

NÉHÁNY MEGJEGYZÉS BIRKHOFF 111. PROBLÉMÁJÁRÓL

Írta: RÉVÉSZ PÁL

Bevezetés

Egy $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^n$ matrixot duplán sztochasztikusnak nevezünk akkor, ha

$$a_{ik} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n)$$

és

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Egy $P = \{p_{ik}\}_{i,k=1}^n$ duplán sztochasztikus matrixot permutáció matrixnak nevezünk, ha elemei között csak a 0 és 1 számok fordulnak elő. Könnyen látható, hogy az $n \times n$ -es permutáció matrixok száma $n!$

BIRKHOFF [1] dolgozatában bebizonyította a következő tételt.

1. TÉTEL: Legyen $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^n$ egy duplán sztochasztikus matrix és jelölje $P_1, P_2, \dots, P_{n!}$ az $n \times n$ -es permutáció matrixok sorozatát. Ekkor található a nem negatív valós számoknak egy $c_1, c_2, \dots, c_{n!}$ sorozata úgy, hogy

$$A = \sum_{k=1}^{n!} c_k P_k \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{n!} c_k = 1.$$

BIRKHOFF [2] könyvében felveti azt a kérdést, hogy mi módon általánosítható az 1. tétel végtelen matrixokra.

Minthogy e problémával már eddig is több cikk foglalkozott, amelyeknek során nagyszámú megoldatlan probléma vetődött fel és a matematikának több különböző ága került felhasználásra, indokolt e kérdéssel egy összefoglaló cikkben foglalkozni.

Jelen dolgozat az 1. §-ban a véges, a 2. §-ban a végtelen esetet tárgyalja.

1. §. A véges eset

Az 1. tételnek több bizonyítása ismeretes, most egy gráfelméleti eszközöket használó bizonyítást adunk. Elöljáróban ismertetjük a szükséges gráfelméleti fogalmakat és eredményeket, továbbá a lineáris algebra egy jól ismert tételét, amelyre a továbbiakban szükségünk lesz.

1. definíció. Egy $2n$ szögpontú G gráfot páros körüljárásúnak nevezzünk, ha megadható a szögpontoknak két diszjunkt, egyenként n szögpontot tartalmazó V , illetve V' halmaza úgy, hogy $\mathcal{Q}$ minden éle V -nek egy pontját V' -nek egy pontjával köti össze (de nincs $\mathcal{Q}$ -nek olyan éle, amely V két pontját, illetve V' két pontját kötné össze).

A páros körüljárású gráfokra vonatkozik a következő

2. TÉTEL [3]: *Legyen $\mathcal{Q}$ egy $2n$ szögpontú páros körüljárású gráf. A V és V' halmazokat definiáljuk az 1. definícióban leírt módon. Tegyük fel, hogy V bármely l ($l=1, 2, \dots, n$) szögpontja össze van kötve V' -nek legalább l szögpontjával. Ekkor található $\mathcal{Q}$ -nek n éle, úgy, hogy ezek segítségével V minden egyes pontja össze van kötve V' -nek egy és csak egy pontjával.*

Ezen tételt a következő formában is szokták kimondani:

2a. TÉTEL. *Tekintsünk egy n fiúból és n lányból álló társaságot. Tegyük fel, hogy ezen társaságon belül bármely l ($l=1, 2, \dots$) fiú összesen legalább l lányt ismer. Ekkor minden fiú meg tud nőszülni úgy, hogy egy olyan lányt vesz feleségül, akit ismer.*

Fenti átfogalmazás miatt szokták ezt a kérdéskört házassági problémának is nevezni.

Megemlítjük a 2. tétel végtelen gráfokra vonatkozó megfelelőjét.

3. TÉTEL [4]. *Legyen $V = \{a_i\}$ $i \in M$ és $V' = \{a'_i\}$ $i \in M'$ két tetszőleges halmaz. (Az M és M' index halmazokról nem teszünk fel semmit.) A $\mathcal{Q}$ páros körüljárású gráfot oly módon konstruáljuk, hogy V bizonyos szögpontjait összekötjük V' bizonyos szögpontjaival. Tegyük fel, hogy V minden szögpontja V' -nek csak véges sok szögpontjával van összekötve, V' -nek minden szögpontja V -nek csak véges sok pontjával van összekötve, továbbá V -nek bármely l ($l=1, 2, \dots$) pontja V' -nek legalább l pontjával van összekötve és V' -nek bármely l pontja V -nek legalább l pontjával van összekötve. Ekkor található V -nek egy V' -re való kölcsönösen egyértelmű leképezése úgy, hogy az egymásnak megfeleltetett pontok $\mathcal{Q}$ -ben éllel vannak összekötve.*

Rátérünk a szükséges lineáris algebrai fogalmakra.

2. definíció. Legyen E az n -dimenziós euklidesi tér egy halmaza, legyen $x \in E$, azt mondjuk, hogy x E -nek extrémális pontja, ha nem található E -nek két különböző x_1 és x_2 pontja úgy, hogy

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,$$

ahol λ_1 és λ_2 pozitív valós számok és $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

3. definíció. Az n dimenziós tér egy konvex, korlátos, zárt halmazát poliédernek nevezzük, ha csak véges sok extrémális pontja van.

Jól ismert a következő egyszerű

4. TÉTEL. Legyen E az n dimenziós térben egy konvex poliéder. E extrémis pontjai legyenek az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ pontok. Ekkor minden $\mathbf{x} \in E$ ponthoz található a nem negatív valós számoknak egy $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sorozata úgy, hogy

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{x}_m.$$

Mielőtt rátérnénk az 1. tétel bizonyítására, a következő két lemmát bizonyítjuk be.

1. LEMMA. Legyen $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^n$ egy duplán sztochasztikus matrix. Ezen matrix nem tartalmazhat egy l sort és j oszlopot tartalmazó azonosan 0 B minort, ha $n-j < l$, azaz bármely l ($l=1, 2, \dots, n$) sorhoz található l oszlop úgy, hogy az ezek által meghatározott minor minden oszlopában van pozitív elem.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy A tartalmaz egy ilyen B minort. Jelöljük C -vel A azon minorát, amely A ugyanazon sorait tartalmazza, mint B és az összes olyan oszlopot, amelyet B nem tartalmaz:

$$A = \begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} \overbrace{}^{n-j} \\ \overbrace{}^j \end{array} \right\} \begin{array}{c} C \\ B \end{array} \right\} \begin{array}{c} 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \end{array} \\ \left. \begin{array}{c} \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\} \begin{array}{c} \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \end{array}$$

Számítsuk ki C elemeinek összegét: mivel A minden egyes sorában az elemek összege 1, kell, hogy C elemeinek összege pontosan l legyen, másrészt A minden egyes oszlopában az elemek összege 1, így C elemeinek összege legfeljebb $n-j < l$. Ellentmondásra jutván, lemmánkat bebizonyítottuk.

2. LEMMA. Legyen $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^n$ egy duplán sztochasztikus matrix. Ekkor létezik az $1, 2, \dots, n$ egész számoknak egy $k_1, k_2, \dots, k_n$ permutációja úgy, hogy $a_{ik_i} > 0$ ($i=1, 2, \dots, n$).

BIZONYÍTÁS. Konstruáljuk meg a $\mathcal{Q}$ páros körüljárású gráfot a következő módon. Legyen $\mathcal{Q}$ szögpontjainak halmaza a $V = \{1, 2, \dots, n\}$ és $V' = \{1', 2', \dots, n'\}$ halmazok egyesítése; V i pontját összekötjük V' k' pontjával, ha $a_{ik} > 0$. Az 1. lemmából egyszerűen következik, hogy az így kapott $\mathcal{Q}$ gráf rendelkezik a 2. tétel feltételében leírt tulajdonsággal és így a 2. tételből jelen lemmánk könnyen következik.

Ezután rátérünk az 1. tétel bizonyítására.

Az 1. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. A $B = \{b_{ik}\}_{i,k=1}^n$ $n \times n$ -es matrixok terében definiáljunk normát a következőképpen:

$$\|B\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik}^2}.$$

A norma ezen definíciója mellett az $n \times n$ -es matrixok egy n^2 dimenziós euklideszi teret alkotnak. Könnyen látható, hogy ezen térben a duplán sztochasztikus matrixok egy konvex, korlátos, zárt halmazt alkotnak. Nyilvánvaló az is, hogy a permutáció matrixok e halmaz extrémális pontjai. Megmutatjuk, hogy e halmaznak nincs más extrémális pontja, vagyis, hogy ha A egy duplán sztochasztikus matrix, amely nem permutáció matrix, akkor található két különböző duplán sztochasztikus matrix A_1 és A_2 és két pozitív valós szám λ_1 és λ_2 úgy, hogy

$$(1) \quad A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \quad \text{és} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Legyen $k_1, k_2, \dots, k_n$ az $1, 2, \dots, n$ számoknak egy olyan permutációja, amelyre $a_{ik_i} > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) és az $\varepsilon > 0$ számot válasszuk meg úgy, hogy $a_{ik_i} > \varepsilon$ ($i = 1, 2, \dots, n$) legyen. Definíáljuk továbbá az A_1, A_2 matrixokat és a λ_1, λ_2 számokat a következő módon

$$A_1 = \{a_{ik}^{(1)}\}_{i,k=1}^n \quad a_{ik}^{(1)} = \begin{cases} \frac{a_{ik} - \varepsilon}{1 - \varepsilon} & \text{ha } k = k_i \\ \frac{a_{ik}}{1 - \varepsilon} & \text{ha } k \neq k_i \end{cases}$$

$$A_2 = \{a_{ik}^{(2)}\}_{i,k=1}^n \quad a_{ik}^{(2)} = \begin{cases} \frac{a_{ik} + \varepsilon}{1 + \varepsilon} & \text{ha } k = k_i \\ \frac{a_{ik}}{1 + \varepsilon} & \text{ha } k \neq k_i \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \frac{1 - \varepsilon}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \varepsilon}{2}$$

Könnyen látható, hogy (1) teljesül. Így jelen tételünk következik a 4. tételből. Megemlítjük a Birkhoff-tétel következő triviális átfalmazásait.

1a. TÉTEL. Az $n \times n$ -es duplán sztochasztikus matrixok halmaza az n^2 dimenziós euklideszi térben megegyezik a permutáció matrixok halmazának konvex burkával.

1b. TÉTEL. Jelöljük az $n \times n$ -es permutáció matrixok halmazát Ω -val és jelentse $\Omega_{ik} \subset \Omega$ azon permutáció matrixok halmazát, amelyek i -ik sorának

k -ik eleme 1. Legyen $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^n$ egy tetszőleges duplán sztochasztikus matrix. Ekkor definiálható az Ω térben egy $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték úgy, hogy

$$\mathbf{P}(\Omega_{ik}) = a_{ik}.$$

1c. TÉTEL. Tekintsük az n^2 dimenziós euklidesi tér azon

$$(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn})$$

pontjainak E halmazát, amelyekre

$$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = 1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nn} = 1$$

$$\frac{1}{n} x_{11} + \frac{1}{n} x_{21} + \dots + \frac{1}{n} x_{n1} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} x_{12} + \frac{1}{n} x_{22} + \dots + \frac{1}{n} x_{n2} = \frac{1}{n}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{n} x_{1n} + \frac{1}{n} x_{2n} + \dots + \frac{1}{n} x_{nn} = \frac{1}{n}$$

és

$$x_{ik} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n).$$

Ezen E halmaz egy $n!$ extrémális ponttal rendelkező poliéder.

1d. TÉTEL. Legyen $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^n$ egy tetszőleges $n \times n$ -es duplán sztochasztikus matrix, az $n \times n$ -es permutáció matrixok sorozata legyen $P_1, P_2, \dots, P_n$. Ekkor a

$$(2) \quad x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_n P_n = A$$

$n!$ ismeretlent és n^2 egyenletet tartalmazó lineáris egyenletrendszernek van egy nemnegatív megoldásrendszere.

Fentiekkel kapcsolatban megemlítünk néhány megoldatlan problémát.

A 2. lemma szerint, ha $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^n$ egy duplán sztochasztikus matrix, akkor

$$\sum a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n} > 0,$$

ahol az összegezés kiterjesztendő az $1, 2, \dots, n$ számok összes $k_1, k_2, \dots, k_n$ permutációjára.

1. probléma. VAN DER WAERDEN mondta ki a következő sejtést:

$$(3) \quad \sum a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n} \geq \frac{n!}{n^n},$$

ahol az összegezés kiterjesztendő az $1, 2, \dots, n$ számok összes $k_1, k_2, \dots, k_n$

permutációjára. (Könnyen látható, hogy abban az esetben, ha $a_{ik} = \frac{1}{n}$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$), akkor (3)-ban az egyenlőség jel érvényes.)

Tekintetbe véve, hogy ezen probléma megoldása igen nehéznek látszik, ERDŐS PÁL javasolta a következő egyszerűbb kérdés vizsgálatát:

2. probléma. Létezik-e az $1, 2, \dots, n$ egész számoknak olyan $k_1, k_2, \dots, k_n$ permutációja, amelyre

$$a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n} \geq \frac{1}{n^n}.$$

Mivel ezen egyszerűbb kérdésre sem ismeretes a válasz, ERDŐS PÁL javasolta annak vizsgálatát, hogy létezik-e olyan $k_1, k_2, \dots, k_n$ permutációja az $1, 2, \dots, n$ egész számoknak, amelyre

$$a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n} > 0$$

és

$$a_{1k_1} + a_{2k_2} + \dots + a_{nk_n} \geq 1.$$

Könnyen látható (felhasználva a számtani és geometriai közép közötti egyenlőtlenséget), hogy ha az előzőleg említett kérdésre igenlő válasz adható, akkor ebből következik, hogy ezen utóbbi kérdésre is igenlő válasz adható. MARCUS és REE [5] bebizonyították ezen utóbbi sejtés helyes voltát.

Az 1c. tétellel kapcsolatban megemlíti a következő problémát.

3. probléma. Legyen $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ egy valószínűség eloszlás. Tekintsük az n^2 dimenziós euklideszi tér azon

$$\{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn}\}$$

pontjainak E halmazát, amelyekre

$$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = 1$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nn} = 1$$

$$\lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{21} + \dots + \lambda_n x_{n1} = \lambda_1$$

$$\lambda_1 x_{12} + \lambda_2 x_{22} + \dots + \lambda_n x_{n2} = \lambda_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\lambda_1 x_{1n} + \lambda_2 x_{2n} + \dots + \lambda_n x_{nn} = \lambda_n$$

és

$$x_{ik} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k; k = 1, 2, \dots, n).$$

Mit mondhatunk az E halmaz extrémális pontjairól?

A következő probléma az 1d. tétellel kapcsolatos. A lineáris programozásban alapvető szerepet játszik az úgynevezett szállítási probléma. Ez a következőképpen fogalmazható meg.

Jelentsen $A_1, A_2, \dots, A_n$ n „telephelyet” és $B_1, B_2, \dots, B_m$ m „felvevőhelyet”. Tegyük fel, hogy a telephelyeken rendelkezésünkre áll rendre $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ árumennyiség és a felvevőhelyek $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ árumennyiséget igényelnek. Feltesszük továbbá, hogy

$$\alpha_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \beta_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

és

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{j=1}^m \beta_j.$$

Jelentse továbbá c_{ik} egy egységnyi árunak a szállítási költségét A_i -ből B_k -ba. Feladat: megtervezni a szállítást úgy, hogy a felmerülő költség minimális legyen, másszóval keresendő a

$$(4) \quad \sum_{k=1}^m x_{ik} = \alpha_i$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ik} = \beta_k$$

egyenletrendszernek egy nem negatív megoldásrendszere, amely mellett

$$\sum_{i,k} c_{ik} x_{ik}$$

minimális. Nyilvánvaló, hogy a (4) egyenletrendszernek mindig van nem negatív megoldásrendszere. Előfordulhat azonban, hogy bizonyos telephelyekről bizonyos felvevőhelyekre való szállítás megoldhatatlan, azaz kikötjük, hogy bizonyos x_{ik} -k értéke 0 legyen. Ekkor a probléma általában már megoldhatatlan. Érdekes kérdés, hogy milyen további feltételek mellett található a (4) egyenletrendszernek nem negatív megoldásrendszere, ebben az esetben. Ezen kérdés egy speciális esetére választ ad az 1d. tétel.

Tegyük fel, hogy a telephelyek és felvevőhelyek száma egyenlő, azaz $n = m$, tegyük fel továbbá, hogy az i -edik telephelyről az i -edik felvevőhelyre nem szállíthatunk, azaz $x_{ii} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Ekkor a megoldhatóságnak nyilván szükséges feltétele, hogy

$$(5) \quad \beta_i \leq \sum_{k \neq i} \alpha_k \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

legyen. Az 1d. tételből könnyen leolvasható, hogy ezen feltétel elégséges is. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy

$$\sum_i \beta_i = \sum_k \alpha_k = 1$$

és konstruáljunk egy $n \times n$ -es duplán sztochasztikus matrixot, amelynek első sora az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, a második sora a $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ számokat tartalmazza. Az (5) feltétel biztosítja, hogy ilyen matrix valóban konstruálható. Tekintsük

a (2) egyenletrendszer első $2n$ egyenletét, vagyis azokat, amelyeknek jobb oldalán az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, illetve $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ számok állnak. Az 1d. tétel biztosítja, hogy ezen $2n$ egyenletnek van nem negatív megoldásrendszere. Ebből könnyen leolvasható, hogy az (5) feltétel valóban elégséges.

A véges BIRKHOFF-tétellel foglalkozik a [6] dolgozat is.

2. §. A végtelen dimenziós eset

Mindenekelőtt a 2. lemma végtelen dimenziós analogonját bizonyítjuk be.

4. definíció. Egy $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^\infty$ matrixot duplán sztochasztikusnak nevezünk, ha

$$a_{ik} \geq 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots)$$

és

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} = 1 \quad (k = 1, 2, \dots); \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots)$$

3. LEMMA. Legyen $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^\infty$ egy végtelen duplán sztochasztikus matrix. Ekkor létezik a természetes számoknak egy $k_1, k_2, \dots$ permutációja úgy, hogy $a_{ik_i} > 0$ ($i = 1, 2, \dots$).

Bizonyítás.¹ Tekintsük az

$$A_1 = \{a_{ik}^{(1)}\}_{i,k=1}^\infty = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n_1}, 0, 0, \dots \\ a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2n_2}, 0, 0, \dots \\ a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots, a_{3n_3}, 0, 0, \dots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m_1 1} \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 \quad a_{m_2 2} \quad \cdot \\ 0 \quad 0 \quad a_{m_3 3} \\ \cdot \quad 0 \quad 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{pmatrix}$$

azaz

$$a_{ik}^{(1)} = \begin{cases} a_{ik}, & \text{ha } k \leq n_i \text{ és } i \leq m_k \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

matrixot, ahol az $n_1, n_2, \dots$ és $m_1, m_2, \dots$ számokat úgy választjuk, hogy

$$\sum_{k=n_i+1}^{\infty} a_{ik} \leq \frac{1}{2^{i+3}} \quad (i = 1, 2, \dots); \quad \sum_{i=m_k+1}^{\infty} a_{ik} \leq \frac{1}{2^{k+3}} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

¹ Ez a bizonyítás HAJNAL ANDRÁSTÓL származik.

Konstruáljuk meg a $\mathcal{Q}$ páros körüljárású gráfot a következő módon: Legyen $\mathcal{Q}$ szögpontjainak halmaza a $V = \{1, 2, \dots\}$ és a $V' = \{1', 2', \dots\}$ halmazok egyesítése; V i pontját összekötjük V' k' pontjával, ha $a_{ik}^{(1)} > 0$. Könnyen látható, hogy az így kapott gráf rendelkezik a 3. tétel feltételében leírt tulajdonsággal és így a 3. tételből jelen lemmánk könnyen következik.

Természetesen vetődik fel az a kérdés, hogy vajon a Marcus—Ree-tétel végtelen megfelelője is érvényes-e. A válasz tagadó, sőt megmutatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz konstruálható olyan $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^{\infty}$ duplán sztochasztikus matrix, hogy a pozitív egész számoknak bármely $k_1, k_2, \dots$ permutációjára

$$a_{1k_1} + a_{2k_2} + \dots + a_{nk_n} + \dots \leq \varepsilon.$$

Tekintsük pl. a következő matrixot²

$$A = \{a_{ik}\} = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/8 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 1/16 & 0 & 0 & \dots \\ 1/8 & 1/16 & 1/32 & 1/32 & 1/32 & 1/32 & 1/32 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1/8 & 1/16 & 1/32 & 1/64 & 1/64 & 1/64 & 1/64 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1/8 & 1/16 & 1/32 & 1/64 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1/8 & 1/16 & 1/32 & 1/64 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1/8 & 1/16 & 1/32 & 1/64 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1/8 & 1/16 & 1/32 & 1/64 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1/16 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1/16 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1/16 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1/16 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1/16 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1/16 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1/16 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Könnyen látható, hogy a pozitív egész számoknak bármely $k_1, k_2, \dots$ permutációjára

$$a_{1k_1} + a_{2k_2} + \dots \leq 2(1/8 + 1/16 + 1/32 + \dots) = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Hasonlóan végezhető el a konstrukció bármely más ε -ra is.

Ezekután rátérünk a Birkhoff-tétel végtelen dimenziós általánosításainak tárgyalására.

² Ez a példa HAJNAL ANDRÁSTÓL származik.

Könnyen látható, hogy A nem állítható elő a (6) alakban, ugyanis ha ε tetszőleges pozitív szám és P tetszőleges permutáció matrix, akkor az εP matrix tartalmaz olyan elemet, amely nagyobb, mint az A matrix megfelelő eleme.

Ezért az 1. tételt más módon próbáljuk végtelen matrixokra általánosítani. Az általánosítások megtalálásában segítségünkre lesz az 1a. és 1b. tétel.

Foglalkozunk először az 1a. tétel általánosításával. Azaz vizsgáljuk meg, hogy lehet-e a végtelen matrixok terében egy topológiát bevezetni úgy, hogy ezen topológia mellett igaz legyen, hogy a duplán sztochasztikus matrixok halmaza a permutáció matrixok halmazának konvex, zárt burka.

PECK és RATTRAY [7] a végtelen matrixok terében bevezettek egy topológiát, amelyet a következő módon jellemezhetünk: azt mondjuk, hogy az $A_n = \{a_{ik}^{(n)}\}_{i,k=1}^{\infty}$ matrixsorozat konvergál a 0 matrixhoz, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}^{(n)}| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Bebizonyították, hogy az így kapott topológia mellett igaz az, hogy a duplán sztochasztikus matrixok halmaza a permutáció matrixok halmazának konvex, zárt burka. Az előző bekezdésben említett kérdéskörrel foglalkozik a [8] és [9] dolgozat is.

Egy további eredményt tartalmaz PECK [10] dolgozata. Ebben a következő fogalmakat vezeti be.

8. definíció. Legyen X a számegyenes nem negatív fele. Az $X \times X$ téren értelmezett μ mértéket duplán sztochasztikusnak nevezzük, ha

$$\mu(X \times E) = \mu(E \times X) = \lambda(E),$$

ahol E tetszőleges Borel-halmaz, λ pedig a Lebesgue-mérték.

9. definíció. Az $S \subset X \times X$ Borel-halmazt a μ mérték magjának nevezzük, ha

$$\mu(X \times X - S) = 0.$$

10. definíció. A π duplán sztochasztikus mértéket permutáció mértéknek hívjuk, ha létezik olyan S magja, amely minden $x = a$ ($0 \leq a < \infty$) és $y = b$ ($0 \leq b < \infty$) egyenesnek egy és csak egy pontját tartalmazza.

PECK [10]-ben megmutatja továbbá, hogy bevezethető az $X \times X$ téren értelmezett σ -additív halmazfüggvények terében egy topológia úgy, hogy ezen topológiára nézve a duplán sztochasztikus mértékek halmaza a permutáció mértékek halmazának konvex, zárt burka.

Megemlítjük, hogy könnyen konstruálható egy olyan fogalom, amely tartalmazza a duplán sztochasztikus mértékek és a duplán sztochasztikus

matrixok fogalmát. Nevezetesen, megkapjuk ezt az új fogalmat, ha a 8., 9. és 10. definíciókban az X teret egy topologikus csoporttal, a λ mértéket pedig az X téren értelmezett Haar-mértékkel helyettesítjük. Érdekes lenne a Peck-tételt általánosítani erre az esetre.

Az 1. tétel más lehetséges általánosításaihoz az 1b. tétel mutat utat. Nevezetesen bebizonyítható a következő két tétel [11].

5. TÉTEL. Legyen $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^{\infty}$ egy gyengén duplán sztochasztikus matrix. Ekkor definiálható a kvázi permutáció matrixok Ω^* tere részhalmazainak egy $\mathbb{S}^*$ - σ -algebrája és egy, az $\mathbb{S}^*$ -on értelmezett P^* valószínűségi mérték úgy, hogy

$$\Omega_{ik} \in \mathbb{S}^* \quad (i, k = 1, 2, \dots) \quad \text{és} \quad P^*(\Omega_{ik}^*) = a_{ik}.$$

6. TÉTEL. Legyen $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^{\infty}$ egy duplán sztochasztikus matrix. Ekkor definiálható a permutáció matrixok Ω tere részhalmazainak egy $\mathbb{S}$ - σ -algebrája és egy $\mathbb{S}$ -n értelmezett P valószínűségi mérték úgy, hogy

$$\Omega_{ik} \in \mathbb{S} \quad (i, k = 1, 2, \dots) \quad \text{és} \quad P(\Omega_{ik}) = a_{ik}.$$

Megemlíttük ezen tételnek néhány következményét. Legyen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in l^2$. Az $\mathbf{x}$ vektor i -ik koordinátáját jelöljük $x_i = \mathbf{x}|_i$ -vel. Nyilvánvaló, hogy minden A duplán sztochasztikus matrix tekinthető az l^2 téren értelmezett lineáris operátornak.

1. KOROLLÁRIUM. Legyen $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^{\infty}$ egy duplán sztochasztikus matrix. Ekkor definiálható az Ω téren egy P valószínűségi mérték úgy, hogy minden $\mathbf{x} \in l^2$ -re

$$A\mathbf{x}|_i = \int_{P \in \Omega} P\mathbf{x}|_i dP.$$

2. KOROLLÁRIUM. Legyen A egy gyengén duplán sztochasztikus matrix. Ekkor definiálható az Ω^* téren egy P^* valószínűségi mérték úgy, hogy minden $\mathbf{x} \in l^2$ -re

$$A\mathbf{x}|_i = \int_{P \in \Omega^*} P\mathbf{x}|_i dP^*.$$

3. KOROLLÁRIUM. Legyen A egy duplán sztochasztikus (illetve gyengén duplán sztochasztikus) matrix. Ekkor definiálható az Ω (illetve Ω^*) téren egy P (illetve P^*) valószínűségi mérték úgy, hogy

$$A^k \mathbf{x}|_i = \int_{P_k \in \Omega_k} \dots \int_{P_1 \in \Omega_1} P_1 P_2 \dots P_k d(P_1 \times P_2 \times \dots \times P_k),$$

illetve

$$A^k \mathbf{x}|_i = \int_{P_k \in \Omega_k^*} \dots \int_{P_1 \in \Omega_1^*} P_1 P_2 \dots P_k d(P_1^* \times P_2^* \times \dots \times P_k^*),$$

1. Minden i -re ($i = 1, 2, \dots$) található Ω diszjunkt részhalmazainak egy $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots$ sorozaa úgy, hogy

$$a_1^{(i)} + a_2^{(i)} + \dots = \Omega$$

és $\mathcal{S}_i$ minden eleme bizonyos $a_k^{(i)}$ halmazok összege.

2. A P_i mértékek kompatibilisek, azaz

$$P_{i+k}(A) = P_i(A) \quad \text{ha} \quad A \in \mathcal{S}_i \quad (i = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots).$$

3. Ha

$$a_{i_1}^{(1)} \supset a_{i_2}^{(2)} \supset a_{i_3}^{(3)} \supset \dots$$

akkor a $\prod_{j=1}^{\infty} a_{i_j}^{(j)}$ halmaz nem üres.

Ekkor található az $\mathcal{S}$ σ -algebrán egy P valószínűségi mérték úgy, hogy

$$P(A) = P_i(A) \quad \text{ha} \quad A \in \mathcal{S}_i.$$

Könnyen látható, hogy ezen lemma a 3. feltétel nélkül nem érvényes. Megemlítjük, hogy a valószínűségyszámításban gyakran lép fel az a probléma, hogy ezen lemmában az 1. és 3. feltétel milyen más feltételekkel pótolható. Így például a valószínűségyszámítás Kolmogorov-féle alaptételének bizonyításában is egy ilyen típusú feltétel megtalálása játssza a főszerepet. Igen nehéz feladatnak látszik egy jól használható elégséges feltétel megadása.

Végül még a következő kérdést említjük meg. Mi módon általánosítható a 6. tétel duplán sztochasztikus mértékekre? A jó általánosítás megtalálásában segítségünkre lehet a 4. korollárium. Nevezetesen felvetjük a következő kérdést.

4. probléma. Legyen μ a λ Lebesgue-mértékre abszolút folytonos, duplán sztochasztikus mérték, Radon—Nykodim deriváltját jelöljük $f(x, y)$ -nal. Azaz $f(x, y)$ legyen egy nem negatív függvény, amelyre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = 1.$$

Létezik-e olyan ξ_t mérhető sztochasztikus folyamat, amelyre

$$P\{\xi_t < \alpha\} = \int_{-\infty}^{\alpha} f(t, y) dy$$

$$P\{\lambda(t: \xi_t \in A) = \lambda(A)\} = 1?$$

Általában érdekes azonban a következő kérdés: ha ξ_t egy mérhető sztochasztikus folyamat, mi mondható a

$$\lambda\{t: \xi_t \in A\}$$

valószínűségváltozó eloszlásfüggvényéről? Itt A egy Borel-halmazt jelent és λ a Lebesgue-mérték.

Valószínűnek látszik, hogy ezen probléma megoldásánál egyszerűbb a 2. lemmával analóg következő probléma megoldása.

5. probléma. Legyen $f(x, y)$ az egységnégyzeten értelmezett folytonos függvény, amelyre

$$f(x, y) \geq 0$$

$$\int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^1 f(x, y) dy = 1.$$

Kérdés, létezik-e a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett olyan T mérhető, mérték-tartó transzformáció, amelyre

$$f(x, Tx) > 0.$$

IRODALOM

- [1] G. BIRKHOFF, Three observations on linear algebra, *Rev. Univ. Nac. Tucumán (a)* 5 (1946) 147—151.
- [2] G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, revised edition, New York, 1948.
- [3] D. KÖNIG, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Budapest, 1936.
- [4] O. ORE, Graphs and matching theorems, *Duke Math. J.* 22 (1955) 625—639.
- [5] M. MARCUS—R. REE, Diagonals of doubly stochastic matrices, *Quarterly Journ. of Math.* 10 (1959) 296—392.
- [6] J. NEUMANN, A certain zero-sum two-person game equivalent to the optimal assignment problem. *Contributions to theory of games*, Vol. 2.
- [7] B. A. RATTRAY—J. E. L. PECK, Infinite stochastic matrices, *Trans. Roy. Soc. Canada*, sect. III 49 (1955) 55—57.
- [8] D. G. KENDALL, On infinite doubly-stochastic matrices and Birkhoff's problem 111, *J. London Math. Soc.* 35 (1960) 81—84.
- [9] J. R. ISBELL, Birkhoff's Problem 111., *Proc. Am. Math. Soc.* 6 (1955) 217—218.
- [10] J. E. L. PECK, Doubly stochastic measures, *Michigan Math. Journ.* 6 (1959) 217—220.
- [11] P. RÉVÉSZ, A probabilistic solution of Birkhoff's problem 111. (in print).

(Beérkezett: 1961. III. 1.)

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézet