A SÍKBELI TARTOMÁNYOK KVÁZI-KONFORM LEKÉPEZÉSEI ELMÉLETÉNEK ÁLTALÁNOS FELADATA*

Írta: M. LAVRENTYEV (Kiev)

A jelen cikk számos olyan állítás bizonyítását tartalmazza, amelyet a szerző két korábbi közleményben (Общая задача квази-конформных отображений плоских областей, Доклады Академии наук УССР, 1946; Квазиконформные отображения и их производные системы, Доклады Академии наук СССР, 1946) fogalmazott meg.

1. Alapfogalmak. Azt mondjuk, hogy a

$$
\left\{\begin{aligned}
&\Phi_1\left(x, y, u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)=0, \\
&\Phi_2\left(x, y, u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)=0
\end{aligned}\right. \tag{1}
$$

egyenletrendszer lehetővé teszi az x, y sík D tartományának az u, v sík $\varDelta$ tartományára való kvázi-konform leképezését, ha a D tartománynak van olyan homeomorf leképezése $\varDelta$-ra, amelyet az (1) egyenletrendszert kielégítő

$$
\left\{\begin{aligned}
u &= u(x, y), \\
v &= v(x, y)
\end{aligned}\right. \tag{2}
$$

függvények létesítenek. Azt fogjuk továbbá mondani, hogy a (2) leképezés megfelel az (1) rendszernek.

D-nek $\varDelta$-ra való, adott (1) egyenletrendszernek megfelelő leképezése megszerkesztésének a feladatát a kvázi-konform leképezések általános feladatának vagy általánosított *Riemann*-feladatnak fogjuk nevezni. Nyilvánvaló, hogy abban az esetben, amikor az (1) rendszer a *Cauchy—Riemann*-féle egyenletrendszerrel azonos, az általánosított *Riemann*-feladat átmegy a konform leképezés *Riemann*-feladatába.

Ugyanúgy, ahogy az ideális folyadék stacionárius áramlásának a feladatai a konform leképezés feladataira vezethetők vissza, az ideális gáz stacionárius áramlásának számos feladatát (síkbeli és tengelyes szimmetriájú áram-

* Математический сборник, 21 (1947), № 2, 285 - 320.

lás) a gázdinamika egyenleteinek megfelelő kvázi-konform leképezésre vonatkozó feladatként lehet megfogalmazni.

2. A leképezés karakterisztikái. Adjuk meg a tetszés szerinti (1) egyenletrendszernek megfelelő kvázi-konform leképezés geometriai interpretációját. E célból bevezetjük a leképezés adott pontban vett karakterisztikáinak a fogalmát.

Legyen adva egy az (1) rendszernek megfelelő (2) kvázi-konform leképezés. Vegyük a vizsgált leképezés lineáris főrészét tetszés szerinti egymásnak megfelelő pontokból álló párra vonatkozólag:

$$
(3) \qquad \begin{cases} u-u_0=u_x(x-x_0)+u_y(y-y_0), \\ v-v_0=v_x(x-x_0)+v_y(y-y_0). \end{cases}
$$

Tekintsünk az u, v síkban egy egységnyi oldalú négyzetet, amelynek egyik csúcsa $w_0=u_0+iv_0$, két oldala $\overline{w_0 w_1}$ és $\overline{w_0 w_2}$,

$$
w_2-w_0=(w_1-w_0)e^{i\frac{\pi}{2}}.
$$

Jelöljük a $\overline{w_0 w_1}$ vektor u-tengellyel alkotott szögét ν-vel:

$$
w_1-w_0=e^{i\nu}.
$$

A (3) leképezésnél a felvett egységnyi oldalú négyzet valamely Π_ν parallelogrammának fog megfelelni; ennek során a w_1, w_2 pontok feleljenek meg a z_1, z_2 pontoknak.

Legyen

$$
z_1-z_0=V_\nu e^{i\alpha_\nu},
$$

$$
\theta_\nu=\arg\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0},
$$

$$
W_\nu V_\nu \cdot \Delta=1,
$$

ahol Δ a (3) transzformáció determinánsa. A bevezetett $V_\nu, \alpha_\nu, \theta_\nu, W_\nu$ mennyiségek (tetszés szerinti rögzített ν esetén) teljesen meghatározzák a Π_ν parallelogrammát és elemien kifejezhetők a (3) transzformáció együtthatóival. Az (1) összefüggések a V, α, θ, W mennyiségek közötti két összefüggéssel helyettesíthetők:

$$
(4) \qquad \begin{cases} W_\nu=F_1^{(\nu)}(x, y, u, v, V_\nu, \alpha_\nu), \\ \theta_\nu=F_2^{(\nu)}(x, y, u, v, V_\nu, \alpha_\nu). \end{cases}
$$

A $V=V_0$, $\alpha=\alpha_0$, $\theta=\theta_0$, $W=W_0$ mennyiségeket a (2) leképezés x, y pontban vett karakterisztikáinak, a

$$
(5) \qquad \begin{cases} W=F_1(x, y, u, v, V, \alpha), \\ \theta=F_2(x, y, u, v, V, \alpha) \end{cases}
$$

rendszert pedig karakterisztikákban felírt egyenletrendszernek fogjuk nevezni.

Ahhoz, hogy a (2) leképezés megfeleljen az (1) rendszernek, szükséges és elégséges, hogy a karakterisztikák között minden pontban fennálljon az (5) összefüggés.

3. Derivált egyenletrendszerek. Mind az exisztenciatételek bizonyítása, mind a kvázi-konform leképezések tulajdonságainak a vizsgálata érdekében nagyon lényeges, hogy az analitikus függvény deriváltjának a fogalmát kiterjesszük a kvázi-konform leképezésekre. Abban az esetben, amikor az (1) rendszer azonos a *Cauchy—Riemann*-egyenletrendszerrel, akkor a $P = \log V$ és α karakterisztikák konjugált harmonikus függvények:

$$\frac{\partial P}{\partial v} = -\frac{\partial \alpha}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{\partial P}{\partial u}.$$

Mutassuk meg, hogy az általános esetben fennáll a következő tétel:

1. TÉTEL. *A D tartománynak a Δ tartományra való* (2) *kvázi-konform leképezése feleljen meg az* (5) *egyenletrendszernek, legyen*

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} > 0,$$

továbbá az u, v függvényeknek létezzenek D-ben folytonos másodrendű parciális deriváltjai, a F_1, F_2 függvényeknek pedig folytonos elsőrendű parciális deriváltjai az összes argumentumok szerint.

E feltételek mellett a $P = \log V$ és α karakterisztikák a Δ tartományban eleget tesznek a következő egyenletrendszernek:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial v} = a_1 \dfrac{\partial P}{\partial u} + a_2 \dfrac{\partial \alpha}{\partial u} + a_3, \\[2ex] \dfrac{\partial \alpha}{\partial v} = b_1 \dfrac{\partial P}{\partial u} + b_2 \dfrac{\partial \alpha}{\partial u} + b_3, \end{cases}$$

ahol az a, b együtthatók x, y, u, v, P és α ismert függvényei:

$$a_1 = \frac{\partial W}{\partial V} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\partial \theta}{\partial V} \frac{W}{\sin^2 \theta},$$

$$a_2 = \frac{1}{V} \left\{ \frac{\partial W}{\partial \alpha} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{W}{\sin^2 \theta} - W \right\},$$

$$a_3 = \operatorname{ctg}\theta \left\{ \frac{\partial W}{\partial u}\frac{1}{V} + \frac{\partial W}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial W}{\partial y}\sin\alpha \right\} -$$

$$- \frac{W}{\sin^2\theta}\left\{ \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{1}{V} + \frac{\partial W}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial W}{\partial y}\sin\alpha \right\},$$

$$b_1 = \frac{\partial W}{\partial V},$$

$$b_2 = \frac{1}{V}\left\{ \frac{\partial W}{\partial \alpha} + W\operatorname{ctg}\theta \right\},$$

$$b_3 = \frac{\partial W}{\partial u}\frac{1}{V} + \frac{\partial W}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial W}{\partial y}\sin\alpha.$$

A (6) egyenletrendszert a tekintett (2) leképezés, illetve az (5) egyenletrendszer *derivált egyenletrendszerének* fogjuk nevezni.

BIZONYÍTÁS. Ismertetjük a (6) egyenletrendszer geometriai levezetését. Tekintsünk a Δ tartományban egy végtelenül kicsiny q négyzetet, amelynek az oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel; legyen a négyzet oldalhosszúsága du. A tekintett leképezés a q négyzetet valamely Q görbevonalú négyszögnek felelteti meg. Legyen AB és CD a Q négyszögnek az a két oldala, amely a q négyzet u-tengellyel párhuzamos ab, cd oldalainak felel meg.

Ahhoz, hogy megkapjuk az (5) rendszer első egyenletét, elég kiszámítani a CD és AB oldal hosszúságkülönbségének másodfokú főrészét.

Ahhoz, hogy megkapjuk az (5) rendszer második egyenletét, elég kiszámítani a CD és AB közötti szög lineáris főrészét.

Minthogy feltevés szerint u és v második deriváltjai folytonosak, azért a AB és CD oldalak, továbbá a AC és BD oldalak görbületei végtelenül keveset térnek el egymástól. Innen könnyen látható, hogy számításaink érdekében a Q görbevonalú négyszöget helyettesíthetjük azzal a Q_1: $A_1B_1C_1D_1$ görbevonalú négyszöggel (1. ábra), amelyet a következő adatok határoznak meg:

$$\overline{A_1B_1} = V du,$$

$$\sphericalangle C_1A_1B_1 = \theta = F_2(x, y, u, v, V, \alpha),$$

$$\overline{A_1C_1} = \frac{W du}{\sin\theta} = \frac{du}{\sin\theta} F_1(x, y, u, v, V, \alpha),$$

$$\overline{B_1D_1} = \frac{W + dW}{\sin(\theta + d\theta)} du,$$

$$\sphericalangle D_1B_1E = \theta + d\theta + d\alpha,$$

ahol dW, $d\alpha$, $d\theta$ az F_1, α és F_2 függvények teljes növekményei, miközben u növekménye du és $v=\text{const.}$:

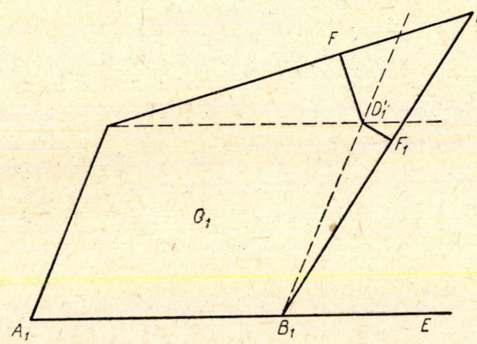
$$dW=\left[\frac{\partial W}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right]du=$$

$$=\left[\frac{\partial W}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial x}V\cos\alpha+\frac{\partial W}{\partial y}V\sin\alpha\right]du,$$

$$d\theta=\left[\frac{\partial \theta}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial u}+\frac{\partial \theta}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial u}+\frac{\partial \theta}{\partial u}+\frac{\partial \theta}{\partial x}V\cos\alpha+\frac{\partial \theta}{\partial y}V\sin\alpha\right]du,$$

$$d\alpha=\frac{\partial \alpha}{\partial u}du.$$

A $\overline{C_1D_1}-\overline{A_1B_1}$ különbség meghatározása céljából szerkesszünk parallelogrammát A_1B_1 és A_1C_1 oldalakkal, ennek a parallelogrammának a A_1 csúcscsal szemközti csúcsa legyen D_1'. Bocsássunk D_1'-ből merőlegest C_1D_1-re, ill. B_1D_1-re és jelöljük ezeket $D_1'F$-fel, ill. $D_1'F_1$-gyel. A magasabbrendűen végtelen kicsiny tagokat elhagyva kapjuk:



1. ábra

$$\frac{\partial V}{\partial v}du^2=\overline{C_1D_1}-\overline{A_1B_1}=\overline{FD_1}=\overline{D_1'F_1}\sin\theta+\overline{F_1D_1}\cos\theta=$$

$$=\frac{W}{\sin\theta}(d\theta+d\alpha)\sin\theta\,du+\left(\frac{W+dW}{\sin(\theta+d\theta)}-\frac{W}{\sin\theta}\right)\cos\theta\,du.$$

Az utóbbi összefüggésben dW és $d\theta$ helyébe behelyettesítve a megfelelő kifejezéseket, nehézség nélkül nyerjük az (5) rendszer első egyenletét.

Ahhoz, hogy a második egyenletet megkapjuk, elég a $D_1'F$ szakasz hosszát kiszámítani:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v}du=\frac{\overline{D_1'F}}{\overline{A_1B_1}}=\frac{1}{V}\{\overline{D_1F_1}\sin\theta-\overline{D_1'F_1}\cos\theta\},$$

ami nyilvánvaló helyettesítések után megadja a második keresett egyenletet.

4. Speciális esetek. Megemlítünk néhány speciális esetet, amikor a derivált egyenletrendszer egyszerűbb alakot ölt.

Ha a egyenletrendszerben az x, y, u, v koordináták explicite nem szerepelnek, akkor $a_3=b_3=0$, és a derivált egyenletrendszer a parciális deriváltakban homogén lineárissá válik:

$$\frac{\partial P}{\partial v} = a_1 \frac{\partial P}{\partial u} + a_2 \frac{\partial \alpha}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} = b_1 \frac{\partial P}{\partial u} + b_2 \frac{\partial \alpha}{\partial u},$$

az a_1, a_2, b_1, b_2 együtthatók pedig csak P-től és α-tól függnek. Ha ebben az egyenletrendszerben független változóknak P-t és α-t, ismeretlen függvényeknek u-t és v-t választjuk, akkor egyszerű átalakítások után egyenletrendszerünk *homogén* lineáris egyenletrendszerbe megy át.

Ez a helyzet a gázdinamika egyenleteinél. Nevezetesen a gázdinamika egyenletei (ideális gáz síkbeli stacionárius áramlása) karakterisztikákban felírva

$$W = F(V),$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

alakúak, a derivált egyenletrendszer pedig a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial v} = -F(V) \dfrac{\partial \alpha}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial v} = F'(V) \dfrac{\partial P}{\partial u} \end{cases}$$

alakot ölti. Ezt az egyenletrendszert, a V, α független változókban felírva, Sz. A. Csapligin vezette le először analitikusan, és a rendszer az ő nevét viseli.

5. Erős elliptikusság. Minthogy az a célunk, hogy a konform leképezésekre vonatkozó minél több geometriai tételt kiterjesszünk a kvázi-konform leképezésekre, azért ebben a cikkben a kvázi-konform leképezések olyan osztályainak a vizsgálatára szorítkozunk, amelyek elliptikus rendszereknek felelnek meg. E leképezés-osztályok tanulmányozását az elliptikusság fogalmának geometrizálásával kezdjük.

Azt mondjuk, hogy az (5) egyenletrendszer e r ő s e n e l l i p t i k u s, ha bármely ν mellett teljesülnek a következő feltételek:

1°. A F_1, F_2 függvények az argumentumok tetszés szerinti értékei mellett egyértékűek, folytonosak és differenciálhatók.

2°. Van olyan pozitív k állandó, hogy az argumentumok minden értékénél

$$k < \theta_\nu < \pi - k.$$

3°. Van olyan pozitív k állandó, hogy az argumentumok minden értékénél

$$\frac{\partial F_1^{(\nu)}}{\partial V_\nu} > k > 0.$$

Hasonlítsuk össze az egyenletrendszerek erős elliptikusságának most bevezetett fogalmát az elliptikusság szokásos fogalmával olyan rendszerek esetében, amelyek a parciális deriváltakra nézve homogének és lineárisak:

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = a_{11}\dfrac{\partial v}{\partial x} + a_{12}\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} = a_{21}\dfrac{\partial v}{\partial x} + a_{22}\dfrac{\partial v}{\partial y}, \end{cases}$$

ahol az a együtthatók x, y, u, v megadott függvényei.

Írjuk fel a (7) egyenletrendszert a V, α, W, θ karakterisztikákban.

A koordinátarendszer kezdőpontját az egységnyi oldalú négyzet csúcspontjába, illetve a Π parallelogramma megfelelő csúcspontjába helyezve, kapjuk:

$$x = \frac{1}{\Delta}(v_y \cdot u - u_y \cdot v),$$

$$y = -\frac{1}{\Delta}(v_x \cdot u - u_x \cdot v),$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}.$$

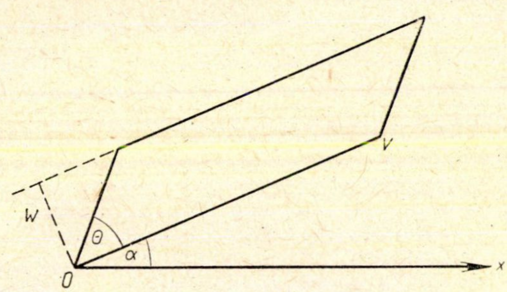
Innen (2. ábra) a Π karakterisztikus parallelogrammára a következő nyilvánvaló összefüggéseket nyerjük:

$$(8)\qquad -\frac{v_x}{v_y} = \operatorname{tg}\alpha,$$

$$(9)\qquad \frac{1}{\Delta}\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = V,$$

$$(10)\qquad W = \frac{1}{\Delta \cdot V},$$

$$(11)\qquad \sin\theta = \frac{1}{V\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}.$$



2. ábra

Mindenekelőtt (8)-ból és (7)-ből kifejezzük Δ-t v_y segítségével:

$$\Delta = [a_{11}\operatorname{tg}\alpha + a_{12} - \operatorname{tg}\alpha(a_{21}\operatorname{tg}\alpha + a_{22})]v_y^2.$$

Ezt behelyettesítve (9)-be és újra felhasználva (8)-at, kapjuk:

$$(12)\qquad v_y = \frac{1}{V}\,\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{(a_{11}\operatorname{tg}\alpha + a_{12}) - (a_{21}\operatorname{tg}\alpha + a_{22})\operatorname{tg}\alpha}.$$

A Δ-ra és v_y-ra talált kifejezéseket behelyettesítve (10)-be, egyszerűsítések után megkapjuk a karakterisztikákban felírt első egyenletet:

$$W = [a_{12}\cos^2\alpha + (a_{11} - a_{22})\sin\alpha\cos\alpha - a_{21}\sin^2\alpha]\cdot V. \tag{13}$$

Most (11)-ben u_x és u_y helyébe v_x-szel és v_y-nal való, (7)-ből nyert kifejezésüket írva, majd v_x-et és v_y-t (8) és (12) alapján V-vel kifejezve, megkapjuk a karakterisztikákban felírt második egyenletet:

$$\sin\theta = \frac{a_{11}\cos^2\alpha + (a_{11} - a_{22})\sin\alpha\cos\alpha - a_{21}\sin^2\alpha}{\sqrt{(a_{11}\sin\alpha + a_{12}\cos\alpha)^2 + (a_{21}\sin\alpha + a_{22}\cos\alpha)^2}}. \tag{14}$$

A (13), (14) kifejezésekből megállapíthatjuk, hogy az elliptikusság általunk adott geometriai definíciója ekvivalens a (11)-ben fellépő kvadratikus alak pozitivitásával, azaz a

$$-a_{12}a_{21} > \frac{1}{4}(a_{11} - a_{22}) \tag{15}$$

relációval, de az utóbbi feltétel a (7) egyenletrendszer elliptikusságának ismert analitikus feltétele. Az erős elliptikusság követelménye nyilván ekvivalens azzal a feltétellel, hogy a (13)-ban szereplő kvadratikus alak minimuma nagyobb legyen k-nál.

Megmutattuk, hogy (15) ekvivalens azzal a feltétellel, hogy a W függvény $\nu = 0$ esetén V-ben monoton növekedő. Minthogy (15) az x, y és u, v sík tetszés szerinti lineáris transzformációjára nézve invariáns, a (15) feltétel azzal is ekvivalens, hogy $\frac{\partial F^{(\nu)}}{\partial V_\nu}$ pozitív bármilyen ν mellett.

Ily módon lineáris rendszereknél $\frac{\partial F_1^{(\nu)}}{\partial V_\nu}$ pozitivitása $\frac{\partial F_1}{\partial V}$ pozitivitásának következménye.

Egyszerű példákon könnyű megmutatni, hogy nemlineáris rendszerek esetében a $\frac{\partial F_1}{\partial V} > 0$ feltételből nem következik, hogy $\frac{\partial F_1^{(\nu)}}{\partial V_\nu} > 0$ bármely ν-re.

6. Erős elliptikusság és derivált egyenletrendszerek. Visszatérve az általános esetre, bebizonyítjuk a következő alapvető tételt:

2. TÉTEL. *Az 1. tételben szereplő feltételek mellett és $b_1 > 0$ esetén a* (6) *derivált egyenletrendszer elliptikussága ekvivalens azzal, hogy a $F_1^{(\nu)}$ függvény V_ν szerinti deriváltja bármely ν-re pozitív.*

BIZONYÍTÁS. Azt kell bebizonyítani, hogy a

$$\frac{\partial F_1^{(\nu)}}{\partial V_\nu} > 0 \tag{16}$$

feltétel ekvivalens a

$$-a_2 b_1 > \frac{1}{4}(b_2 - a_1)^2,$$

vagy, az a, b mennyiségeket a karakterisztikákat tartalmazó megfelelő kifejezésekkel helyettesítve, a

$$\left\{ W\left(1+\frac{\theta_\alpha}{\sin^2\theta}\right)-W_\alpha \operatorname{ctg}\theta \right\} V\cdot W_\nu > \frac{1}{4}\left\{ W\left(\operatorname{ctg}\theta+\frac{V\theta_\nu}{\sin^2\theta}\right)+W_\alpha - V W_\nu \operatorname{ctg}\theta \right\}^2$$

feltétellel.

Ennek a bebizonyítása céljából (16)-ot kifejezzük a F_1, F_2 függvények segítségével.

A lineáris transzformációk ismert törvényei szerint a $V_\nu, \alpha_\nu, \theta_\nu, W_\nu$ karakterisztikák elemien kifejezhetők a V, α, θ, W karakterisztikákkal. Kiszámítjuk e függvények teljes differenciálját. Az írás egyszerűsítése érdekében legyen

$$\log V_\nu = v, \quad \alpha_\nu = \varphi.$$

Azonkívül nyilvánvalóan nem megy az általánosság rovására, ha az összes számításokat az $\alpha = 0$, $V = 1$ esetre végezzük, úgyhogy $d \log V = dV$. Miután ezt megjegyeztük, mindenekelőtt kiszámítjuk v és φ parciális differenciálját θ szerint. Kapjuk:

$$(17)\qquad \left\{ \begin{aligned} dv &= -\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^2\theta}\,d\theta, \\ d\varphi &= \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\theta}\,d\theta. \end{aligned} \right.$$

Most keressük meg v és φ parciális differenciálját V szerint. Ki kell számítanunk a φ szög és V_ν növekményét, amikor a Π karakterisztikus parallelogrammában egyedül V változik meg dV-vel. Π említett megváltoztatását az x-tengely irányában történő, $1+dV$ arányú affin nyújtással és a θ szög megváltoztatásával érhetjük el, a többi paramétert közben rögzítve. Az említett deformációk közül az elsőnél kapjuk:

$$(18)\qquad \left\{ \begin{aligned} d\varphi &= -\sin\varphi\cos\varphi\, dV, \\ dv &= \cos^2\varphi\, dV, \end{aligned} \right.$$

ezalatt a θ szög növekménye

$$(19)\qquad d\theta = -\sin\theta\cos\theta\, dV.$$

Következésképpen ahhoz, hogy megkapjuk a keresett differenciálokat, elegendő dv és $d\varphi$ (18) kifejezéséből kivonni dv, ill. $d\varphi$ megfelelő (17) kifejezését, az utóbbiakban $d\theta$-t a (19) kifejezéssel helyettesítve. Az említett átalakítások után végül kapjuk:

$$(20)\qquad \left\{ \begin{aligned} dv &= (-\sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}\theta)\, dV, \\ d\varphi &= (\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi \operatorname{ctg}\theta)\, dV. \end{aligned} \right.$$

A karakterisztikák α szerint vett parciális differenciáljai közvetlenül felírhatók:

(21)
$$\begin{cases} dv = 0, \\ d\varphi = d\alpha. \end{cases}$$

Hátra van még a W szerinti parciális differenciálok kiszámítása. $1+\frac{dW}{W}$ arányú hasonlósági transzformációnál fennáll, hogy

$$d\alpha = d\theta = 0, \quad dV = \frac{dW}{W}.$$

Azonkívül

(22)
$$d\varphi = 0, \quad dv = \frac{dW}{W}.$$

Ily módon ahhoz, hogy megkapjuk a keresett differenciálokat, elegendő dv és $d\varphi$ (22) kifejezéséből kivonni a (20) képletekből a $dV = \frac{dW}{W}$ helyettesítéssel adódó kifejezéseket; ekkor

(23)
$$\begin{cases} d\varphi = (\sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi \operatorname{ctg}\theta)\frac{dW}{W}, \\ dv = (\sin^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi \operatorname{ctg}\theta)\frac{dW}{W}. \end{cases}$$

A parciális differenciálokra nyert kifejezések összeadása útján megkapjuk a keresett teljes differenciált:

$$dv = (\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi \operatorname{ctg}\theta)dV - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^2\theta}d\theta +$$
$$+ (\sin^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi\operatorname{ctg}\theta)\frac{dW}{W},$$

$$d\varphi = (-\sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi\operatorname{ctg}\theta)dV + d\alpha + \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\theta}d\theta +$$
$$+ (\sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi\operatorname{ctg}\theta)\frac{dW}{W}.$$

A karakterisztikákban felírt egyenletek értelmében a W, θ karakterisztikák V és α megadott függvényei, tehát

$$dW = W_V dV + W_\alpha d\alpha,$$
$$d\theta = \theta_V dV + \theta_\alpha d\alpha.$$

Innen, az írásmód egyszerűsítésére bevezetve a $w = \log W$, $t = \operatorname{tg}\varphi$ jelölést, kapjuk:

$$(1+t^2)dv=\left[1+\left(-\operatorname{ctg}\theta-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial V}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial w}{\partial V}\right)t+\frac{\partial w}{\partial V}t^2\right]dV+$$
$$+\left[\left(\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial w}{\partial\alpha}-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\right)t+\frac{\partial w}{\partial\alpha}t^2\right]d\alpha,$$

$$dt=\left[\left(\frac{\partial w}{\partial V}-1\right)t-\left(\frac{\partial w}{\partial V}\operatorname{ctg}\theta-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial V}-\operatorname{ctg}\theta\right)t^2\right]dV+$$
$$+\left[1+\frac{\partial w}{\partial\alpha}t+\left(1+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}-\frac{\partial w}{\partial\alpha}\operatorname{ctg}\theta\right)t^2\right]d\alpha.$$

Az utóbbi két formula segítségével könnyen kiszámítható $d\log W_\nu$. Valóban, az $\omega=\log W_\nu$ jelöléssel fennáll, hogy

$$\omega=w+\log V-\log V_\nu,$$

tehát, minthogy esetünkben $V=1$,

$$d\omega=dw+dV-dv$$

és végül helyettesítések után

$$(1+t^2)d\omega=\left[\frac{\partial w}{\partial V}-\left(\frac{\partial w}{\partial V}\operatorname{ctg}\theta-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial V}-\operatorname{ctg}\theta\right)t+t^2\right]dV+$$
$$+\left[\frac{\partial w}{\partial\alpha}-\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\operatorname{ctg}\theta-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\right)t\right]d\alpha.$$

A dv, dt és $d\omega$ számára nyert kifejezéseket egyszerűbb alakra hozhatjuk, ha felhasználjuk a (6) derivált egyenletrendszerben (181. oldal) szereplő a és b mennyiségeket. Helyettesítések után kapjuk:

$$(24)\quad\left\{\begin{aligned}
(1+t^2)dv&=\left[1+\left(\frac{a_1}{W}-\operatorname{ctg}\theta\right)t+\frac{b_1}{W}t^2\right]dV+\\
&\quad+\left[\left(\frac{a_2}{W}+1\right)t+\left(\frac{b_2}{W}-\operatorname{ctg}\theta\right)t^2\right]d\alpha,\\
dt&=\left[\left(\frac{b_1}{W}-1\right)t-\left(\frac{a_1}{W}-\operatorname{ctg}\theta\right)t^2\right]dV+\\
&\quad+\left[1+\left(\frac{b_2}{W}-\operatorname{ctg}\theta\right)t+\frac{a_2}{W}t^2\right]d\alpha,\\
(1+t^2)d\omega&=\left[\frac{b_1}{W}-\left(\frac{a_1}{W}-\operatorname{ctg}\theta\right)t+t^2\right]dV+\\
&\quad+\left[\frac{b_2}{W}-\operatorname{ctg}\theta-\left(\frac{a_2}{W}+1\right)t\right]d\alpha.
\end{aligned}\right.$$

A kvadratikus alakokat — dV és $d\alpha$ együtthatóit — rendre A-val és B-vel jelölve kapjuk:

$$(1+t^2)dv = A_1 dV + B_1 d\alpha,$$
$$(1+t^2)d\varphi = A_2 dV + B_2 d\alpha,$$
$$(1+t^2)d\omega = A_3 dV + B_3 d\alpha.$$

Tekintsünk egy t értéket, amelynél a B_2 alak különbözik zérustól, és variáljuk a Π karakterisztikus parallelogrammát a $dt=0$ feltétel mellett. Ebben az esetben

$$d\alpha = -\frac{A_2}{B_2} dV,$$

és a $dv, d\omega$ differenciálokra egyszerű számítások után a következő előállításokat kapjuk:

$$dv = \frac{1}{1+t^2} \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{B_2} dV = \frac{M}{W \cdot B_2} dV,$$

ahol M kvadratikus alak t-re nézve,

$$d\omega = \frac{dV}{1+t^2} \frac{A_3 B_2 - A_2 B_3}{B_2} = \frac{dV}{WB_2} [-a_2 t^2 + (b_2 - a_1)t + b_1].$$

A kimondott tétel bebizonyításához elég megmutatnunk, hogy az erős elliptikusság feltételeiből következik a

$$N = -a_2 t^2 + (b_2 - a_1)t + b_1$$

kvadratikus alak pozitivitása.

Ha a N alaknak nincsenek zérushelyei, akkor N pozitív. Valóban, a $\frac{\partial F_1^{(\nu)}}{\partial V_\nu} > 0$ feltétel miatt

$$MN > 0, \tag{25}$$

de $t=0$ esetén $M=1$, következésképpen $N>0$.

Most tegyük fel, a bizonyítandó állítással ellentétben, hogy a N kvadratikus alaknak léteznek t_1, t_2 zérushelyei. Mindenekelőtt mutassuk meg, hogy ebben az esetben t_1 és t_2 a M és B_2 alakoknak is zérushelyei lesznek. (25) értelmében M és N zérushelyeinek egybe kell esniük. Tegyük fel, hogy $B_2(t_1) \neq 0$, akkor a Π parallelogramma elsőrendűen végtelen kicsiny

$$dV \text{ és } d\alpha = -\frac{A_2}{B_2} dV$$

megváltoztatásakor a Π_ν parallelogramma[1] V_ν, α_ν karakterisztikái dV-nél magasabbrendűen végtelen kicsiny mennyiséggel változnak meg, továbbá $F_1^{(\nu)}$ és

[1] A ν szög az $\alpha_\nu = \operatorname{arc\,tg} t_1$ szögnek felel meg.

$F_2^{(\nu)}$ differenciálhatósága következtében a Π_ν parallelogrammában a W_ν, θ_ν karakterisztikák megváltozása is dV-nél magasabbrendűen végtelen kicsiny, ami nyilván összeegyeztethetetlen Π általunk választott megváltoztatásával.

Ily módon már csak a

$$M(t_1)=N(t_1)=B_2(t_1)=0, \qquad t_1 \neq 0,$$
$$M(t_2)=N(t_2)=B_2(t_2)=0, \qquad t_2 \neq 0$$

esetet kell megvizsgálnunk. A M, N, B_2 alakok együtthatóit összehasonlítva kapjuk:

$$\frac{a_1}{W}-\operatorname{ctg}\theta=0, \quad \frac{b_1}{W}-1=0,$$

és a (24) képletek a következő alakot öltik:

$$dt=\left[1+\left(\frac{b_2}{W}-\operatorname{ctg}\theta\right)t-\frac{a_2}{W}t^2\right]d\alpha=B_2 d\alpha,$$

$$dv=dV+\left[\left(\frac{a_2}{W}+1\right)t+\left(\frac{b_2}{W}-\operatorname{ctg}\theta\right)t^2\right]\frac{d\alpha}{1+t^2}=dV+B_1 d\alpha,$$

$$d\omega=dV+\left[\left(\frac{b_2}{W}-\operatorname{ctg}\theta\right)-\left(\frac{a_2}{W}+1\right)t\right]\frac{d\alpha}{1+t^2}=dV+B_3 d\alpha.$$

Ha

$$B_1(t_1)=B_3(t_1)=0,$$

akkor

$$N=1+t^2,$$

vagyis pozitív. Ezek szerint feltehetjük, hogy a $t=t_1$ helyen a B_1, B_3 alakok egyike különbözik zérustól. Legyen például

$$B_1(t_1)\neq 0.$$

Variáljuk a Π parallelogrammát úgy, hogy V megváltozása dV, az α szög megváltozása pedig $\frac{dV}{B_1(t_1)}$ legyen. Akkor a vizsgált

$$\alpha_\nu=\operatorname{arc\,tg} t_1$$

esetben a Π_ν parallelogrammára fennáll, hogy

$$d\alpha_\nu=dV_\nu=0,$$

vagyis a Π_ν parallelogramma dV-nél magasabbrendűen végtelen kicsiny mennyiségekkel változik meg, ami nyilván lehetetlen. A tételt maradéktalanul bebizonyítottuk.

A továbbiakban mindig erősen elliptikus rendszerekkel foglalkozunk, és a derivált egyenletrendszerről, a bebizonyított tétel alapján, szintén feltesszük, hogy elliptikus.

7. Áramvonalak, áramvonalsűrűség. A gázdinamika terminológiáját követve az x, y sík azon görbéinek a seregét, amelyek a kvázi-konform leképezés során az u, v sík $v = \text{const.}$ egyeneseibe mennek át, áramvonalaknak fogjuk nevezni. A leképezés W karakterisztikáját áramvonalsűrűségnek nevezzük.

Jelöljük azt a szöget, amelyet egy L sugár az x, y pontbeli áramvonallal bezár, ϑ-val. A

$$R_\vartheta = \frac{W}{\sin \vartheta}$$

mennyiséget ϑ irányú áramvonalsűrűségnek fogjuk nevezni a L sugár mentén.

A konform leképezések esetében, amikor az (1) rendszer a *Cauchy—Riemann*-féle egyenletrendszerrel azonos, az áramvonalak sűrűsége és görbülete között ismert összefüggések állnak fenn:

$$\frac{\partial \log W}{\partial n} = -\frac{\partial \alpha}{\partial s},$$

ahol ds és dn az áramvonal, ill. az áramvonal normálisa egymással jobbrendszert képező vonalelemei.

A kvázi-konform leképezések általános elmélete számos kérdésének a vizsgálatánál szükségünk lesz az említett összefüggés tetszés szerinti elliptikus rendszer esetére való általánosítására. E célból mindenekelőtt a (6) derivált egyenletrendszert átalakítjuk oly módon, hogy P-nek az u és v koordináta szerint vett deriváltjait α-nak u és v szerint vett deriváltjaival fejezzük ki. Kapjuk:

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \bar{a}_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \bar{b}_1 \frac{\partial \alpha}{\partial v} + \bar{c}_1,$$

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \bar{a}_2 \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \bar{b}_2 \frac{\partial \alpha}{\partial v} + \bar{c}_2,$$

$$-\bar{b}_1 \bar{a}_2 > \frac{1}{4}(\bar{b}_2 - \bar{a}_1)^2, \qquad \bar{b}_1 = \frac{1}{b_1} > 0. \tag{26}$$

Határozzuk meg a P függvénynek az u-tengellyel γ szöget alkotó irány szerinti deriváltját. Ennek az iránynak az ívelemét $d\lambda$-val jelölve, kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \lambda} &= \frac{\partial P}{\partial u} \cos \gamma + \frac{\partial P}{\partial v} \sin \gamma = \\ &= (\bar{a}_1 \cos \gamma + \bar{a}_2 \sin \gamma) \frac{\partial \alpha}{\partial u} + (\bar{b}_1 \cos \gamma + \bar{b}_2 \sin \gamma) \frac{\partial \alpha}{\partial v} + (\bar{c}_1 \cos \gamma + \bar{c}_2 \sin \gamma). \end{aligned} \tag{27}$$

Jelöljük γ_1-gyel azt a szöget, amelyet a

$$\bar{b}_1 \cos\gamma + \bar{b}_2 \sin\gamma = 0$$

összefüggés határoz meg; ekkor a (27) reláció a következő alakot ölti:

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda} = -A_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} + B_1, \tag{28}$$

ahol

$$A_1 = \frac{\bar{a}_1 \bar{b}_2 - \bar{a}_2 \bar{b}_1}{\sqrt{\bar{b}_1^2 + \bar{b}_2^2}}.$$

A (26) feltétel következtében fennáll, hogy

$$A_1 > 0.$$

Nem nehéz belátni, hogy a (28) egyenlettel analóg egyenlet érvényes a W áramvonalsűrűségre is:

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = -A_2 \frac{\partial \alpha}{\partial u} + B_2, \qquad A_2 > 0. \tag{28'}$$

A továbbiakhoz, a (28), (28') egyenleteken kívül, szükségünk lesz a R_ϑ sűrűség ϑ irány szerinti deriváltjának a kifejezésére. Elemi számolás adja a következő eredményt:

Erősen elliptikus egyenletrendszerhez a leképezett tartomány minden egyes x, y pontjában van olyan ϑ irány, amely különbözik az áramvonal irányától, az áramvonal pozitív irányával jobbrendszert alkot, és *amelyre*

$$\frac{\partial R_\vartheta}{\partial t} = -A \frac{\partial \alpha}{\partial s} + B, \quad A > 0, \tag{29}$$

ahol dt és ds a ϑ irány, ill. az áramvonal íveleme, a A, B együtthatók pedig a koordináták és a V, α karakterisztikák függvényei. Ha a leképezés karakterisztikákban felírt egyenletei a koordinátákat explicite nem tartalmazzák, akkor $B = 0$, és a (29) egyenlet a

$$\frac{\partial R_\vartheta}{\partial t} = -A \frac{\partial \alpha}{\partial s} \tag{30}$$

alakot ölti.

A (30) egyenletnek nagyon szemléletes geometriai jelentése van, amelyet az erős elliptikusság definiálására is fel lehet használni: az áramvonalak sűrűsége konkávitásuk irányában növekszik.

A további vizsgálatokhoz szükségünk lesz az y tengely irányában vett áramvonalsűrűségre vonatkozó összefüggésekre is. Legyen

$$y = y(x, v)$$

annak az áramvonalnak az egyenlete, amely a $v=\text{const.}$ egyenesnek felel meg. Ekkor az y-tengely irányában vett $R=R_{\frac{\pi}{2}}$ áramvonalsűrűség

$$R=\frac{\partial y}{\partial v}$$

lesz. Legyen

$$\tau=\operatorname{tg}\alpha=\frac{\partial y}{\partial x}.$$

E jelölések mellett a derivált egyenletrendszer a következő alakot veszi fel:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{\partial \tau}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial R}{\partial v}=a\dfrac{\partial \tau}{\partial x}+b\dfrac{\partial \tau}{\partial v}+c, \end{cases} \tag{31}$$

ahol a, b és c a koordináták, a τ iránytangens és a R sűrűség adott függvényeinek tekinthetők. Ha a kiindulási egyenletrendszer erősen elliptikus, akkor fennáll:

$$-a-\frac{1}{4}b^2>k>0.$$

8. Az általánosított Schwarz-féle elv. A konform leképezések elméletének egyik legfontosabb geometriai elve az ún. *Schwarz—Lindelöf*-elv. A jelen paragrafusban ennek az elvnek különböző általánosításait adjuk meg kvázi-konform leképezések esetére.

Sávszerű tartományoknak egyenesvonalú sávokra való kvázi-konform leképezéseit fogjuk vizsgálni.

Jelöljük $D(\Gamma_0, \Gamma)$-val azt a tartományt, amelyet a Γ_0 és Γ görbe határol:

$$\begin{aligned} \Gamma_0&: y=y_0(x), \\ \Gamma&: y=Y(x), \end{aligned} \qquad y_0(x)<Y(x);$$

a továbbiakban mindig feltesszük, hogy Γ_0 és Γ görbülete korlátos és eleget tesz a *Hölder*-feltételnek. A D sávval egyidejűleg tekintsünk egy tőle végtelenül kevéssé eltérő $D(\overline{\Gamma}_0, \overline{\Gamma})$ sávot, ahol a $\overline{\Gamma}_0, \overline{\Gamma}$ görbék,

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}_0&: y=\overline{y}_0(x), \\ \overline{\Gamma}&: y=\overline{Y}(x), \end{aligned}$$

végtelenül közel vannak Γ_0-hoz, ill. Γ-hoz. Szerkesszük meg e tartományok mindegyikének egy-egy kvázi-konform leképezését a

$$0<v<h$$

egyenlőtlenséggel jellemzett Δ sávra. A két leképezés közül az első feleljen meg a

$$(32) \qquad \begin{cases} W = F_1(x, y, v, V, \alpha), \\ \theta = F_2(x, y, v, V, \alpha) \end{cases}$$

karakterisztikákban felírt egyenletrendszernek, a második pedig egy végtelenül közeli, az u változót explicite szintén nem tartalmazó

$$(33) \qquad \begin{cases} W = \overline{F}_1(x, y, v, V, \alpha), \\ \theta = \overline{F}_2(x, y, v, V, \alpha) \end{cases}$$

egyenletrendszernek.

Legyenek most

$$y = y(x, v),$$
$$\overline{y} = \overline{y}(x, v)$$

az említett leképezéseknek megfelelő áramvonalak és $n = n(v)$ az

$$\overline{y}(x, v) - y(x, v) - \varphi(x), \quad |x| < \infty, \quad v = \text{const.}$$

különbség abszolút maximuma:

$$n = \max_{|x|<\infty} \{\overline{y}(x, v) - y(x, v) - \varphi(x)\},$$

ahol $\varphi(x)$ kétszer differenciálható függvény, amelyre $|\varphi'(x)| < k'$, $|\varphi''(x)| < k''$; feltesszük, hogy az $n(v)$ maximum x véges értékeinél éretik minden v érték mellett, $0 \leqq v \leqq h$. Tegyük fel, hogy n eléretik az $x = x_0 = x_0(v)$ helyen, és vezessük be az $m = n + \varphi(x_0)$ jelölést.

A választott jelölések mellett bebizonyítjuk a következő lemmát:

LEMMA. *Tegyük fel, hogy a* (32), (33) *egyenletrendszerek erősen elliptikusak, továbbá, hogy a $\overline{F}_{1,2}$ függvénynek és összes elsőrendű parciális deriváltjainak a $F_{1,2}$ függvénytől és annak megfelelő parciális deriváltjaitól való eltérése legfeljebb ε. Ha ezeken kívül teljesül az a feltétel is, hogy ε-nal együtt $m(v)$ is végtelenül kicsiny marad, akkor érvényes a következő egyenlőtlenség:*

$$(34) \qquad \frac{d^2m}{dv^2} > A_0 m + A_1 \frac{dm}{dv} + A_2 \varepsilon + A_3 k'' + A_4 k',$$

ahol a A együtthatók függnek az $y(x, v)$ függvény második parciális deriváltjaitól (lineárisan) és a F függvények első és második parciális deriváltjaitól.

BIZONYÍTÁS. A bizonyításhoz mindenekelőtt használjuk fel a (31) összefüggéseket. Alkalmazva ezeket mindkét leképezésre, kapjuk:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = a \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial v} + c,$$

$$\frac{\partial^2 \overline{y}}{\partial v^2} = \overline{a} \frac{\partial^2 \overline{y}}{\partial x^2} + \overline{b} \frac{\partial^2 \overline{y}}{\partial x \partial v} + \overline{c},$$

ahol $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ a variált második leképezésnek megfelelő a, b, c együtthatók. Innen és a lemma feltételeiből a

$$z = z(x, v) = \bar{y}(x, v) - y(x, v)$$

jelöléssel kapjuk:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = a \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial v} + B, \tag{35}$$

ahol

$$B = A_0 z + A_1 \frac{\partial z}{\partial v} + A_2 \varepsilon + A_4 \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Miután ezt megjegyeztük, tekintsük az x, v síknak azt a M és M' pontját, ahol a $z(x, v) - \varphi(x)$ függvény eléri $m(v)$ maximumát a v, ill. a $v + dv$ paraméterérték mellett. A MM' iránynak az x tengellyel bezárt α szögét nyilván a

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \varphi''\right) \cos \alpha + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial v} \sin \alpha = 0 \tag{36}$$

összefüggés határozza meg.

Most számítsuk ki a R sűrűség α irányban vett $\frac{dR}{dt}$ deriváltját:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial R}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial R}{\partial v} \sin \alpha = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial v} \cos \alpha + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \sin \alpha,$$

vagy, (35) értelmében,

$$\frac{dR}{dt} = a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \sin \alpha + (b \sin \alpha + \cos \alpha) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + B \sin \alpha.$$

A (36) összefüggés felhasználásával küszöböljük ki a vegyes deriváltat, ekkor

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= a \sin \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (b \sin \alpha + \cos \alpha) \operatorname{ctg} \alpha \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \varphi''\right) + B \sin \alpha = \\ &= -\frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \varphi''\right) [-a \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + b \sin \alpha \cos \alpha] + \\ &\quad + (B - a\varphi'') \sin \alpha, \end{aligned} \tag{37}$$

és itt a szögletes zárójelben álló kifejezés az egyenletrendszer erős elliptikussága következtében nem negatív. Azonban $dv = \sin \alpha \cdot dt$; azonkívül a M maximumhelyen fennáll:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \varphi'' \leqq 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi' = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{dm}{dv},$$

és így (37) mindkét oldalát elosztva $\sin\alpha$-val, kapjuk:

$$\frac{d^2 m}{dv^2} > A_0 m + A_1 \frac{dm}{dv} + A_2 \varepsilon - a\varphi'' + A_4 k'.$$

Ezzel a kívánt egyenlőtlenséget teljesen bebizonyítottuk.

MEGJEGYZÉS. A (34) egyenlőtlenség levezetésénél feltételeztük, hogy α különbözik zérustól. Nyilvánvaló, hogy az egyenlőtlenség érvényes marad azokban a pontokban is, ahol $\alpha = 0$. Ezekben a pontokban a számítások lényeges megváltoztatása nélkül dv helyett a Δv véges növekményt kell venni.

A bebizonyított lemmából a klasszikus *Schwarz—Lindelöf*-elv különféle általánosításai nyerhetők a legáltalánosabb kvázi-konform leképezések esetére.

A cikk további részében arra az esetre szorítkozunk, amikor az egyenletekben a koordináták explicite nem szerepelnek. Ebben az esetben a konform leképezésekkel való analógia kiváltképpen teljes.

3. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy az* (1) *erősen elliptikus egyenletrendszer a koordinátákat explicite nem tartalmazza:*

(38)
$$\begin{cases} \Phi_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0, \\ \Phi_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0, \end{cases}$$

és legyenek $y = y(x, v)$, ill. $y = \bar{y}(x, v)$ annak a kvázi-konform leképezésnek az áramvonalai, amely megfelel a (38) *egyenletrendszernek, és a $D(\Gamma_0, \Gamma)$, ill. $D(\Gamma_0, \bar{\Gamma})$ tartományt,*

$$\Gamma_0\colon\ y = y_0(x), \quad \Gamma\colon\ y = y(x), \quad \bar{\Gamma}\colon\ y = \bar{y}(x),$$

a $0 < v < 1$ sávra képezi le. E feltételek mellett, továbbá ha az y függvények kétszer differenciálhatók és

$$\bar{y}(x) > y(x),$$

akkor

(39)
$$\bar{y}(x, v) > y(x, v).$$

Ugyanezen feltételek mellett Γ_0 minden pontjában fennáll, hogy

(40)
$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial v} > \frac{\partial y}{\partial v},$$

és abban a pontban, ahol $\bar{y}(x) - y(x)$ eléri maximumát,

(41)
$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial v} > \frac{\partial y}{\partial v}.$$

BIZONYÍTÁS. Először is jegyezzük meg, hogy az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük azt is, hogy $x \to \infty$ és $x \to -\infty$ esetén az $y_0(x), y(x)$ függvények véges határértékhez, deriváltjaik pedig zérushoz tartanak, és hogy $\lim_{x \to \pm\infty} (\bar{y}(x) - y(x)) = 0$. Miután ezt megállapítottuk, használjuk fel az előző paragrafusban bebizonyított lemmát. Jelöljük $M(v)$-vel $\bar{y}(x, v) - y(x, v)$ maximumát rögzített v mellett és $-m(v)$-vel ugyanennek a kifejezésnek a minimumát. Akkor a lemma értelmében

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{d^2M}{dv^2} &> A\frac{dM}{dv}, \\
\frac{d^2m}{dv^2} &> A\frac{dm}{dv}.
\end{aligned}
\right. \tag{42}
$$

A (42) egyenlőtlenségből könnyű levezetni a tétel helyességét „eléggé keskeny" sávok leképezése esetére. Valóban, tekintsük az $y_0(x) < y < y(x, h)$, $y_0(x) < y < \bar{y}(x, h)$ sávoknak a $0 < v < h$ sávra való leképezését, és legyen v_0 a

$$
\frac{d^2m}{dv^2} = A\frac{dm}{dv},
$$

$$
m(0) = 0, \quad m'(0) = 1
$$

egyenlet $m(v)$ integráljának a legkisebb gyöke. Ha most $h_0 < v_0$ és

$$
\bar{y}(x, h_0) > y(x, h_0), \tag{43}
$$

akkor $h = 0$ esetén fennáll, hogy

$$
\frac{\partial \bar{y}}{\partial v} > \frac{\partial y}{\partial v},
$$

mert ellenkező irányú egyenlőtlenségből (42) alapján

$$
\min\,[\bar{y}(x, h) - y(x, h)] < 0
$$

következne minden $h < v_0$ értékre.

Ebből egy ismert egyszerű eljárást[1] alkalmazva könnyű kimutatni, hogy ha h_0 eléggé kicsiny, és a (43) feltétel teljesül, akkor abban a pontban, ahol $\bar{y}(x, h_0) - y(x, h_0)$ felveszi maximumát, szintén fennáll

$$
\frac{\partial \bar{y}}{\partial v} > \frac{\partial y}{\partial v},
$$

és minden $0 < h < h_0$ értékre

$$
\bar{y}(x, h) > y(x, h).
$$

Ezzel a tételt igazoltuk „elég keskeny sávokra".

[1] Lásd M. A. Лаврентьев, Конформные отображения, Москва—Ленинград, 1946.

A tétel teljes bebizonyításához elég megmutatnunk, hogy az

$$\bar{y}(x, 2h_0) > y(x, 2h_0)$$

feltételből következik

$$\bar{y}(x, h_0) > y(x, h_0).$$

Tegyük fel, az állítással ellentétben, hogy valamely pontban

$$\bar{y}(x, h_0) \leqq y(x, h_0),$$

és jelentse x_0 azt a pontot, ahol $\bar{y}(x, h_0) - y(x, h_0)$ felveszi minimumát. Tekintsük $R = \frac{\partial y}{\partial v}$ és $\bar{R} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial v}$ értékét az $x = x_0$, $v = h_0$ helyen az $y_0(x) < y < y(x, h_0)$, $y_0(x) < y < \bar{y}(x, h_0)$ alsó sávok és az $y(x, h_0) < y < y(x, 2h_0)$, $\bar{y}(x, h_0) < y < \bar{y}(x, 2h_0)$ felső sávok leképezése során.

A tétel már bizonyított része értelmében az alsó sávok leképezésénél a vizsgált pontban fennáll, hogy

$$\bar{R} > R,$$

a felső sávok leképezésénél pedig, hogy

$$\bar{R} < R\,;$$

ezzel tételünket maradéktalanul bebizonyítottuk.

A bebizonyított tétel lehetővé fogja tenni, hogy a konform leképezések mindazon tulajdonságait, amelyek csak a *Schwarz—Lindelöf*-féle elven nyugszanak, kiterjesszük a kvázi-konform leképezések tekintett osztályára. Így például a bebizonyított tételből könnyen következik az unicitási tétel.

4. TÉTEL. *A $D(\Gamma_0, \Gamma)$ sávnak a $0 < v < 1$ sávra való kétszer differenciálható (a (38) erősen elliptikus egyenletrendszert kielégítő) kvázi-konform leképezése, amely a végtelen távoli pontot önmagának felelteti meg, az u, v síknak egy, az u tengellyel párhuzamos eltolásától eltekintve egyértelműen meg van határozva.*

9. Maximum-elv és viselkedés a peremen. A konform és kvázi-konform leképezések elméletében lényegesek azok a tételek, amelyek a leképezésnek a peremen való viselkedését írják le, és speciálisan a deriváltakra vonatkozó, a leképezett tartomány határának geometriai jellemzőitől függő becslések. Ezeket a tételeket a *Schwarz—Lindelöf*-elv, továbbá a lineáris egyenletrendszereket kielégítő kvázi-konform leképezések bizonyos ismert tulajdonságai alapján lehet megkapni. Teljesség kedvéért a következő paragrafusban felsoroljuk a lineáris differenciálegyenlet-rendszerek azon tulajdonságait, amelyekre most, vagy a későbbiekben szükségünk lesz. A jelen paragrafusban hivatkozni fogunk ezekre a tulajdonságokra.

Ismét olyan kvázi-konform leképezéseket tekintünk, amelyek $D(\Gamma_0, \Gamma)$ tartományokat a $0<v<1$ sávba visznek át, és erősen elliptikus (38) egyenletrendszereknek felelnek meg. Feltesszük, hogy a Γ_0, Γ görbék görbülete egyenletesen folytonos, továbbá hogy a D sáv $y(x)-y_0(x)$ szélessége felülről és alulról korlátos, végül hogy a sáv

$$\frac{1}{2}\{|y_0'(x)|+|y'(x)|\}$$

hajlása korlátos.

5. TÉTEL. *A $D(\Gamma_0, \Gamma)$ sávnak a $0<v<1$ sávra való, a* (38) *egyenletrendszernek megfelelő, kvázi-konform leképezésénél a $R=\frac{\partial y}{\partial v}$, $\tau=\frac{\partial y}{\partial x}$ függvények a peremen elérik maximumukat és minimumukat.*

BIZONYÍTÁS. Szerkesszük meg egyenletrendszerünkhöz és a R, τ függvényekhez a derivált egyenletrendszert:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial \tau}{\partial v}, \\ \frac{\partial R}{\partial v} &= a\frac{\partial \tau}{\partial x}+b\frac{\partial \tau}{\partial v}. \end{aligned}\right. \tag{44}$$

Az eredeti egyenletrendszer erős elliptikussága miatt a derivált egyenletrendszer szintén elliptikus lesz, következésképpen a

$$R=R(x, v),$$
$$\tau=\tau(x, v)$$

függvényrendszer a $0<v<1$ sávnak valamely egyszeresen összefüggő *Riemann*-felületre való kvázi-konform leképezését valósítja meg és, a 10. § 1. tulajdonsága szerint, R és τ a peremen eléri maximumát és minimumát.

A most bizonyított maximum-elvet közvetlenül is meg lehetett volna kapni a (44) rendszer másodrendű egyenletre való visszavezetése útján.

6. TÉTEL. *A D tartomány Γ_0, Γ határoló görbéi tegyenek eleget a következő feltételeknek:*

$$k_0<y(x)-y_0(x)<k,$$
$$|y_0'(x)|<k', \quad |y'(x)|<k',$$
$$|y_0''(x)|<k'', \quad |y''(x)|<k'',$$

ezen feltételek mellett a D tartományban fennáll

$$0<m<R<M,$$

ahol m és M csak a k állandóktól és a F_1, F_2 karakterisztikus függvényektől függ, a D tartomány alakjától nem.

BIZONYÍTÁS. A maximum-elv értelmében elég, ha R-et D határán becsüljük. Foglalkozzunk R alulról való becslésével. A bebizonyított *Schwarz—Lindelöf*-elv szerint elég, ha kimutatjuk R alulról való korlátosságát tetszés szerinti $D_0(\gamma_0, \gamma)$ „majoráns" tartományra, ahol γ_0 és γ a következő tulajdonságokkal rendelkezik: γ érinti Γ-t és sehol sincs Γ alatt, γ_0 sehol sincs Γ_0 alatt. Ilyen tartomány megszerkesztéséhez felhasználjuk a (44) derivált egyenletrendszert. Szerkesszünk a R, τ síkban egy Δ konvex tartományt, amelyet két, a (R_0, τ_0) pontot a (R_1, τ_1) ponttal,

$$0 < R_0 < R_1, \quad \tau_0 < 0 < \tau_1,$$

összekötő C_0 és C_1 körív határol, ahol a C_0, C_1 ívek minden pontban pozitív szöget alkotnak a R tengellyel, a C_0 ív konkáv, a C_1 ív pedig konvex. Legyen

$$R = R(u, v), \quad \tau = \tau(u, v) \tag{45}$$

az u, v sík $0 < v < 1$ sávjának a Δ tartományra való, a derivált egyenletrendszernek megfelelő, kvázi-konform leképezése.

A (45) leképezésből kvadraturák segítségével megkaphatjuk az eredeti egyenletrendszernek megfelelő kvázi-konform leképezést. Valóban, a (45) összefüggések megadják az áramvonalsűrűséget és az áramvonalak iránytangensét mint u és v függvényét, R-ből és τ-ból viszont a karakterisztikákban felírt egyenletrendszer segítségével egyértelműen meghatározható a V karakterisztika, szintén mint u és v függvénye, végül bármelyik áramvonal mentén fennáll:

$$\frac{dx}{du} = V \cos \alpha = \frac{V}{\sqrt{1+\tau^2}}. \tag{46}$$

Innen

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{dx}{du} = \frac{V\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}. \tag{47}$$

(46)-ot és (47)-et rögzített v mellett integrálva, megkapjuk az összes áramvonalat. Integrálva még (45) első,

$$\frac{\partial y}{\partial v} = R(u, v)$$

egyenletét, teljes megfelelést kapunk az áramvonalak és a v értékek között, és megkapjuk az u, v sík $0 < v < 1$ sávjának az x, y sík valamely D tartományára való leképezését. Nem nehéz megmutatni, hogy D egyrétű sáv lesz. Azonkívül a k konstansok bármely értékéhez találhatók olyan R_0, τ_0, R_1, τ_1 értékek és a C_0, C_1 ívek görbületének olyan értékei, hogy a megkonstruált tartomány „majoráns" legyen.

Teljesen analóg konstrukcióval lehet R felső becslését megkapni.

10. Lineáris egyenletek és lineáris egyenletrendszerek. Bizonyítás nélkül felsorolok több, másodrendű lineáris egyenletekre és lineáris egyenletrendszert kielégítő kvázi-konform leképezésekre vonatkozó állítást. Az összes felsorolt állítások benne foglaltatnak, vagy könnyen következnek a matematikai fizika egyenleteivel foglalkozó tankönyvekben[1] és M. A. LAVRENTYEV[2], Z. JA. SAPIRO[3] és B. V. SABAT[4] cikkeiben kifejtett megfelelő tételekből.

Kezdjük a másodrendű lineáris egyenletek elméletére vonatkozó eredményekkel.

Tekintsük a

$$\Delta y + A\frac{\partial y}{\partial \xi} + B\frac{\partial y}{\partial \eta} = 0, \tag{48}$$

$$\Delta y + A\frac{\partial y}{\partial \xi} + B\frac{\partial y}{\partial \eta} = f(\xi, \eta) \tag{49}$$

alakú egyenleteket, ahol Δ a *Laplace*-operátor:

$$\Delta y = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2},$$

A, B, f pedig ξ-nek és η-nak a $0 \leqq \eta \leqq 1$ sávban értelmezett függvényei.

1. TULAJDONSÁG. A (48) egyenletben szereplő A, B együtthatók maradjanak a c korlát alatt, első és második deriváltjaik pedig a c', ill. c'' korlát alatt:

$$|A| < c_0, \quad |B| < c_0, \quad |\operatorname{grad} A| < c', \quad |\operatorname{grad} B| < c', \ldots, \tag{50}$$

és legyen megadva két függvény, $y_0(\xi)$ és $y(\xi)$, amelyekre

$$|y_0| \leqq k_0, \quad |y| \leqq k_0, \quad |y_0'| \leqq k', \quad |y'| \leqq k', \quad |y_0''| \leqq k'', \quad |y''| \leqq k''.$$

Ezek mellett a feltételek mellett a (48) egyenletnek a $0 < \eta < 1$ sávban van olyan $y(\xi, \eta)$ megoldása, amely a határokon az $y_0(\xi)$, ill. az $y(\xi)$ értéket veszi fel. Az $y(\xi, \eta)$ függvény $\frac{\partial y}{\partial \xi}$, $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ parciális deriváltjai felülről és alulról korlátosak, továbbá egyenletesen folytonosak a $0 \leqq \eta \leqq 1$ zárt sávban, és a felső és alsó korlátokra, valamint az egyenletes folytonosság indexére megadható egy-egy, csak a c és k konstansoktól függő becslés.

[1] R. COURANT, D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, II, Berlin, 1937.

[2] М. А. Лаврентьев, Об одном классе непрерывных отображений, Математический сборник, 42 : 4 (1935), 407—424.

[3] З. Я. Шапиро, О существовании квази-конформных отображений, Доклады Академии наук СССР, XXX, 8 (1941), 685—687.

[4] Б. В. Шабат, Об обобщенных решениях одной системы уравнений в частных производных, Математический сборник, 17 (59) : 2 (1945), 193—209.

Ha $y(\xi)\equiv 0$ és $y_0(\xi)$ nem nagyobb ε-nál, akkor

$$y(\xi,\eta)<\varepsilon(1-c_1\eta),$$

ahol c_1 csak a c_0, c' konstansoktól függ.

2. TULAJDONSÁG. A fenti jelölések mellett a c_0, c', k' mennyiségekkel együtt a $\frac{\partial y}{\partial \xi}$ derivált is zérushoz tart.

3. TULAJDONSÁG. A (49)-ben szereplő A, B együtthatók tegyenek eleget az előbbi feltételeknek, és legyen $y(\xi,\eta)$ a (49) egyenlet megoldása zérus peremfeltételek mellett: $y(\xi,0)=0$, $y(\xi,1)=0$. Ha az f függvény differenciálható és a $0\leqq\eta\leqq 1$ sávban mindenütt teljesül, hogy

$$|f(\xi,\eta)|<\varepsilon,$$

akkor

$$\left|\frac{\partial y}{\partial \xi}\right|<K\varepsilon, \quad \left|\frac{\partial y}{\partial \eta}\right|<K,$$

ahol a K konstans csak a c_0, c', c'' értékektől függ.

A (48), (49) egyenletek megoldásainak említett tulajdonságain kívül szükségünk lesz a későbbiekben a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial v}=0 \tag{51}$$

egyenlet megoldásainak alábbi tulajdonságára, ahol A és B a $0\leqq v\leqq 1$ sávban eleget tesz az (50) feltételeknek és az elliptikusság feltételének:

$$A-\frac{1}{4}B^2>c_0>0.$$

4. TULAJDONSÁG. Ha $y=y(x,v)$ az (51) egyenlet integrálja és $y\not\equiv\text{const.}$, akkor $\frac{\partial y}{\partial x}$-re érvényes a maximum-elv: $\frac{\partial y}{\partial x}$ a tartomány belsejében nem éri el maximumát és minimumát.

5. TULAJDONSÁG. A és B csak x-től függjön, amellett teljesüljön

$$\left|\frac{dA}{dx}\right|<\nu, \quad \left|\frac{dB}{dx}\right|<\nu, \quad \left|\frac{d^2A}{dx^2}\right|<\nu, \quad \left|\frac{d^2B}{dx^2}\right|<\nu,$$

és legyen az (51) egyenlet $y(x,v)$ megoldása olyan, hogy

$$M=\max_{|x|<\infty}\frac{d^2y(x,1)}{dx^2}>\max_{|x|<\infty}\frac{d^2y(x,0)}{dx^2}+\lambda. \tag{52}$$

Ezek mellett a feltételek mellett van olyan, csak ν-től és c_0-tól függő

$\lambda=\lambda(\nu, c_0)>0$, $\lim\limits_{\nu\to 0}\lambda=0$, hogy (52)-ből következzék, hogy

$$\left|\frac{\partial^2 y(x,v)}{\partial x^2}\right|<M$$

a sáv tetszés szerinti pontjában.

Áttérünk a lineáris egyenletrendszereknek megfelelő kvázi-konform leképezések tulajdonságaira.

Vizsgálni fogjuk a

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial\eta}&=a_1\frac{\partial x}{\partial\xi}+b_1\frac{\partial y}{\partial\xi},\\ \frac{\partial y}{\partial\eta}&=a_2\frac{\partial x}{\partial\xi}+b_2\frac{\partial y}{\partial\xi}\end{aligned}\right.\tag{53}$$

egyenletrendszernek megfelelő (a ξ,η sík $0<\eta<1$ sávját az x,y sík egy tartományába átvivő) kvázi-konform leképezéseket, ahol az a,b együtthatók a négy koordináta, x, y, ξ és η megadott, kétszer differenciálható függvényei. Azonkívül feltesszük, hogy az (53) egyenletrendszer elliptikus:

$$-b_1a_2-\frac{1}{4}(b_2-a_1)^2>\nu>0,$$

ahol ν a koordinátáktól független állandó.

Mindenekelőtt megemlítjük a következő általános tételt:

6. TULAJDONSÁG. *Minden egyszeresen összefüggő, hiperbolikus típusú S Riemann-felülethez található a* $0<\eta<1$ *sávnak S-re való (az* (53) *egyenletrendszernek megfelelő) kvázi-konform leképezése; a leképezés három valós állandótól eltekintve egyértelműen meghatározott. Ha az* a,b *együtthatók abszolút értékben a k korlát alatt maradnak, a S felület pedig az*

$$|y|<H$$

sávhoz tartozik, akkor a $h<\eta<1-h$, $h>0$, *sávban az* x,y *függvények eleget tesznek a Hölder-feltételnek:*

$$\begin{gathered}|f(\zeta+\Delta\zeta)-f(\zeta)|<K|\Delta\zeta|^{\alpha},\\ \zeta=\xi+i\eta,\quad f(\zeta)=x+iy,\end{gathered}\tag{54}$$

ahol K és az $\alpha>0$ *kitevő csak a* ν, k, H, h *konstansoktól függ.*

Ha még azt is feltesszük, hogy az a,b *együtthatók összes második parciális deriváltjai a* k'' *korlát alatt maradnak, akkor a* $h<\eta<1-h$ *sávban x és y összes parciális deriváltjai egy, csak a* ν, k, H, h, k'' *mennyiségektől függő korlát alatt maradnak, és*

$$\left|\frac{\partial x}{\partial\eta}\right|<K\log\frac{1}{\eta(1-\eta)}.\tag{55}$$

Foglalkozzunk külön azzal az esettel, amikor S a $0<y<1$ egységsáv, és a

$$z=f(\zeta),$$
$$z=x+iy$$

leképezés során a $\xi=\pm\infty$ pontok az $x=\pm\infty$ pontokba mennek át.

7. TULAJDONSÁG. Ha az a, b együtthatók első parciális deriváltjai közül egyik se haladja meg az ε' értéket, akkor a $0\leqq\eta\leqq 1$ sávban fennáll:

$$0<k<\left|\frac{f(\zeta+\Delta\zeta)-f(\zeta)}{\Delta\zeta}\right|<K,$$

ahol k és K csak ε'-től, ν-től és az a, b együtthatók abszolút értékének maximumától függ.

8. TULAJDONSÁG. Ha az a, b együtthatók összes első parciális deriváltjai az ε', a második parciális deriváltak pedig az ε'' korlát alatt maradnak, akkor a $0<\eta<1$ sávban fennáll:

(56)
$$\left|\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}\right|<K\varepsilon.$$

Befejezésül megemlítünk még két olyan tulajdonságot, amely a leképezés variációja és az a, b együtthatók variációja közötti összefüggést adja meg.

9. TULAJDONSÁG. Tegyük fel, hogy az (53) egyenletrendszeren kívül adva van egy tőle végtelenül keveset eltérő

(57)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \eta}=\bar{a}_1\dfrac{\partial x}{\partial \xi}+\bar{b}_1\dfrac{\partial y}{\partial \xi}, \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial \eta}=\bar{a}_2\dfrac{\partial x}{\partial \xi}+\bar{b}_2\dfrac{\partial y}{\partial \xi} \end{cases}$$

egyenletrendszer is, és legyen

$$z=\bar{f}(\zeta)$$

az (57) rendszert kielégítő, a $0<\eta<1$ egységsávot a $0<y<1$ egységsávba átvivő leképezés,

$$\bar{f}(\pm\infty)=\pm\infty,$$
$$\bar{f}(0)=0.$$

E feltételek mellett, ha az a, b együtthatók első és második parciális deriváltjai $\frac{1}{T}$-nél, a $\delta a_1=\bar{a}_1-a_1, \ldots, \delta b_2=\bar{b}_2-b_2$ variációk ε-nál, a variációk első és második parciális deriváltjai pedig $\frac{\varepsilon}{T}$-nél nem nagyobbak, akkor

x-nek és y-nak ξ és η szerinti második parciális deriváltjai közül egyiknek a variációja sem nagyobb, mint $K\frac{\varepsilon}{T}$ ($K=$const., T nagy az egységhez képest), az első deriváltak variációja pedig legfeljebb $K\varepsilon$.

11. A közelítő megoldás és tulajdonságai. A 7. §-ban végzett vizsgálatok értelmében egy görbevonalú sávot a $0<v<1$ sávba átvivő kvázi-konform leképezés megszerkesztésének a feladata visszavezethető egy másodrendű kvázi-lineáris egyenlethez tartozó *Dirichlet*-feladatra. Az általunk vizsgált esetben, amikor az eredeti egyenletrendszer a koordinátákat explicite nem tartalmazza, a kvázi-lineáris egyenlet

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} - b\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial v} - a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{58}$$

alakú lesz, ahol az a, b együtthatók R és τ függvényei:

$$R = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \tau = \frac{\partial y}{\partial x},$$

$$a = a(R, \tau), \quad b = b(R, \tau);$$

ezek a függvények első és második deriváltjaikkal együtt a R, τ síkon egyenletesen folytonosak.

Minthogy az eredeti egyenletrendszerről feltettük, hogy erősen elliptikus, az (58) egyenlet elliptikus lesz,

$$-a - \frac{1}{4}b^2 > 0, \tag{59}$$

ha $R \neq 0$.

A legközelebbi paragrafusokban a megoldás megszerkesztésénél azzal a kiegészítő feltevéssel fogunk élni, hogy elég nagy R-ekre,

$$R \geqq C,$$

teljesül

$$a = -1, \quad b = 0,$$

elég kis R értékekre, $R \leqq \mu$, pedig

$$-a - \frac{1}{4}b^2 > k > 0.$$

Ezektől a megszorításoktól később meg fogunk szabadulni.

Áttérve az (58) egyenlet megoldásának a megszerkesztésére, először megkonstruáljuk az ehhez az egyenlethez tartozó *Dirichlet*-feladat egy „közelítő megoldását".

Ezt a közelítő megoldást a $0<v<1$ egységsávban fogjuk megszerkeszteni, feltételezve, hogy a keresett $y(x, v)$ függvény e sáv határain adott értékeket vesz fel:

$$\begin{cases} y(x,0)=y_0(x), \\ y(x,1)=y_1(x), \end{cases} \tag{60}$$

ahol feltesszük, hogy az y_0, y_1 függvények kétszer differenciálhatók és olyanok, hogy

$$0<k_0<y_1(x)-y_0(x)<k_1,$$
$$|y_0'(x)|<k', \quad |y_1'(x)|<k',$$
$$|y_0''(x)|<k'', \quad |y_1''(x)|<k''.$$

Rögzítsünk egy T pozitív számot és vezessük be az

$$a_0=a_0(x)=a(R_0,\tau_0), \quad b_0=b_0(x)=b(R_0,\tau_0) \tag{61}$$

jelöléseket, ahol

$$\begin{cases} R_0=\dfrac{1}{T^2}\displaystyle\int_{x-T}^{x+T} dt \int_{t-T}^{t+T} [y_1(t)-y_0(t)]dt, \\ \tau_0=\dfrac{1}{2T^3}\displaystyle\int_{x-T}^{x+T} dt \int_{t-T}^{t+T} [y_1(t+T)-y_1(t)+y_0(t+T)-y_0(t)]dt. \end{cases} \tag{62}$$

R_0-t és τ_0-t differenciálva becsléseket kaphatunk a R_0 és a τ_0 mennyiség x szerinti első négy deriváltjára:

$$\begin{aligned} &|R_0'|<\frac{2(k_1-k_0)}{T}; && |\tau_0'|<\frac{2k'}{T}, \\ &|R_0''|<\frac{4k_1}{T^2}; && |\tau_0''|<\frac{4k'}{T^2}, \\ &|R_0'''|<\frac{4k'}{T^2}; && |\tau_0'''|<\frac{4k'}{T^3}, \\ &|R_0^{\mathrm{IV}}|<\frac{4k''}{T^2}; && |\tau_0^{\mathrm{IV}}|<\frac{4k''}{T^3}. \end{aligned} \tag{63}$$

A fenti becsléseken kívül szükségünk lesz még a továbbiakban R_0 és τ_0 deriváltjai variációjának a becslésére y_0 és y_1 variációjának a függvényében. Legyen tehát

$$\delta y_0=0, \quad |\delta y_1|\leqq\varepsilon,$$

akkor nyilván

$$\begin{aligned} &|\delta R_0'|<\frac{4\varepsilon}{T}, && |\delta\tau_0'|<\frac{8\varepsilon}{T^2}, \\ &|\delta R_0''|<\frac{4\varepsilon}{T^2}, && |\delta\tau_0''|<\frac{8\varepsilon}{T^3}. \end{aligned} \tag{64}$$

Most írjuk fel a

(63a) $$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} - a_0(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - b_0(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial v} = 0$$

differenciálegyenletet. Ennek az egyenletnek a $0 < v < 1$ sávban reguláris és a sáv határain a (60) értékeket felvevő integrálját az (58) egyenlet ugyanezen peremértékekhez tartozó integrálja „közelítő" értékének fogjuk tekinteni. Az a-ra és b-re tett feltevések mellett a (63a) egyenlet elliptikus típusú lineáris egyenlet, amelynek tetszés szerinti kétszer differenciálható peremfeltételek mellett van a $0 < v < 1$ sávban kétszer folytonosan differenciálható megoldása.

A (63a) egyenlet integráljának ismert, az előző paragrafusban felsorolt, tulajdonságain kívül szükségünk lesz a következő variációs tételre:

1. LEMMA. *A k', k'' konstansok elég kis rögzített értékeire és bármely elég nagy rögzített T értékre, ha $y_0(x)$ variációja legfeljebb ε és $|x| \to \infty$ esetén zérushoz tart, $y_1(x)$ variációja pedig zérus:*

$$|\delta y_0(x)| \leqq \varepsilon, \quad \delta y_1(x) = 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} \delta y_0(x) = 0,$$

akkor tetszés szerinti $v > 0$ mellett $y(x, v)$ variációja, $v = \text{const.}$, *nem nagyobb, mint $m\varepsilon$,*

$$|\delta y(x, v)| < m\varepsilon,$$

ahol m csak v-től függ, és minden $v > 0$ értékre

$$m = m(v) < 1.$$

BIZONYÍTÁS. A bizonyításhoz a (63a) egyenletet mindenekelőtt hozzuk kanonikus alakra:

(63b) $$\Delta y + A\frac{\partial y}{\partial \xi} + B\frac{\partial y}{\partial \eta} = 0.$$

A régi x, v és az új ξ, η változók között fennálló

(65) $$\xi = \xi(x, v), \qquad \eta = \eta(x, v)$$

kapcsolatok a $0 < v < 1$ egységsávnak a $0 < \eta < 1$ egységsávra való olyan kvázi-konform leképezését fogják megvalósítani, amely a

(66) $$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{b_0}{\Delta}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a_0}{\Delta}\frac{\partial \xi}{\partial v}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} &= -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{b_0}{\Delta}\frac{\partial \xi}{\partial v}, \end{aligned} \qquad \Delta = -a_0 - \frac{1}{4}b_0^2 > k > a$$

lineáris egyenletrendszernek felel meg. A A, B együtthatók alakja a következő lesz:

$$(67)\qquad A=\frac{1}{M}(a_0\xi_{xx}+b_0\xi_{xv}+\xi_{vv}),\quad B=\frac{1}{M}(a_0\eta_{xx}+b_0\eta_{xv}+\eta_{vv}),\qquad M=\frac{1}{-a_0\xi_x^2-b_0\xi_x\xi_y+\xi_y^2}.$$

Transzformáljuk hasonló módon a variált peremfeltételeknek megfelelő (63a) egyenletet; az

$$\bar{y}(x,v)=y(x,v)+\delta y(x,v)$$

jelöléssel kapjuk:

$$(68)\qquad \Delta\bar{y}+\bar{A}\frac{\partial\bar{y}}{\partial\bar{\xi}}+\bar{B}\frac{\partial\bar{y}}{\partial\bar{\eta}}=0,$$

ahol $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{A}$, $\bar{B}$ a (66), (67) képletek alapján határozhatók meg, ha az utóbbiakban a_0-t és b_0-t variált értékükkel helyettesítjük.

Miután ezt megjegyeztük, rögzítsünk egy tetszés szerinti $M(x_0, v)$ pontot, és becsüljük meg ebben a pontban a $\delta y(x,v)$ variációt. A (65) leképezésnél és a variált

$$(69)\qquad \bar{\xi}=\bar{\xi}(x,v),\quad \bar{\eta}=\bar{\eta}(x,v)$$

leképezésnél fellépő tetszés szerinti állandót válasszuk meg úgy, hogy a M pont az első leképezés során a $M_1(0,\eta_0)$ pontba menjen át, és hogy mindkét leképezésnél az x tengely valamelyik x_1 pontja a koordinátarendszer kezdőpontjába menjen át.

A keresett δy variációt négy variáció összegeként állítjuk elő:

$$\delta y=\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4.$$

δ_1-nek választjuk a (63b) egyenlet $y(\xi,\eta)$ integráljának a variációját a M_1 pontban a A, B kezdeti függvények mellett, amikor csak a peremfeltételek változnak: az $y(\xi,0)=y_0[x(\xi)]$ feltételről áttérünk az $y(\xi,0)=y_0[x(\xi)]+$ $+\delta y_0[x(\xi)]$ feltételre. δ_2-nek választjuk a (63b) egyenlet megoldásának δy variációját a M_1 pontban, amikor csak A és B változik. δ_3-nak választjuk a (63b) egyenlet integráljának δy variációját a M_1 pontban, amikor csak a peremfeltételek variálódnak a ξ, η koordinátákról a $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ koordinátákra való áttérésnek megfelelően:

$$\delta y_0=y_0[\bar{x}(\xi)]-y_0[x(\xi)].$$

δ_4-nek vesszük a (63b) egyenlet megoldásának $\delta\dot{y}$ variációját a M_1 pontról arra a $\bar{M}_1(\bar{\xi}_0,\bar{\eta}_0)$ pontra való áttérésnél, amely a M pontnak a (69) leképezés során megfelel.

Megmutatjuk, hogy a tett feltevések mellett δy főtagja δ_1 lesz, amely az előző paragrafusban említett 1. tulajdonság értelmében kielégíti a

$$(70)\qquad |\delta_1|<\varepsilon(1-c\eta_0)$$

egyenlőtlenséget, ahol $c>0$; de a (65) leképezés 7. tulajdonsága miatt az $\frac{\eta_0}{v}$ hányados olyan felső és alsó korlátok között marad, amelyek szintén csak a k', k'', T konstansoktól függnek, következésképpen a (70) becslésben η_0 helyébe v-t írhatunk:

$$|\delta_1| < \varepsilon(1-cv).$$

Most megmutatjuk, hogy T nagy értékeire az összes többi δ-k kicsinyek εv-hez, vagy ami ugyanaz, $\varepsilon\eta_0$-hoz képest.

Variálva a (63b) egyenletet, δ_2-re kapjuk:

$$\Delta\delta_2 + A\frac{\partial\delta_2}{\partial\xi} + B\frac{\partial\delta_2}{\partial\eta} = -\frac{\partial y}{\partial\xi}\delta A - \frac{\partial y}{\partial\eta}\delta B. \tag{71}$$

Meg kell becsülnünk δ_2-t a M_1 pontban a mellett a feltétel mellett, hogy az egységsáv határain δ_2 zérussá válik. Ebből a célból megbecsüljük (71) jobboldalát; ennek során elég arra az esetre szorítkoznunk, amikor $|y_1(0)-y_0(0)|<2C$. A lineáris egyenletek 1. tulajdonsága értelmében $\frac{\partial y}{\partial\xi}$ és $\frac{\partial y}{\partial\eta}$ olyan korlátok alatt marad, amelyek csak a C, k', k'' állandóktól függnek, így (71) jobboldalának nagyságrendjét δA és δB fogja meghatározni. (67) szerint δA és δB olyan összegekként írhatók fel, amelyeknek tagjai egyrészt az a, b függvényeknek a ξ, η függvények x és v szerinti második parciális deriváltjai variációjával való szorzatai, másrészt ugyanezeknek a deriváltaknak a és b variációjával való szorzatai:

$$a_0\delta\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}, \ldots, b_0\delta\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}, \ldots, \tag{72}$$

$$\delta a_0\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}, \ldots, \delta b_0\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}, \ldots . \tag{73}$$

Tekintsük a (72) tagokat. A feladat feltételei szerint a_0 és b_0 korlátos, továbbá (63), (64) és a lineáris kvázi-konform leképezések 9. tulajdonsága alapján az összes $\delta\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}, \ldots$ variációk $\frac{\varepsilon}{T}$ nagyságrendűek lesznek. Most foglalkozzunk a (73) tagokkal. A lineáris egyenletrendszerek 8. tulajdonsága értelmében $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}, \ldots$ kicsinyek, ha $\frac{1}{T}$ kicsiny, δa_0 és δb_0 nagyságrendje pedig ε.

Tehát végeredményben

$$\left|\frac{\partial y}{\partial\xi}\delta A + \frac{\partial y}{\partial\eta}\delta B\right| < K\frac{\varepsilon}{T},$$

ahol K csak a C, k', k'' mennyiségektől függő állandó.

Innen (71) linearitása miatt következik, hogy

$$\left|\frac{\partial \delta_2}{\partial \eta}\right| < K_1 \frac{\varepsilon}{T},$$

és a minket érdeklő M_1 pontban

$$|\delta_2| < K_1 \frac{\varepsilon \eta}{T}.$$

Áttérünk δ_3 becslésére. δ_3 definíciója és a (65) kvázi-konform leképezést, valamint ennek variációját meghatározó feltételek alapján feladatunk a (63b) egyenlet megoldása azon variációjának a megbecslésére redukálódik, amely az

$$y = y_0(\xi), \text{ ha } \eta = 0,$$
$$y = y_1(\xi), \text{ ha } \eta = 1$$

peremfeltételről az

$$y = y_0[\varphi_0(\xi)],$$
$$y = y_1[\varphi_1(\xi)]$$

feltételre való áttérés során következik be, ahol

$$\bar{\xi} = \varphi_0(\xi) \quad \text{és} \quad \bar{\xi} = \varphi_1(\xi)$$

azok a függvények, amelyek a ξ, η sík és a $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ sík egységsávja határai közötti megfelelést létesítik. Ezek a függvények háromszor differenciálhatók, és a 9. tulajdonság értelmében fennáll:

$$\varphi_0(0) = 0, \quad |\varphi_0'(\xi) - 1| < K\varepsilon, \quad |\varphi_0''(\xi)| < \frac{T\varepsilon}{T},$$

$$|\varphi_1'(\xi) - 1| < K\varepsilon, \quad |\varphi_1''(\xi)| < K\varepsilon.$$

Azonkívül nyilvánvaló, hogy

$$|\varphi_1(0)| < K\varepsilon,$$

ahol K csak a k konstansoktól függ.

Innen, tekintetbe véve k', k'' és $\frac{1}{T}$ kicsiny voltát, a lineáris egyenletek 6. tulajdonsága alapján kapjuk, hogy δ_3 kicsiny $\eta\varepsilon$-hoz képest.

Becsülnünk kell még δ_4-et. A kvázi-konform leképezések 9. tulajdonsága és a (65), (69) leképezésekre tett kiegészítő feltételek miatt fennáll:

$$|\bar{\xi}_0| < K\eta_0\varepsilon,$$

$$|\bar{\eta}_0 - \eta_0| < \frac{K\eta_0\varepsilon}{T},$$

de a feladat feltételei és a lineáris egyenletek 7. tulajdonsága szerint $\frac{\partial y}{\partial \xi}$

kicsi, $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ pedig csak a k konstansoktól függő korlát alatt marad, következésképpen δ_4 kicsiny lesz $\eta_0 \varepsilon$-hoz képest.

Állításunkat maradéktalanul bebizonyítottuk.

12. Illesztési lemma. Tekintsük az x, v síkban a $-1<v<1$ sávot, és legyenek ennek a sávnak a $v=\pm 1$ határain megadva az $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$ függvények; tegyük fel, hogy ezek a függvények eleget tesznek az 1. lemma feltételeinek. A lineáris egyenletrendszerek 1. tulajdonsága következtében bármely kétszer differenciálható $y_0(x)$ függvényhez, amelyre $|y_2-y_0|$, $|y_0-y_1|$, $|y_0'|$ és $|y_0''|$ korlátos, mindig lehet konstruálni olyan $y_1(x, v)$, $y_2(x, v)$ függvényeket, hogy y_1 kielégítse a (63a) egyenletet a $-1<v<0$ sávban és a $v=0$, $v=-1$ egyeneseken rendre az $y_0(x)$, $y_1(x)$ értékeket vegye fel, az y_2 függvény pedig a $0<v<1$ sávban tegyen eleget (63a)-nak és a $v=0$, $v=1$ egyeneseken rendre az $y_0(x)$, $y_2(x)$ értékeket vegye fel. Természetesen feltesszük, hogy a (63a) egyenletben fellépő a_0, b_0 együtthatókat meghatározó (61), (62) képletekben az alsó sáv esetében $y_1(x)$ és $y_0(x)$, a felső sáv esetében $y_0(x)$ és $y_2(x)$ szerepel.

Bebizonyítjuk a következő lemmát:

2. LEMMA. *Az $y_1(x)$-re és $y_2(x)$-re tett feltevések és elég nagy T mellett van olyan kétszer differenciálható $y_0(x)$ függvény, hogy az x tengely mentén teljesül*

$$\left[\frac{\partial y_1(x, v)}{\partial v}\right]_{v=0} = \left[\frac{\partial y_2(x, v)}{\partial v}\right]_{v=0}.$$

Ha $y_1'(x)$ és $y_2'(x)$ a k' korlát alatt, $|y_1''(x)|$ és $|y_2''(x)|$ pedig a k'' korlát alatt marad, akkor

$$|y_0(x)|<k', \quad |y_0''(x)|<\nu(k'-k''),$$

ahol k'-vel együtt ν is zérushoz tart.

BIZONYÍTÁS. A bizonyításhoz használjuk fel a *Schwarz*-féle alternáló eljárást. Rögzítsünk egy h számot. Tekintsük a $B_1: -1<v<h$, $B_2: -h<v<1$ sávokat és szerkesszünk meg bennük egy-egy függvénysorozatot. Jelöljük $y_1^{(1)}(x, v)$-vel a (63a) egyenletnek azt a megoldását a B_1 sávban, amely a $v=h$ egyenesen a 0 értéket, a $v=-1$ egyenesen pedig az $y_1(x)$ értékeket veszi fel. Jelöljük $y_2^{(1)}(x, v)$-vel a (63a) egyenletnek azt a megoldását a B_2 sávban, amely a $v=-h$ egyenesen az $y_1^{(1)}(x, -h)$, a $v=1$ egyenesen pedig az $y_2(x)$ értékeket veszi fel. $y_1^{(n)}(x, v)$-vel fogjuk jelölni a (63a) egyenletnek azt a megoldását a B_1 sávban, amely a $v=h$ egyenesen az $y_2^{(n-1)}(x, h)$, a $v=-1$ egyenesen pedig az $y_1(x)$ értékeket veszi fel; $y_2^{(n)}(x, v)$ a (63a) egyenletnek az a megoldása, amely $v=-h$ esetén $y_1^{(n)}(x, -h)$-val, $v=1$ esetén $y_2(x)$-szel egyenlő.

A 9. tulajdonság folytán az összes $y^{(n)}$ függvények x szerinti parciális deriváltjai nem nagyobbak k'-nél, az x szerinti második parciális deriváltak pedig nem nagyobbak $(k''+\lambda)$-nál, ahol λ nem függ sem n-től, sem h-tól. Innen az 1. lemma felhasználásával következik, hogy az

$$y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, \ldots, y_1^{(n)}, \ldots$$
$$y_2^{(1)}, y_2^{(2)}, \ldots, y_2^{(n)}, \ldots$$

sorozatok mindegyike egyenletesen konvergál, az egyik a B_1, a másik a B_2 sávban. Jelöljük e sorozatok limeszét $y_1(x, v, h)$-val, ill. $y_2(x, v, h)$-val.

A lineáris egyenletek 1. tulajdonsága értelmében a megkonstruált függvények a (63a) egyenlet megoldásai és (h-ra nézve) egyenlő mértékben folytonos v szerinti parciális deriváltakkal rendelkeznek; azonkívül a konstrukció szerint

$$y_1(x, -h, h) = y_2(x, -h, h), \quad y_1(x, h, h) = y_2(x, h, h).$$

Innen következik, hogy $h \to 0$ esetén a megszerkesztett függvények határértékben megadják a keresett $y_1(x, v)$, $y_2(x, v)$ megoldásokat.

A lemma állításának második része az 1. lemmában szereplő konstrukcióból és a lineáris egyenletek 4. és 5. tulajdonságából következik.

A fent bizonyított két lemmából könnyen nyerhető a 2. lemmában szereplő $y_0(x)$ függvényre vonatkozó következő variációs állítás:

3. LEMMA. *A 2. lemma feltételei mellett kapjon az $y_1(x)$ függvény egy végtelenül kicsiny, kétszer differenciálható δy_1 növekményt. Az $y_0(x)$ illesztési függvény megfelelő növekményét δy_0-lal jelölve fennáll*

$$|\delta y_0| < \mu |\delta y_1|,$$

ahol μ csak a k konstansoktól függő állandó és

$$\mu < 1.$$

13. Hasonlósági elv. A (63a) egyenlet nyilván invariáns az x, v, y tér hasonlósági transzformációjára nézve, ha a T közepelési intervallumot ugyanazzal a hasonlósági tényezővel változtatjuk meg. Ebből következik, hogy az előző lemmákat meg lehet fogalmazni tetszés szerinti olyan sávra, amelynek a határai párhuzamosak az x tengellyel.

Ha a sáv szélessége λ, akkor a (62) képletekben R_0 és τ_0 helyébe a

$$R_0 = \frac{1}{t^2\lambda} \int_{x-t}^{x+t} ds \int_{s-t}^{s+t} [y_2(s) - y_1(s)]\, ds,$$

$$\tau_0 = \frac{1}{2t^3} \int_{x-t}^{x+t} ds \int_{s-t}^{s+t} [y_2(s+t) - y_2(s) + y_1(s+t) - y_1(s)]\, ds$$

kifejezéseket kell behelyettesíteni.

A három utolsó lemma állításai érvényben maradnak akkor, ha rögzített k_2 mellett,

$$|y_2(x)-y_1(x)|<k_2\lambda,$$

a következő öt mennyiség elég kicsiny:

$$\max|y_1'|, \quad \max|y_2'|, \quad \lambda\max|y_1''|, \quad \lambda\max|y_2''|, \quad \frac{\lambda}{\varepsilon}.$$

14. Az n-edik közelítés. A

$$0<v<1$$

egységsávot osszuk fel n számú $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sávra,

$$B_i\colon \frac{i-1}{n}<v<\frac{i}{n}, \qquad i=1,2,\ldots,n.$$

A $Y(x,v)$ függvényt az (58) egyenlet n-edrendű közelítő megoldásának nevezzük, ha a Y függvény a B sávban folytonos parciális deriváltakkal rendelkezik x és v szerint, és ha mindegyik B_i sávban, $i=1,2,\ldots,n$, a Y függvény kielégíti a (63a) egyenletet

$$\lambda=\frac{1}{n},$$

$$y_1=Y\left(x,\frac{i-1}{n}\right), \qquad y_2=Y\left(x,\frac{i}{n}\right)$$

mellett.

Nyilvánvaló, hogy az így definiált n-edik közelítés, Y, függni fog a t „közepelési" paramétertől, amelyet a

$$t=\frac{T}{n}$$

képlettel értelmezünk.

Most bebizonyítjuk a következő alapvető lemmát:

4. LEMMA. *Legyen adva két függvény, $y_0(x)$ és $y_1(x)$, amelyeknek létezik első és második deriváltjuk, és amelyekre*

$$\begin{gathered}
|y_1(x)-y_0(x)|\leqq k,\\
\lim_{x\to+\infty} y_0(x)=h_0, \quad \lim_{x\to-\infty} y_0(x)=h_1,\\
\lim_{x\to+\infty} y_1(x)=h_2, \quad \lim_{x\to-\infty} y_1(x)=h_3,\\
|y_0'(x)|\leqq k', \quad |y_1'(x)|\leqq k',\\
|y_0''(x)|\leqq k'', \quad |y_1''(x)|\leqq k''.
\end{gathered} \tag{75}$$

E feltételek teljesülése és elég kicsiny k', k'', $\frac{1}{T}$ értékek esetén minden n egész számhoz az (1) egyenletnek létezik olyan $Y(x, v)$ n-edrendű közelítő megoldása a B sávban, amely a sáv határain az $y_0(x)$, ill. $y_1(x)$ értékeket veszi fel:

$$Y(x, 0) = y_0(x), \quad Y(x, 1) = y_1(x).$$

BIZONYÍTÁS. Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy $y_0(x) = y_1(x)$ esetén a megoldás triviális: $Y(x, v) \equiv 0$ tetszés szerinti n-re és T-re.

Most tegyük fel, hogy a keresett Y_μ megoldás létezik a $\mu y_0(x)$, $\mu y_1(x)$ peremfeltételek mellett, ahol y_0 és y_1 teljesíti a (75) feltételeket, μ pedig valamilyen 1-nél kisebb pozitív szám, és szerkesszük meg a $(\mu + \Delta\mu) y_0(x)$, $y_1(x)$ peremfeltételekhez tartozó megoldást elég kicsiny $\Delta\mu$ esetére. A fokozatos közelítés módszerével keresni fogjuk $Y^{(1)}_{\mu+\Delta\mu}$ értékeit a B_i sávok határain. Ismertetjük az eljárást.

Tekintsük a B_1 és a B_2 sávot. Alkalmazva az illesztési lemmát, konstruáljunk egy, a $0 < v < \frac{2}{n}$ sávban folytonosan differenciálható függvényt, amely a B_1, B_2 sávokban kielégíti a (63a) egyenletet és a $v = 0$, $v = \frac{2}{n}$ határokon rendre a $(\mu + \Delta\mu) y_0(x)$, $Y_\mu\left(x, \frac{2}{n}\right)$ értékeket veszi fel. Jelentse $z_1(x, 1)$ a megszerkesztett függvény értékeit a $v = \frac{1}{n}$ egyenesen. Az $\frac{1}{n} < v < \frac{3}{n}$ sávban, ugyanannak a lemmának a segítségével, konstruáljuk meg (63a)-nak a $v = \frac{1}{n}, \frac{3}{n}$ egyeneseken a $z_1(x, 1)$, $Y_\mu\left(x, \frac{3}{n}\right)$ értékeket felvevő megoldását. A kapott függvény $v = \frac{2}{n}$ egyenes menti értékeit jelöljük $z_1(x, 2)$-vel. Ezt az eljárást folytatva, $n-1$ számú függvényt kapunk:

$$z_1(x, 1), z_1(x, 2), \ldots, z_1(x, n-1).$$

Ismételjük meg a fent leírt eljárást úgy, hogy a $Y_\mu\left(x, \frac{i}{n}\right)$ peremfeltételeket a $z_1(x, i)$ peremfeltételekkel helyettesítjük, ezáltal újabb $n-1$ számú függvényt kapunk:

$$z_2(x, 1), z_2(x, 2), \ldots, z_2(x, n-1).$$

A z_2 függvényekből kiindulva megkonstruálunk $n-1$ számú z_3 függvényt stb.

Megmutatjuk, hogy a lemma feltételeinek fennállása esetén tetszés szerinti i-re, $i=1, 2, \ldots, n-1$, a

$$z_1(x, i),\ z_2(x, i), \ldots, z_n(x, i), \ldots$$

függvénysorozat egyenletesen konvergál egy kétszer differenciálható $z(x, i)$ függvényhez, és a (63a) egyenletnek az a megoldása, amely a B_i, $i=1, 2, \ldots, n$, sávokban a $z(x, i)$, $z(x, i+1)$ peremértékeket veszi fel, megadja a keresett $Y^{(1)}_{\mu+\Delta\mu}$ megoldást.

Ennek érdekében előbb megemlítjük a z_n függvények néhány tulajdonságát. A 3. lemma és a konstrukció folytán fennáll:

$$|z_n'(x, i)| < k'. \tag{76}$$

Innen, ugyanazon lemma értelmében, elég nagy T esetén kapjuk:

$$|z_n''(x, i)| < \mu(k', k'') \cdot n. \tag{77}$$

Ezeknek a tulajdonságoknak a következtében elég kis k' és $\frac{1}{T}$ értékekre és tetszés szerinti rögzített k'' és k mellett a z függvények megszerkesztése lehetséges, továbbá a 3. lemma szerint

$$|z_{n+1} - z_n| < \varrho |z_n - z_{n-1}|, \tag{78}$$

ahol $\varrho < 1$ és nem függ n-től és i-től.

(78)-ból következik, hogy a

$$z_1(x, i),\ z_2(x, i), \ldots, z_m(x, i), \ldots$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1$$

sorozat egyenletesen konvergens. Azonkívül, (77) és (78) értelmében, az (58) egyenlet „közelítő" megoldásai — a (63a) egyenlet megoldásai a B_i sávban a z_{i-1}, z_i peremértékek mellett — (m-re nézve) egyenlő mértékben folytonos $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial v}$ parciális deriváltakkal fognak rendelkezni, és a konstrukció szerint $m \to \infty$ esetén a B_i, B_{i+1} sávok közös határán a B_i-hez tartozó $\frac{\partial y}{\partial v}$ derivált egyenlővé válik a B_{i+1}-hez tartozó $\frac{\partial y}{\partial v}$ deriválttal.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy ha a $\mu y_0(x)$, $\mu y_1(x)$ peremfeltételekhez van $Y(x, v)$ megoldás, akkor a $(\mu+\Delta\mu) y_0(x)$, $\mu y_1(x)$ peremfeltételekhez is lehet megoldást szerkeszteni.

Ebből a megoldásból kiindulva ugyanezen a módon lehet megoldást konstruálni a $(\mu+\Delta\mu) y_0(x)$, $(\mu+\Delta\mu) y_1(x)$ peremfeltételekhez.

Minthogy $\mu=0$ esetén van triviális megoldás, az indukciós elv igazolásával a megfogalmazott lemmát maradéktalanul bebizonyítottuk.

Tisztázni fogjuk a kapott „közelítő" megoldás néhány tulajdonságát.

Ebből a célból tekintsük az x, v sík $0<v<1$ egységsávjának a R, τ sík S *Riemann*-felületére való, a

$$\left\{\begin{aligned} R &= \frac{\partial Y}{\partial v}, \\ \tau &= \frac{\partial Y}{\partial x} \end{aligned}\right. \tag{79}$$

függvények által létesített leképezését.

A (31) leképezés kvázi-konform és eleget tesz a

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial v} &= \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{\partial R}{\partial v} &= a_0 \frac{\partial \tau}{\partial x} + b_0 \frac{\partial \tau}{\partial y} \end{aligned}\right. \tag{80}$$

egyenletrendszernek, ahol a_0 és b_0 az x, y változóknak az $\frac{i}{n} < v < \frac{i+1}{n}$ sávok mindegyikében egyenletesen folytonos függvénye. Azonkívül ezek az együtthatók egyenletesen korlátosak és teljesítik a (80) egyenletrendszer erős elliptikusságára vonatkozó feltételt.

A feladat feltételei szerint a S *Riemann*-felület a

$$|R| < k'$$

sávhoz tartozik. Innen a lineáris kvázi-konform leképezések 6. tulajdonsága alapján a (78) leképezésre a következő tulajdonságokat nyerjük:

1°. Bármely pozitív h szám esetén a

$$h < v < 1 - h$$

sávban a R, τ függvények egyenlő mértékben folytonosak, és eleget tesznek a *Hölder*-feltételnek (n-re nézve egyenletesen).

2°. Tetszés szerinti v-re fennáll:

$$|R(x, v)| < K \log \frac{1}{v(1-v)},$$

ahol K nem függ n-től.

3°. A 2. tulajdonságból és τ korlátosságából közvetlenül következik, hogy a Y megoldások a $0<v<1$ sávban n-re nézve egyenlő mértékben folytonosak.

15. Exisztencia-tétel. A (80) leképezések imént felsorolt tulajdonságaiból és a 6. tulajdonságból közvetlenül következik, hogy leképezés-családunk kompakt, és $n \to \infty$ esetén minden egyenletesen konvergens részsorozat határértékben a $0<v<1$ sáv olyan kvázi-konform leképezését adja, amely megfelel a

$$\text{(81)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \tau}{\partial v}=\dfrac{\partial R}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial R}{\partial v}=a(R,\tau)\dfrac{\partial \tau}{\partial x}+b(R,\tau)\dfrac{\partial \tau}{\partial v} \end{cases}$$

egyenletrendszernek; a limeszként kapott R, τ függvények x és v szerinti parciális deriváltjai léteznek és eleget tesznek a *Hölder*-feltételnek minden $h<v<1-h$, $h>0$ sávban. Ebből és a Y függvények egyenlő mértékben való folytonosságából az is következik, hogy a Y függvények megfelelő részsorozata egyenletesen konvergens a $0<v<1$ sávban, és a határfüggvény lesz az (58) egyenlet keresett megoldása.

Ezzel bebizonyítottuk az exisztencia-tételt a 4. lemma feltételei mellett. Felhasználva a lineáris egyenletrendszert kielégítő kvázi-konform leképezések tulajdonságait és a *Schwarz*-féle alternáló eljárást, nem nehéz a tételt tetszés szerinti kétszer differenciálható peremfeltételek esetére általánosítani.

Tehát tegyük fel, hogy az (58) egyenlet integráljának a $0<v<1$ egységsávban való létezését kimondó tétel érvényes tetszés szerinti, az alábbi feltételeket teljesítő, $y_0(x)$, $y_1(x)$ peremértékek mellett:

1°. $x\to\infty$ és $x\to-\infty$ esetén y_0 és y_1 véges határértékhez tart.

2°. $|y_0'(x)|\leqq k'$, $|y_1'(x)|\leqq k'$.

3°. $|y_0''(x)|\leqq k''$, $|y_1''(x)|\leqq k''$.

Megmutatjuk, hogy bármely elég kicsiny δy_1 függvényhez,

$$|\delta y_1|<\varepsilon, \quad |\delta y_1'|<\varepsilon, \quad |\delta y_1''|<\varepsilon,$$

megkonstruálható az (58) egyenletnek egy, az $y_0(x)$, $y_1(x)+\delta y_1$ peremértékekhez tartozó megoldása.

Jegyezzük meg mindjárt, hogy nem jelenti az általánosság megszorítását, ha kezdettől fogva feltesszük, hogy mindenütt

$$\delta y_1\geqq 0.$$

A keresett megoldás megszerkesztéséhez felhasználjuk a *Schwarz*-féle alternáló eljárást.

Bontsuk fel az egységsávot a $v=\frac{1}{3}$, $v=\frac{2}{3}$ egyenesekkel három sávra: D_1: $0<v<\frac{1}{3}$, D_2: $\frac{1}{3}<v<\frac{2}{3}$, D_3: $\frac{2}{3}<v<1$. Jelöljük $y(x,v)$-vel az (58) egyenlet megoldását az eredeti feltételek mellett.

Jelöljük $Y_1^{(1)}(x,v)$-vel (58)-nak azt a megoldását a D_2+D_3 sávban, amely a határokon az $y\left(x,\frac{1}{3}\right)$ és $y_1+\delta y_1$ értékeket veszi fel. $Y_1^{(2)}(x,v)$-vel jelöljük

(58) azon megoldását a D_1+D_2 sávban, amely a határokon az $y_0(x)$ és $Y_1^{(1)}\left(x, \frac{2}{3}\right)$ értékeket veszi fel. A $Y_n^{(1)}$ függvény (58)-nak az a megoldása a D_2+D_3 sávban, amely a határokon a $Y_{n-1}^{(2)}\left(x, \frac{1}{3}\right)$, $y_1+\delta y_1$ értékeket veszi fel. $Y_n^{(2)}$ lesz (58)-nak azon megoldása a D_1+D_2 sávban, amely a határokon az $y_0(x)$ és $Y_n^{(1)}\left(x, \frac{2}{3}\right)$ értékeket veszi fel.

Az exisztencia-tétel bizonyítása érdekében meg kell mutatnunk, hogy:

1°. Elég kis ε-ra az összes $Y^{(1)}$ és $Y^{(2)}$ függvények megszerkeszthetők.

2°. A megszerkesztett sorozatok $n\to\infty$ esetén a keresett megoldáshoz tartanak.

A sorozat konvergenciája azonnal következik kompaktságából és monotonitásából. Valóban, a *Schwarz*-féle elv értelmében

$$Y_1^{(1)}<Y_2^{(1)}<\cdots<\sup\,[\max y_0(x),\ \max(y_1+\delta y_1)],$$

$$Y_1^{(2)}<Y_2^{(2)}<\cdots<\sup\,[\max y_0(x),\ \max(y_1+\delta y_1)];$$

azonkívül a derivált egyenletrendszernek megfelelő kvázi-konform leképezésre vonatkozó maximum-elv szerint bármelyik Y függvényre fennáll:

$$\left|\frac{\partial Y}{\partial x}\right|<k'+\varepsilon.$$

Annak a bizonyítását, hogy az összes Y függvények megkonstruálása lehetséges, két részre bontjuk. Először kimutatjuk a megoldás létezését elég kicsiny k' mellett, de tetszés szerinti k''-re. E célból fel fogjuk tételezni, hogy a 2° feltételben k' olyan kicsiny, hogy az (58) egyenletnek minden, a $\frac{2}{3}$ szélességű $0<v<\frac{2}{3}$, ill. $\frac{1}{3}<v<1$ sávon értelmezett $z(x, v)$ megoldására a

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|<k_1'$$

feltételnek a sáv határain való teljesüléséből következik, hogy a $v=\frac{1}{3}$, ill. $v=\frac{2}{3}$ középvonalon

$$\left|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|\leqq k_0''=\varrho(k'),\quad \lim_{k\to 0}\varrho(k')=0.$$

Az, hogy ilyen k_1' konstans tetszés szerinti k'' mellett létezik, a lineáris egyenletrendszerek 8. tulajdonságából következik.

Miután ezt megjegyeztük, tekintsünk egy δy_1-et, amelyre

$$|y_1' + \delta y_1'| \leqq k_1'.$$

Ilyen körülmények között, ha

$$|y_1'' + \delta y_1''| < \frac{9}{4} k_0'', \tag{82}$$

akkor az összes Y függvények megszerkeszthetők. Valóban, a maximum-elv értelmében $\frac{\partial Y}{\partial x}$-re teljesülni fog

$$\left|\frac{\partial Y}{\partial x}\right| < k_1',$$

következésképpen a $v = \frac{1}{3}$, $v = \frac{2}{3}$ egyeneseken a Y függvények x szerinti második deriváltja kisebb lesz, mint k_0''. Innen következik, hogy a $D_1 + D_2$ sávban a konstrukció mindig lehetséges. Vizsgálnunk kell még a $D_2 + D_3$ sávot. Elvégezve ennek a sávnak $\frac{2}{3} : 1$ arányú hasonlósági kiszélesítését, a $Y_k^{(1)}$ megoldások megszerkesztését az egységsávra vezetjük vissza, és (82) folytán a peremértékek második deriváltja nem haladja meg a k_0'' értéket. A $Y^{(1)}$ függvények megkonstruálása szintén mindig lehetséges. Ezzel kimutattuk a megoldás létezését tetszés szerinti kétszer differenciálható y_0, y_1 peremértékekre az

$$|y_0'(x)| < k_1', \quad |y_1'(x)| < k_1'$$

feltétel mellett.

Áttérve az általános esetre, δy_1-et vessük alá az

$$|y_1' + \delta y_1'| < \frac{3}{2} k_1'$$

feltételnek, és tekintsük $Y_1^{(1)}$ konstrukcióját. Miután a $D_2 + D_3$ sávot az egységsávra vezettük vissza, olyan peremfüggvényeket kapunk, amelyeknek a deriváltja abszolút értékben nem nagyobb, mint k_1'. Innen és a $\frac{\partial Y}{\partial x}$-re vonatkozó maximum-elvből adódik az összes $Y^{(1)}$ és $Y^{(2)}$ megszerkesztésének lehetségessége. Ezzel az (58) egyenlet megoldásának a létezéséről szóló tételt bebizonyítottuk két megszorítás mellett: 1) elég nagy R-re

$$a = 1, \ b = 0$$

és 2) $x \to \infty$ és $x \to -\infty$ esetén az $y_0(x)$, $y_1(x)$ peremfüggvények véges határértékhez tartanak.

Az első megszorítás y_0, y_1, y_0', y_1' korlátossága esetén automatikusan feleslegessé válik annak a tételnek az alapján, amely becslést ad R-re. A második megszorítást újabb határátmenet útján lehet kiküszöbölni.

Ily módon véglegesen megfogalmazhatjuk az (58) egyenlet integráljának létezésére vonatkozó tételt:

7. TÉTEL. *Ha a*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} - a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - b\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial v} = 0 \tag{83}$$

egyenlet $a = a(R, \tau)$, $b = b(R, \tau)$ *együtthatói első és második deriváltjaikkal együtt egyenletesen folytonosak a* R, τ *síkban, és*

$$-a - \frac{1}{4} b^2 > k > 0, \tag{84}$$

akkor bármely két, első két deriváltjával együtt korlátos, $y_0(x)$ *és* $y_1(x)$ *függvényhez a* (83) *egyenletnek van olyan megoldása a* $0 < v < 1$ *sávban, amely a sáv határain rendre az* $y_0(x)$, $y_1(x)$ *értékeket veszi fel.*

A bebizonyított tételből és a kvázi-konform leképezések fentebb megállapított általános tulajdonságaiból könnyen nyerhető a kvázi-konform leképezés létezésére vonatkozó alábbi tétel:

8. TÉTEL. *Ha a karakterisztikákban felírt*

$$\left\{\begin{array}{l} W = F_1(V, \alpha), \\ \theta = F_2(V, \alpha) \end{array}\right. \tag{85}$$

egyenletrendszer erősen elliptikus, és a $D(\Gamma_0, \Gamma)$ *tartomány* $\Gamma_0 : y = y_0(x)$, $\Gamma : y = Y(x)$ *határaira teljesülnek a*

$$k < Y(x) - y_0(x) < K,$$

$$|y_0'(x)| < k', \quad |Y'(x)| < k',$$

$$|y_0''(x)| < k'', \quad |Y''(x)| < k''$$

feltételek, ahol k, K, k', k'' *valamilyen állandók, akkor a*

$$D: \; y_0(x) < y < Y(x) .$$

tartománynak mindig van olyan, a (85) *egyenletrendszernek megfelelő kvázikonform leképezése az* u, v *sík* $h < v < H$ *sávjára, amely a* $\pm\infty$ *pontokat a* $\pm\infty$ *pontokba viszi át.*

A leképezés, az u tengely irányában történő tetszés szerinti eltolástól eltekintve, egyértelműen meg van határozva.

BIZONYÍTÁS. Nyilvánvaló, hogy nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy $h=0$, $H=1$; azonkívül a (83) egyenlet integráljának létezéséről most bizonyított tétel értelmében elég megmutatnunk, hogy a (85) egyenletrendszer erős elliptikussága és a

$$k < Y(x) - y_0(x) < K$$

feltétel fennállása esetén a (83) egyenlet $y_0(x)$, $Y(x)$ peremfeltételekhez tartozó $y(x, v)$ integráljára a $0 < v < 1$ sávban mindenütt érvényes, hogy

$$R = \frac{\partial y}{\partial v} > 0.$$ [1]

De a maximum-elv szerint R a $0 < v < 1$ sáv határán felveszi legkisebb értékét, és ez a k, K konstansok segítségével becsülhető (6. tétel):

$$R \geqq \mu(k, K) > 0.$$

Másrészt a $-a - \frac{1}{4} b^2$ kifejezés minimális értéke $R \geqq \mu$ esetén, az erős elliptikusság feltétele miatt, pozitív:

$$-a - \frac{1}{4} b^2 > m(\mu).$$

Ebből következik, hogy ha a (84) feltételben az n konstans kisebb $m(\mu)$-nél, akkor a (83) egyenlet megkonstruált megoldásának meglesz az a szükséges tulajdonsága, hogy R pozitív.

BEFEJEZÉS. Ebben a cikkben a kvázi-konform leképezések általános feladatának csak arra az esetére végeztünk részletes vizsgálatot és bizonyítottunk be exisztencia-tételt, amikor az egyenletben a koordináták explicite nem szerepelnek, és amikor sávszerű tartományoknak egyenesvonalú sávokra való leképezéséről van szó. A teljes elméletet, a lineáris elmélet itt nélkülözhetetlen kiegészítéseinek részletes kifejtésével együtt, külön monográfiában szándékszom megadni. Mindjárt megjegyzem azonban, hogy a lineáris egyenletrendszerekről a nemlineárisakra való áttérés legnagyobb elvi nehézségei éppen annál a résznél adódtak, amelyet a jelen cikkben fejtettem ki.

A sávszerű tartományokról korlátos tartományokra való áttérés nem ütközik elvi nehézségekbe: sávok „illesztése" helyett lehet gyűrűket „illeszteni". Ilyenkor az egyenesvonalú koordinátákat polárkoordinátákkal (csillagtartományok esete) vagy valamilyen speciális görbevonalú koordinátákkal (általános eset) kell helyettesíteni.

[1] Ennek az egyenlőtlenségnek a bizonyításához lényegesen ki kell használnunk az eredeti egyenletrendszer erős elliptikusságát, mert, amint példákkal könnyen igazolható, $y_0(x) < Y(x)$ fennállásából és a (84) feltételből nem következik, hogy $R > 0$.

A tanulmányozott egyenletrendszerről a tetszés szerinti erősen elliptikus egyenletrendszerre való áttérést azokkal a módszerekkel lehet elvégezni, amelyeket egy korábbi cikkben ismertettünk: „Об одном классе непрерывных отображений" (Математический сборник, 1935).

Lényegesen nagyobb és távolról sem legyőzött nehézségekre vezetnek a vegyes típusú egyenletrendszerekre és a háromdimenziós tartományok leképezésére való áttérés problémái.

Fordította: Bognár János,
az MTA Matematikai Kutató Intézete