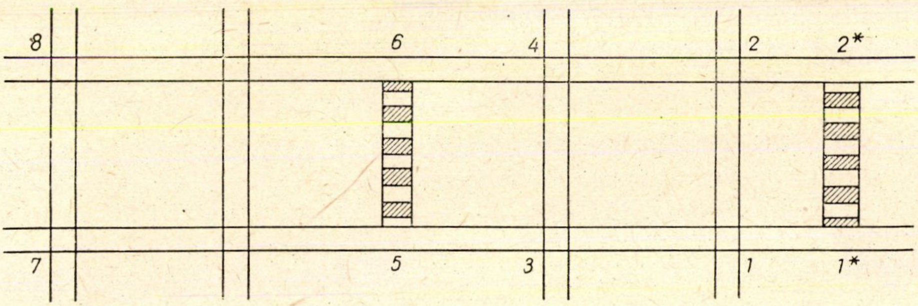
EGY KÖZLEKEDÉSI PROBLÉMÁRÓL

Írták: BÁRTFAI PÁL és DOBÓ ANDOR

Bevezetés

Az alább tárgyalt problémák a nagyvárosi gyalogosközlekedés során lépnek fel. Az 1. ábrán látható vázlatos rajz egy útvonalat — a két oldalán húzódó járdával —, továbbá az adott útvonalat derékszögben keresztező két másik útvonalat tüntet fel. A kereszteződéseknél jelzőlámpák irányítják a forgalmat. A két kereszteződés között egy kijelölt helyen „szabadon" átkelhetnek a gyalogosok[1] (természetesen „derékszögben"). A kiindulási probléma, melyet az



1. ábra

1. §-ban tárgyalunk az, hogy hogyan kell közlekednie annak, aki a legrövidebb idő alatt akar a 8-as pontból az 1-esbe jutni. Ennek kapcsán azt vizsgáljuk, hogy a gyalogosnak érdemes-e igénybe venni a szabad átkelőhelyet. A kérdésre adott válasznál természetesen nem szabad az egyoldalú matematikai eredményre támaszkodni, annál is inkább, mert a döntésnél nem csupán az egyén időnyereségét kell figyelembe venni, hanem a közérdek szempontjait is: a közlekedés biztonságát és zavartalanságát.

Az 1. §-ban tárgyalt problémánál feltételezzük, hogy a gyalogos a szabad átkelőhelyhez érkezésekor még nem látja, hogy mit mutat a jelzőlámpa, illetve ebből nem von le következtetéseket. A 2. §-ban azt mutatjuk meg,

[1] Az itt értelmezett „szabad" átkelés annyiban jelent szabadot, hogy a közlekedők rendőri irányítás nélkül bármikor — ha az úttesten nincs épségüket veszélyeztető közlekedés — áthaladás végett igénybe vehetik ezen a helyen az útszakaszt.

hogy milyen következtetést lehet levonni a célszerű útvonalra és az átlagos időnyereségre akkor, ha a közlekedő látja a jelzőlámpa átkapcsolásait, továbbá ismeri az egyes jelzések időtartamának eloszlását.

1. §

Vezessük be a következő jelöléseket: a, b és c jelölje rendre a piros, zöld és sárga jelzések átlagos időtartamát (a továbbiakban a jelzéseket mindig az út hosszirányában tekintjük, ha nem tüntetünk fel más irányt), t-vel jelöljük a szabad átkelőhelyen történő áthaladás átlagos idejét, t'-vel pedig a jelzőlámpánál történő áthaladás idejét. (A keresztező útszakaszoknál a kijelölt helyeken bármilyen megengedett irányban való áthaladások idejét, számításaink folyamán egyformának tételezzük fel.)

Azokat az időket, amelyeket az úttesten nem áthaladásra vagy várakozásra fordítunk (pl. a 6-ból 4-be jutás idejét) ebben a paragrafusban nullának fogjuk tekinteni, ugyanis az ilyen számításba nem vett idők összege az útvonal bármely megtételi módjánál ugyanakkora, ezek elhagyásával az útvonalak összehasonlítását nem befolyásoljuk. Feltételezzük továbbá a gyalogosok szabályos közlekedését és azt, hogy a zöld jelzésnél elindult gyalogos átéréséig a jelzőlámpát legfeljebb sárgára váltják át.

Először a problémának csak két részletkérdését vizsgáljuk: a 4—1 átkelés A_1 várható idejét, majd a 3—1 átkelés B_1 várható idejét számítjuk ki. Véletlenszerűen érkezve a 4-hez $\frac{a}{a+b+2c}$, $\frac{b}{a+b+2c}$, $\frac{2c}{a+b+2c}$ valószínűségekkel kapunk piros, zöld, illetve sárga jelzéseket. Az egyes esetekben kiszámíthatjuk az átkelés várható idejét, ezeket szorozva a valószínűségekkel és összegezve megkapjuk A_1, ill. B_1 értékét:

$$A_1=\left(\frac{c}{2}+a+c+t'\right)\frac{c}{a+b+2c}+\left(\frac{c}{2}+b+c+t'\right)\frac{c}{a+b+2c}+$$
$$+\left(\frac{a}{2}+c+t'\right)\frac{a}{a+b+2c}+\left(\frac{b}{2}+c+t'\right)\frac{b}{a+b+2c}=$$
$$=\frac{(a+2c)^2}{2(a+b+2c)}+\frac{b^2+4bc+6c^2}{2(a+b+2c)}+t'$$

$$B_1=\left(\frac{c}{2}+t'\right)\frac{c}{a+b+2c}+\left(\frac{c}{2}+a+c+t'\right)\frac{c}{a+b+2c}+$$
$$+\left(\frac{a}{2}+c+t'\right)\frac{a}{a+b+2c}+t'\frac{b}{a+b+2c}=\frac{(a+2c)^2}{2(a+b+2c)}+t'.$$

A kiszámított és rendezett formulákból látható, hogy $A_1 > B_1$.

Kérdés, hogy ha a 6-ból az 1-be akarunk jutni, érdemes-e a szabad átkelőt felhasználni. Nyilván csak akkor érdemes, ha $A_1 > B_1 + t$, azaz $t < A_1 - B_1 = \frac{b^2 + 4bc + 6c^2}{2(a+b+2c)}$. Például $a = b$ esetén $c = 0$ közelítéssel számolva $t < \frac{b}{4}$ adódik feltételként. Hogy ez a gyakorlatban teljesül-e, azt a paragrafus végén meg fogjuk vizsgálni.

Ezek után könnyen választ adhatunk a bevezetőben felmerült problémára, vagyis arra a kérdésre, hogyan érdemes közlekedni, ha 8-ból 1-be a legrövidebb időn belül akarunk eljutni? Belátható, hogy mivel $A_1 > B_1$, célszerű elindulni arra, amerre először zöldet kapunk. Ha így 7-be jutunk, további utunk már nem okoz gondot, ugyanis 5-ből 6-ba menni $A_1 > B_1$ miatt nyilván nem érdemes. Ha 8-ból 6-ba jutunk — az előbbi esethez hasonlóan — ott $t \lesseqgtr A_1 - B_1$ alapján kell eldöntenünk az útirányt.

Módosítsuk az előző feladatot úgy, hogy 2*-ból 1*-ba — mint azt az 1. ábra mutatja — egy szabad átkelőhely vezessen. Ekkor a 3—1* áthaladás ideje változatlan, $B_1^* = B_1$, a 4—1* áthaladás ideje azonban megváltozik:

$$A_1^* = \left(\frac{c}{2} + t' + t^*\right)\frac{c}{a+b+2c} + \left(\frac{c}{2} + a + c + t'\right)\frac{c}{a+b+2c} +$$

$$+ \left(\frac{a}{2} + c + t'\right)\frac{a}{a+b+2c} + (t' + t^*)\frac{b}{a+b+2c} =$$

$$= \frac{(a+2c)^2}{2(a+b+2c)} + t' + \frac{b+c}{a+b+2c}t^*,$$

ahol t^* a 2*—1* áthaladás átlagos ideje. Az előzőeket figyelembe véve 8-ból indulva egyetlen probléma, hogy 6-ba érkezve átmenjünk-e 5-be, vagy sem. Érdemes áthaladni, ha

$$t < A_1^* - B_1^* = \frac{b+c}{a+b+2c}t^*.$$

Ez azonban $t = t^*$ esetén lehetetlen, sőt $a = b$ esetén is csak akkor lehetséges, ha $t^* > 2t$. Mivel ez gyakorlatilag nem szokott előfordulni, azt mondjuk, hogy ebben az esetben a 6—5 átjáró használata nem célszerű.

A fentiek után még kézenfekvő megvizsgálni azt az esetet, amikor az útvonal mentén több jelzőlámpás kereszteződés és több szabad átkelő van. Ebben az esetben a számítások azt mutatják, hogy a szabad átkelők közül legfeljebb az utolsót érdemes használni; ha ezután még van jelzőlámpás kereszteződés, akkor csak abban az esetben előnyös a használata, ha $t < A_1 - B_1$.

Gyakorlatban a kérdést a Kossuth Lajos utca Múzeum körúti és a Petőfi Sándor utcai kereszteződésénél vizsgáltuk meg. 40 mérési adat alapján a következő értékeket nyertük:

Múzeum körútnál:

$a = 66{,}4''$ szórása $20{,}0''$

$b = 47{,}3''$ szórása $11{,}6''$

$c = 5{,}5''$ szórása $1{,}6''$

$A_1 = 37{,}9'' + t'$

$B_1 = 24{,}1'' + t'$

Petőfi Sándor utcánál:

$a = 40{,}0''$ szórása $9{,}4''$

$b = 47{,}1''$ szórása $15{,}0''$

$c = 4{,}2''$ szórása $2{,}5''$

$A_1 = 28{,}5'' + t'$

$B_1 = 12{,}2'' + t'$

Ugyancsak 40 mérésből meghatároztuk a szabad átkelőhelyen (Puskin mozi előtt) történő áthaladás átlagos idejét: $t = 14{,}9''$.

Az adatok alapján azt mondhatjuk, hogy a Petőfi Sándor utca felől indulva a Múzeum körút túlsó sarkához (8-ból 1-be) nem érdemes az átkelőt igénybe venni, mert $t > A_1 - B_1 = 13{,}8''$. Ellenkező irányban téve meg az utat, a matematikai eredmény ugyan a szabad átkelő használatát javasolja, mert $t < A_1 - B_1 = 16{,}3''$, de meggondolva azt, hogy az időnyereség átlagosan mindössze $1{,}4''$ és ez gyakorlatilag annyira jelentéktelen, hogy ezért nem érdemes a közlekedés biztonságát és zavartalanságát kockáztatni. Ilyen esetben is a jelzőlámpás átkelő használatát javasoljuk.

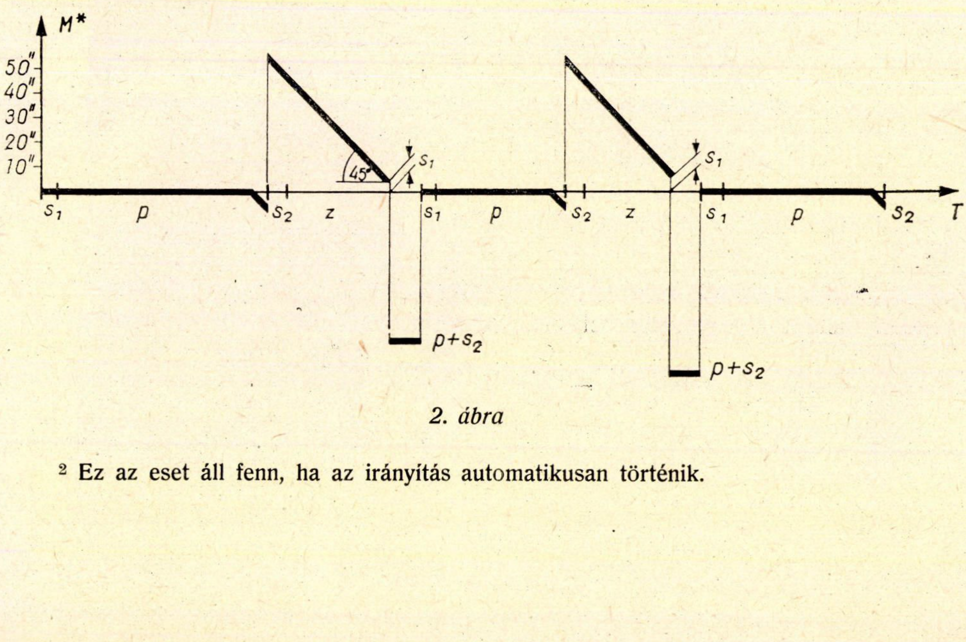
2. §

Ebben a paragrafusban azt fogjuk vizsgálni, hogy a közlekedőnek merre érdemes elindulnia akkor, ha a 6-ba érkezésekor észlelni tudja, hogy mit mutat a jelzőlámpa 4-nél. Egyszerűség kedvéért csak egy esetet tárgyalunk, éspedig azt, amikor 6-ba érkezve a zöld jelzést sárgára kapcsolják át. Tegyük fel, hogy a 6-tól 4-ig terjedő útszakasz megtételéhez T, a 6—5 átkeléshez t idő szükséges. Vizsgáljuk a két számbajöhető útvonal megtételéhez szükséges átlagos idők különbségét.

A tárgyalás megkönnyítése végett tegyük fel, hogy a 6-ból két személy A és B egyszerre indul el úgy, hogy A 4-en át, B pedig 5-ön át jut el 1-be. Tegyük fel továbbá, hogy a jelzőlámpák váltási időtartamait pontosan ismerjük. Jelölje z a zöld, p a piros, s_1 a zöld utáni, s_2 a piros utáni sárga jelzés időtartamát. Az alábbi táblázat mutatja, hogy ha A és B a megadott jelzések esetén érkeznek 4-be, illetve 3-ba, akkor melyik mennyi idővel előbb érkezik 1-be. Az időkülönbségnél m indexszel jeleztük, hogy nem a jelzés teljes időtartamáról van szó, hanem csak arról a részéről, amelyet A-nak 4-be érkezésétől számítunk. Tárgyalásunknál, a gyakorlatnak megfelelően feltételezzük, hogy $t < p$ és $t < z$, ez esetben vizsgálatunk során több eset kizárható, melyet a táblázatban áthúzással jeleztünk. Ha A és B egyszerre érkezik 1-be, akkor időnyereség, illetve veszteség nincs; ezt a táblázatban nullával jelöltük.

$B \backslash A$	s_1	s_2	p	z
s_1	0			A $p+s_2$
s_2		B $z+s_1$	0	
p	0		0	A $p+s_2$
z		B $(s_1+z)_m+s_1-t$	A $t-p_m-s_2$	B z_m+s_1-t

Az előbbiek alapján a jelzőlámpák váltási időpontjainak pontos ismerete esetén a 2. ábrán látható grafikon azt mutatja meg, hogy ha a 6—4 út megtételéhez T idő szükséges, akkor érdemes-e átmenni, és mennyit nyerünk az átkeléssel.[2] Az abszcisszán a T-t, az ordinátán az időnyereséget ábrázoltuk rögzített t mellett.



2. ábra

[2] Ez az eset áll fenn, ha az irányítás automatikusan történik.

Ha figyelembe vesszük, hogy a váltások időpontjai valószínűségi változók, akkor ez a görbe jelentősen eltorzul. Jelöljük a piros jelzés és az előtte levő sárga jelzés időtartamainak összegét ξ-vel, a zöld jelzés és az előtte levő sárga jelzés időtartamainak t-vel csökkentett összegét η-val. (Feltehetően $\eta > 0$.) Ekkor egy váltási periódus: $\xi+\eta+t=\pi$. Legyenek továbbá a $\xi+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k$, $\eta+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k$, $\xi+\eta+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k$ ($k=0,1,2,\ldots$; $\pi_0=0$) valószínűségi változók sűrűségfüggvényei rendre $f_k(x)$, $g_k(x)$, $h_k(x)$ eloszlásfüggvényei $F_k(x)$, $G_k(x)$, $H_k(x)$. Ezek ismeretében könnyen kiszámítható a

$$P(\xi+\eta+\pi_0+\pi_1+\cdots+\eta_k<T<\xi+\eta+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k+t)=$$
$$=P(T-t<\xi+\eta+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k<T)=H_k(T)-H_k(T-t)$$

valószínűség, és így a várható időnyereség kifejezésének negatív előjellel számbajövő tagjai — eltekintve a későbbiekben tárgyalt korrekciótól:

$$K(T)=(a+c)\sum_{k=0}^{\infty}(H_k(T)-H_k(T-t)).$$

A pozitív tagok meghatározásánál elhanyagoltuk azt az esetet, amikor A és B mindketten sárga jelzésnél érkeznek az útkereszteződéshez, mert a mérési eredmények azt mutatják, hogy $s_i<t$ $(i=1,2)$ az esetek túlnyomó többségében. A B-re vonatkozó időnyereség meghatározása végett vegyük figyelembe, hogy

$$P(\xi+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k+\alpha\eta<T<\xi+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k+(\alpha+\delta)\eta)=$$
$$=\int_0^{\infty}P(\xi+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k+\alpha\eta<T<\xi+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k+(\alpha+\delta)\eta\,|\,\eta=y)\cdot$$
$$\cdot g_0(y)\,dy=\int_0^{\infty}P(T-(\alpha+\delta)y<\xi+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k<T-\alpha y)g_0(y)\,dy=$$
$$=\int_0^{\infty}[F_k(T-\alpha y)-F_k(T-(\alpha+\delta)y)]g_0(y)\,dy\sim\delta\int_0^{\infty}yf_k(T-\alpha y)g_0(y)\,dy,$$

feltéve, hogy $F_k(x)$ mindenütt differenciálható, és δ elég kicsiny pozitív szám, $(0\leqq\alpha<1)$.

Másrészt η sűrűségfüggvénye $g^*(x)$ a $T=\xi+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k+\alpha\eta$ feltétel mellett a Bayes-tétellel kiszámítható:

$$g^*(x)=\frac{xf_k(T-\alpha x)g_0(x)}{\int_0^{\infty}zf_k(T-\alpha z)g_0(z)dz}.$$

Ennek várható értéke

$$M(\eta|\xi+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k+\alpha\eta=T)=\frac{\int_0^\infty x^2 f_k(T-\alpha x)g_0(x)\,dx}{\int_0^\infty x f_k(T-\alpha x)g_0(x)\,dx}.$$

Mivel a $T=\xi+\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k+\alpha\eta$ esetén az átkeléssel átlagban $(1-\alpha)\eta+c$ időt nyerünk a másik útvonalhoz képest, így a várható időnyereség pozitív előjeles tagjai a k-adik váltási periódus esetén:

$$L_k(T)=\int_0^1\left[(1-\alpha)\frac{\int_0^\infty x^2 f_k(T-\alpha\eta)g_0(x)\,dx}{\int_0^\infty x f_k(T-\alpha x)g_0(x)\,dx}+c\right]\int_0^\infty x f_k(T-\alpha x)g_0(x)\,dx\,d\alpha=$$

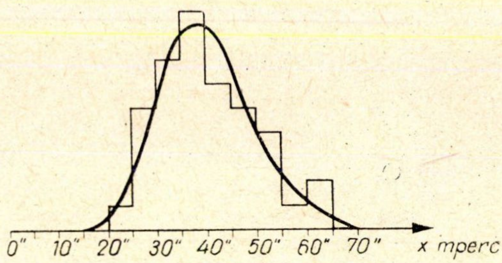
$$=\int_0^1(1-\alpha)\int_0^\infty x^2 f_k(T-\alpha x)g_0(x)\,dx\,d\alpha+c\int_0^1\int_0^\infty x f_k(T-\alpha x)g_0(x)\,dx\,d\alpha.$$

Az

$$L(T)=\sum_{k=0}^{\infty}L_k(T)$$

jelölés mellett a teljes időnyereség tehát

$$M(T)=L(T)-K(T).$$



3. ábra

Az eddigi számításaink során még nem vettük figyelembe a 2. ábrán mutatkozó azon időveszteséget, mely akkor lép fel, ha A 4-hez érkezve piros, B 3-hoz érkezve zöld jelzést kap. Ennek korrigálását $L(T)$ kiszámításához hasonló módon végezhetjük el. Ha $p_k(x)$ jelöli a $\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k$ sűrűség-függvényét, akkor

$$f^*(x)=\frac{x p_k(T-\alpha x)f_0(x)}{\int_0^\infty z p_k(T-\alpha z)f_0(z)\,dz},$$

ahol $f^*(x)$ a ξ sűrűségfüggvénye a $T=\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_k+\alpha\xi$ feltétel mellet. A sárga jelzés időtartamát jelöljük ζ-val, sűrűségfüggvényét $q(x)$-szel. $f^*(x)$ ismeretében $\varepsilon_k=(1-\alpha)\xi+\zeta$ (ami megfelel annak az időtartamnak, ami A-nak 4-be érkezésétől a legközelebbi zöld jelzésig eltelik) sűrűségfüggvénye könnyen meghatározható.

Ennek alapján kiszámítható a $t-\varepsilon_k$ várható értéke. Ezek után az $L_k^*(T)$ korrekcióra a következő adódik:

$$L_k^*(T)=t\int_0^1\int_0^\infty x p_k(T-\alpha x) f_0(x)\,dx\,d\alpha-$$

$$-\int_0^1\int_0^t\int_0^\infty u x p_k(T-\alpha x) f_0(x) q(u-(1-\alpha)x)\,du\,dx\,d\alpha.$$

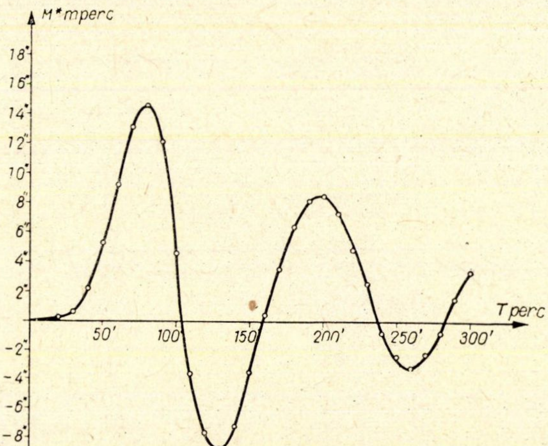
És így a teljes időnyereség az

$$L^*(T)=\sum_{k=0}^{\infty} L_k^*(T)$$

jelölés mellett

$$M^*(T)=L(T)-L^*(T)-K(T).$$

Az 1. §-ban szereplő példára alkalmazva az eredményt, amikor is $t=12''$, kiszámítottuk $M^*(T)$ értékét T függvényeként. A jelzések időtartamának eloszlását Γ-eloszlással közelítettük. A 3. ábrán látható, hogy ez a közelítés elfogadható.



4. ábra

Az így kapott grafikon alapján (4. ábra) az alábbi következtetést vonhatjuk le:

Ha a Petőfi Sándor utca felől közeledünk a Múzeum körút és a Rákóczi út sarkán álló mozíműsort hirdető táblához, s ha a Puskin mozi előtti szabad átkelőhelyhez érve azt látjuk, hogy éppen akkor kapcsolják át a zöld jelzést sárgára, akkor, mivel $T\sim 54''$ csak az időnyereséget tekintve, érdemes a szabad átkelőt igénybe venni. Ekkor ugyanis az átlagos időnyereség kb. 6″. Mint látható — a kezdeti szakasztól eltekintve — a görbe a csillapított rezgőmozgást ábrázoló görbéhez hasonlít, amely az $M = 1{,}8''$ értékhez aszimptotikusan közeledik.

Nyilvánvaló, hogy e dolgozatban tárgyalt problémák még többféle szempontból általánosíthatók. Pl. T is tekinthető valószínűségi változónak. Más esetben a közlekedő a szabad átkelésnél figyelembe veheti, hogy az úttesten várakozással vagy anélkül juthat-e át stb. Ezekkel a vizsgálatokkal azonban itt nem foglalkozunk.

(Beérkezett: 1961. I. 17.)