénye a következő módon írható:

$$p = p_0 p_1, \quad M_x = p_0 M_{x1}, \quad (50)$$

ahol p_1 és M_{x1} a teher, ill. a hajlítónyomaték $p_0 = 1$ melletti értékét jelöli. Behelyettesítve (50)-et (48)-ba, a (48) egyenlet az alábbi alakú lesz:

$$EJ_{\phi} \vartheta'''' - GJ_c \vartheta'' - p_0 [t(M_{x1} \vartheta)'' + tM_{x1} \vartheta'' - r(M_{x1} \vartheta')' + p_1 v \vartheta] - p_0^2 \frac{M_{x1}^2}{EJ_y} \vartheta = 0. \quad (51)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$A\vartheta = EJ_{\bullet}\vartheta''' - GJ_c\vartheta'', \quad (52a)$$

$$B\vartheta = t(M_{x1}\vartheta)'' + tM_{x1}\vartheta'' - r(M_{x1}\vartheta')' + p_1v\vartheta, \quad (52b)$$

$$C\vartheta = M_{x1}^2(EJ_y)^{-1}\vartheta. \quad (52c)$$

Így (51) az

$$A\vartheta - p_0B\vartheta - p_0^2C\vartheta = 0 \quad (53)$$

egyenletbe megy át. (53) egy (1) alakú sajátérték-feladat. λ szerepét most p_0 , u szerepét pedig ϑ tölti be. Az A , ill. B és C olyan differenciáloperátorokat jelöl, amelyek a (49) peremfeltételeket kielégítő, négyszer, ill. kétszer folytonosan differenciálható függvények osztályán vannak értelmezve. A H Hilbert-tér most a $[0, l]$ intervallumon négyzetesen integrálható valós függvények $L^2[0, l]$ tere, ahol a $\varphi, \psi \in L^2[0, l]$ elemek skalárszorzatát az alábbi módon értelmezzük:

$$(\varphi, \psi) = \int_0^l \varphi(z) \cdot \psi(z) dz.$$

Bizonyítható, hogy az (52a–c) összefüggésekkel definiált operátorok közül: A szimmetrikus, pozitív definit, diszkrét spektrumú, B szimmetrikus, C szimmetrikus pozitív; továbbá BA^{-1} és CA^{-1} véges abszolút normájú operátorok. Teljesülnek tehát azok a feltételek, amelyek az (53) egyenlet p_0 sajátértékeinek létezését és a Ritz–Galerkin-módszer konvergenciáját biztosítják.

5.1 Az egyenletesen megoszló teherrel terhelt tartó

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a p transzverzális teher a tartó hossza mentén állandó. Figyelembe véve, hogy ekkor $p_0 = p$, $p_1 = 1$, $M_{x1} = -\frac{z}{2}(l - z)$, továbbá, hogy $-p = M_x''$, az (52a–c) összefüggésekkel értelmezett A , B , C operátorok a következők lesznek:

$$A\vartheta = EJ_{\bullet}\vartheta''' - GJ_c\vartheta'',$$

$$B\vartheta = -(r - 2t) \left[\frac{z}{2}(l - z)\vartheta' \right]' + (v - t)\vartheta,$$

$$C\vartheta = \frac{1}{EJ_y} \left[\frac{z}{2}(l - z) \right]^2 \vartheta.$$

A p teher kritikus értékének meghatározására a $\vartheta = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i$ trigonometrikus sort alkalmazzuk, ahol a_i ($i = 1, 2, \dots$) ismeretlen állandó, és $\varphi_i = \sin \frac{i\pi z}{l}$.

A (24) egyenletben szereplő skalárszorzatok ekkor így alakulnak, ha $i = j$:

$$(A\varphi_i, \varphi_i) = EJ_* \frac{(i\pi)^4}{2l^3} + GJ_c \frac{(i\pi)^2}{2l},$$

$$(B\varphi_i, \varphi_i) = (r - 2t) l \frac{(i\pi)^2 - 3}{24} + (v - t) \frac{l}{2},$$

$$(C\varphi_i, \varphi_i) = \frac{l^5}{16EJ_y \pi^4} \frac{(i\pi)^4 + 45}{15i^4},$$

és ha $i \neq j$, de $i + j$ páros:

$$(A\varphi_j, \varphi_i) = 0,$$

$$(B\varphi_j, \varphi_i) = -(r - 2t) lij \frac{i^2 + j^2}{(i^2 - j^2)^2},$$

$$(C\varphi_j, \varphi_i) = -\frac{24l^5}{EJ_y \pi^4} \frac{ij(i^2 + j^2)}{(i^2 - j^2)^4}.$$

Ha $i + j$ páratlan, akkor

$$(A\varphi_j, \varphi_i) = (B\varphi_j, \varphi_i) = (C\varphi_j, \varphi_i) = 0.$$

A skalárszorzatok ismeretében a p teher kritikus értékét a (24) egyenlet megoldása útján, vagy a 4.4. pontban ismertetett eljárás segítségével lehet kiszámítani.

Végezetül megemlíjtük, hogy a transzverzális erővel terhelt tartó kifordulási feladata általában visszavezethető egy szimmetrikus kvadratikus sajátértékfeladatra, ha a keresztmetszet csavarási középpontjának eltolódás-függvényére és a keresztmetszet ϑ elfordulás-függvényére ugyanazok a peremfeltételek vannak előírva. A (48) egyenlet azonban csak olyan peremfeltételek mellett írja le a tartó kifordult állapotbeli egyensúlyát, amelyeknél az oldalirányú hajlítás egyenletének [2] kétszeri integrálásakor előálló integrálási állandók értéke nulla. Ez, a már tárgyalt villás megtámasztáson kívül, pl. az egyik végén befogott, másik végén szabad tartó esetében teljesül.

IRODALOM

1. АХИЕЗЕР, Н. И.—ГЛАЗМАН, И. М.: Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Изд. второе. Изд. Наука, Москва, 1966
2. SCHWALLA, E.: Kippung von Trägern mit einfach-symmetrischen, dünnwandigen und offenen Querschnitten. *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften Wien IIa*, **153** (1944), 47—60
3. DUFFIN, R. J.: A Minimax Theory for Overdamped Networks. *Journal of Rational Mechanics and Analysis* **4** (1955), 221—233
4. DUFFIN, R. J.: The Rayleigh-Ritz Method for Dissipative or Gyroscopic Systems. *Quarterly of Applied Mathematics* **18** (1960), 215—221

5. EISENFELD, J.: On Symmetrization and Roots of Quadratic Eigenvalue Problems. *Journal of Functional Analysis* 9 (1972), 410—422
6. ХАРАЗОВ, Д. Ф.: Некоторые вопросы теории линейных симметризуемых операторов. *Математический Сборник* 42 (84), 2 (1957), 129—178
7. КРЕЙН, М. Г.—ЛАНГЕР, Г. К.: К теории квадратических пучков самосопряженных операторов. *Докл. Акад. наук СССР* 154 № 6 (1964), 1258—1261
8. КРЕЙН, М. Г.—ЛАНГЕР, Г. К.: О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов. Приложения теории функций в механике сплошной среды. Труды международного симпозиума в Тбилиси, 17—23 сентября 1963 г. Том 2. Изд. Наука, Москва, 1965, 283—322.
9. KÜHNLE, R.: Minimaxprinzip für stark gedämpfte Scharen. *Acta Sci. Math. Szeged* 29 (1968) 3—4, 39—68
10. LANGER, H.: Über stark gedämpfte Scharen im Hilbertraum. *Journal of Mathematics and Mechanics* 17 (1968) 7, 685—705
11. МИХЛИН, С. Г.: Вариационные методы в математической физике. Изд. второе. Изд. Наука, Москва, 1970
12. MÜLLER, P. H.: Eine neue Methode zur Behandlung nichtlinearer Eigenwertaufgaben. *Mathematische Zeitschrift* 70 (1959), 381—406
13. MÜLLER, P. H.: Eigenwertabschätzungen für Gleichungen vom Typ $(\lambda^2 I - \lambda A - B)x = 0$. *Archiv der Mathematik* 12 (1961), 307—310
14. POPPER, GY.—FERENCZY, M.: Numerical Method for Solving Eigenvalue Problems of Linear Vibration Systems of Finite Degrees of Freedom. *Acta Techn. Hung.* 84 (1977), 85—96
15. ZAAANEN, A. C.: Linear Analysis. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1960

Investigation of the Lateral Buckling of Beams with the Aid of the Theory of Quadratic Operator Pencils. A variational method of the investigation on lateral buckling of elastic beams is dealt with. For the solution to the quadratic eigenvalue problem presenting itself through the stability problem, the mathematical theory of quadratic pencil of linear operators is used. By this some theorems are verified. In the case of the quadratic eigenvalue problem investigated, the convergence of the Ritz-Galerkin method is proved, and at the same time, a formula is presented for the determination of the approximate value of the critical load parameter.

Untersuchung des Kippens von Trägern mit Hilfe der Theorie der quadratischen Operator-scharen. Eine Methode der Variationsrechnung zur Untersuchung des Kippens von elastischen Trägern wird behandelt. Zur Lösung der durch die Stabilitätsaufgabe herbeigeführten quadratischen Eigenwertaufgabe wird die mathematische Theorie der quadratischen Schar der linearen Operatoren angewandt. Damit werden einige Thesen nachgewiesen. Im Fall des untersuchten quadratischen Eigenwertproblems wird die Konvergenz der Ritz-Galerkinschen Methode nachgewiesen und eine Formel zur Ermittlung des Näherungswertes des kritischen Lastparameters präsentiert.