A RIEMANN-TÉR INTEGRÁLGEOMETRIÁJÁNAK NÉHÁNY PROBLÉMÁJÁRÓL

Írta: TEKSE KÁLMÁN

Bevezetés

Felületek integrálgeometriájának alapvető ideái W. BLASCHKE [1] és M. HAIMOVICI [1], [2] munkáiban vetődtek fel először, nevükhöz fűződnek e problémakör első eredményei is.

Felületeken általában nem létezik tranzitív mozgáscsoport, így itt a klasszikus értelemben vett integrálgeometriáról (pl. adott ponttérben bizonyos geometriai objektumok valamely halmazának lokálisan kompakt transzformációcsoporttal szemben invariáns mértékéről) nem beszélhetünk. E nehézségek áthidalására BLASCHKE egy kétméretű pozitív definit metrikájú felület geodetikus vonalainak kétparaméteres sokaságára (a felület egy adott tartományának minden pontján geodetikusok egyparaméteres serege halad át, miközben a felület azon részére szorítkozunk, amelyben a sokaság két görbéje legfeljebb egy pontban metszi egymást) olyan mérték bevezetését javasolta, amely invariáns: a) a felületi koordinátarendszer választásával szemben; b) a görbék paraméterezésével szemben. Az így definiált mérték és annak folyamányai nagyfokú hasonlóságot mutatnak a klasszikus integrálgeometria megfelelő eredményeivel.

W. BLASCHKE és M. HAIMOVICI gondolatainak kézenfekvő általánosítását adta L. SANTALÓ [1], akinek sikerült meghatározni az n-dimenziós pozitív definit metrikájú Riemann-tér geodetikus vonalai $2(n-1)$-méretű halmazának fenti értelemben invariáns mértékét.

E problémakör vizsgálatánál jogosan vetődik fel az a kérdés, hogy felületeken, geodetikusoktól különböző görbék halmazának milyen feltételek mellett létezik invariáns mértéke, továbbá, e mérték milyen tulajdonsággal rendelkezik. W. BLASCHKE és M. HAIMOVICI eredményeinek ilyen irányú általánosításaival Moszkvában P. K. RASEVSZKIJ, valamint tanítványai, elsősorban B. V. LESZOVOJ [1] és I. M. JAGLOM [1] foglalkoztak és jelentős eredményeket értek el. B. V. LESZOVOJ [1], a P. K. RASEVSZKIJ [1] által kidolgozott bimetrikus rendszerek elméletének felhasználásával azt kapta, hogy egy pozitív definit metrikájú kétméretű felület valamely S görbéi kétparaméteres halmazának akkor létezik a fenti értelemben vett invariáns mértéke, ha a felület egy tetszőleges rögzített P pontján áthaladó görbék adott P pontbeli görbülete azonos.

Jelen dolgozatban P. K. RASEVSZKIJ ösztönzésére arra a kérdésre igyekszünk választ adni, hogy milyen feltételek mellett általánosíthatók B. V. LESZOVOJ, illetve L. SANTALÓ eredményei az n-méretű V_n Riemann-tér esetére. A probléma vizsgálatát megnehezítette, hogy a bimetrikus rendszerek elméletének általánosítása már a trimetrikus rendszerek esetén is nehezen kezelhető eredményre vezetett. Ezért célszerűnek mutatkozott a kérdések kevésbé szemléletes, de egyszerűbb úton, más oldalról való megközelítése. Ugyanakkor a kapott eredményeket, mint az általános relativitás $(n+1)$-dimenziós terében, elektromágneses mezőben mozgó töltött részecskék pályáinak sűrűségét, fizikailag sikerült interpretálni. Eredményeink felhasználásával L. SANTALÓ [2] bizonyos integrálformulái általánosíthatók lettek a geodetikusoknál jóval általánosabb görbeosztályokra is.

Végül megjegyezzük, hogy a jelen dolgozatban tekintett görbékre és ezek vizsgált halmazára vonatkozóan a továbbiak során mindig feltételezzük a következőket: a) a V_n tér minden pontjában tetszőleges irányban a halmaznak egy és csak egy görbéje halad át; b) a V_n tér bizonyos pontjának olyan környezetére szorítkozunk, amelyben a halmaz tetszőleges két görbéjének legfeljebb egy közös pontja van.

1. Görbék halmazának mértéke n-méretű Riemann-térben

1. 1. A bevezetésben vázolt kérdések tisztázásához tekintsünk egy n-dimenziós V_n Riemann-teret. Az $x^1, x^2, \ldots, x^n$ lokális koordinátarendszerben a a tér pozitív definit metrikus formája legyen:

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{1.1}$$

ahol feltételezzük, hogy a

$$g_{ij} = g_{ij}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

szimmetrikus tenzor argumentumainak kétszer folytonosan differenciálható függvénye. Megjegyezzük, hogy (1. 1)-ben és a továbbiakban mindenütt, egy formulában egyidejűleg előforduló azonos alsó és felső indexek ezen index szerinti összegezést jelentenek, továbbá a latin kisbetűvel jelölt indexek az $1, 2, \ldots, n$, a görög kisbetűvel jelölt indexek az $1, 2, \ldots, 2(n-1)$ értékeket futják be, hacsak valamilyen külön megjegyzést nem teszünk.

Tekintsük most a V_n tér bizonyos S görbéinek valamely $2(n-1)$ paraméteres X halmazát, amelyre teljesülnek a Bevezetésben tett feltevések, és amelynek elemeit az

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2(n-1)}$$

paraméterek határozzák meg. Tegyük fel, hogy ezen S görbék az

$$x^i = x^i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2(n-1)}; t) \tag{1.2}$$

egyenletekkel vannak megadva, ahol az α_μ ($\mu=1,2,\ldots,2(n-1)$) paraméterek határozzák meg az X halmazhoz tartozó S görbét, t pedig a görbe menti paraméter. Ugyancsak feltesszük, hogy az $x^i(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2(n-1)};t)$, valamint a továbbiakban előforduló valamennyi függvény az összes változók szerint a szükséges rendszámig bezárólag folytonosan differenciálhatók és a V_n tér tekintett tartományára, valamint az X halmaz S görbéire fennálnak a bevezetés végén tett feltevések. Jelölje

$$\dot{x}^i=\dot{x}^i(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2(n-1)};t)$$

a V_n tér x^i pontján áthaladó tetszőleges S görbe érintővektorát, azaz

$$\dot{x}^i=\frac{dx^i}{dt}.$$

Az (1.1) formából kapott

$$\varphi=(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)^{1/2} \tag{1.3}$$

kifejezés segítségével az X halmaz minden görbéjére képezhetjük a

$$p_i=\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}^i} \tag{1.4}$$

mennyiségeket, ahol természetesen a p_i-k szintén az α_μ és a t paraméterek függvényei:

$$p_i=p_i(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2(n-1)};t) \tag{1.5}$$

és a szükségesnek megfelelően folytonosan differenciálhatók. Ily módon az (1.2) és az (1.5) függvényekből rögzített t paraméterérték mellett a következő differenciálformákat kaphatjuk:

$$dx^i=\frac{\partial x^i}{\partial\alpha_\mu}d\alpha_\mu, \tag{1.6}$$

$$dp_i=\frac{\partial p_i}{\partial\alpha_\mu}d\alpha_\mu.$$

A fentiek segítségével M. HAIMOVICI [2] eredményeinek analógiájára képezhetjük a

$$\underset{(2)}{dS}=[dx^idp_i]+f_{ij}[dx^idx^j] \tag{1.7}$$

külső formát,[1] ahol

$$f_{ij}=f_{ij}(x^1,\ldots,x^n;\ p_1,\ldots,p_n),$$

[1] Itt és a továbbiakban mindenütt, a szögletes zárójelekben álló differenciálformák e formák külső szorzatát jelentik. (Lásd pl. P. K. RASEVSZKIJ [2].)

melyekre fennáll

$$f_{ij}+f_{ji}=0,$$

és az összes változók szerint a szükséges rendszámig bezárólag folytonosan differenciálható függvények.

1. 2. Az elmondottak alapján a bevezetésben vázolt feladat megoldásának megközelítéséhez a V_n tér S görbéi tekintett X halmazának valamely kétparaméteres X_2 részhalmazát vizsgáljuk. Ebben az esetben feladatunk azon feltételek meghatározására szorítkozik, amelyeket halmazunk S görbéi egyenleteinek, valamint az $f_{ij}(x, p)$ függvényeknek ki kell elégíteniök ahhoz, hogy az (1.7) külső forma abszolút értékének integrálja invariáns legyen, ahol az integrálás kiterjesztendő az egész halmazra. Más szavakkal, meghatározandók a V_n tér 1. 1. pontban vázolt feltételeket kielégítő azon görbéi, amelyek kétméretű halmazára az (1.7) külső forma abszolút értéke invariáns lesz a lokális koordinátarendszerek, valamint a görbék paramétereinek transzformációival szemben. A továbbiakban először e feladat megoldásával foglalkozunk.

Mielőtt azonban rátérnénk e kérdés részletes vizsgálatára, megjegyezzük, hogy megfontolásainkban az S görbéket a szokásos $(x^1,\ldots,x^n;\ \dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^n)$ koordináták helyett az $(x^1,\ldots,x^n;\ p_1,\ldots,p_n)$ koordinátákkal fogjuk megadni. Itt formális nehézséget csupán az jelent, hogy a p_i mennyiségek nem függetlenek. Valóban (1. 3)-ból, mivel φ az $\dot{x}^i$ változókban elsőfokú homogén függvény, Euler tételének folyományaként kapjuk:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}^i}\dot{x}^i=\varphi.$$

Ebből $\dot{x}^i$ szerinti parciális differenciálással

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\dot{x}^i\partial\dot{x}^j}\dot{x}^i=0,$$

azaz

$$\operatorname{Det}\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial\dot{x}^i\partial\dot{x}^j}\right|=\frac{\partial(p_1,p_2,\ldots,p_n)}{\partial(\dot{x}^1,\dot{x}^2,\ldots,\dot{x}^n)}=0.$$

Az (1. 4) egyenletek tehát nem oldhatók meg az $\dot{x}^i$ változókra vonatkozóan. Mivel azonban egy adott S görbe érintőjének az irányát nem maguk az $(\dot{x}^1,\dot{x}^2,\ldots,\dot{x}^n)$ koordináták, hanem ezek aránya határozza meg, ezért a p_i mennyiségek jogosan vehetők az S görbe koordinátáinak.

E rövid kitérő után tekintsük a V_n térben az

$$x^i=x^i(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\ldots,\bar{x}^n)$$

egyenletekkel megadott koordinátatranszformációt, ahol az x^i-k argumentumaik folytonosan differenciálható függvényei. Ahhoz, hogy az (1. 7) forma e transzformációval szemben invariáns maradjon, az $f_{ij}(x,p)$ függvényekre teljesülniök kell az

$$f_{kl}(x,p)=\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l}-\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}\right)f_{ij}(\bar{x},\bar{p})$$

egyenlőségeknek.

Tegyük fel most, hogy a V_n tér S görbéi X halmazának X_2 részhalmazát az α_1,α_2 paraméterek határozzák meg. Ez esetben az (1.7) forma az (1.6) egyenletek felhasználásával a következő alakban írható:

$$(1.8)\qquad \underset{(2)}{dS}=\left(\frac{\partial x^i}{\partial \alpha_1}\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_2}-\frac{\partial x^i}{\partial \alpha_2}\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_1}\right)d\alpha_1 d\alpha_2+f_{ik}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \alpha_1}\frac{\partial x^k}{\partial \alpha_2}-\frac{\partial x^i}{\partial \alpha_2}\frac{\partial x^k}{\partial \alpha_1}\right)d\alpha_1 d\alpha_2.$$

E formának az S görbék paraméterezésével szemben invariáns volta azt jelenti, hogy a forma t paraméter szerinti variációja nulla:

$$\delta(\underset{(2)}{dS})=\left\{\left(\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_2]}+\frac{\partial x^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial \alpha_2]}\right)d\alpha_1 d\alpha_2+\dot{f}_{ik}\frac{\partial x^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial x^k}{\partial \alpha_2]}d\alpha_1 d\alpha_2+\right.$$

$$\left.+f_{ik}\left(\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial x^k}{\partial \alpha_2]}+\frac{\partial x^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \alpha_2]}\right)d\alpha_1 d\alpha_2\right\}\delta t=0,$$

azaz

$$(1.9)\ \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_2]}+\frac{\partial x^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial \alpha_2]}+\dot{f}_{ik}\frac{\partial x^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial x^k}{\partial \alpha_2]}+f_{ik}\left(\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial x^k}{\partial \alpha_2]}+\frac{\partial x^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \alpha_2]}\right)=0.$$

Itt a szögletes zárójelek az α_1 és α_2 paraméterek szerinti alternációt jelentenek, továbbá

$$\dot{f}_{ik}=\frac{\delta f_{ik}(x,p)}{\delta t}.$$

Felhasználtuk továbbá azt, hogy

$$\delta p_i=\frac{\partial p_i}{\partial t}\delta t=\dot{p}_i\delta t,$$

$$\delta x^i=\frac{\partial x^i}{\partial t}\delta t=\dot{x}^i\delta t.$$

A továbbiakban szükségünk lesz a V_n tér adott görbéjének főnormális vektorára, melynek μ_i komponenseit (1.3) felhasználásával a

$$(1.10)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^i}-\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}=\mu_i$$

egyenletekkel definiálhatjuk (lásd pl. EISENHART [1]). Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$(1.11)\qquad \mu_i=k_i+\psi(t)\dot{x}_i,$$

ahol k_i az S görbe első görbületének kovariáns vektora, $\dot{x}_i$ a görbe kovariáns érintővektora ($\dot{x}_i = g_{ij}\dot{x}^j$) és $\psi(t)$ a t paraméter olyan függvénye, amelyre $\psi(s)=0$, ha s a görbe ívhossza. Az érintővektorra merőleges k_i vektor hosszát a görbe első görbületének nevezik és k-val jelölik.

Ily módon (1. 4) és (1. 10) felhasználásával kapjuk:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^i} + \mu_i.$$

Mivel azonban

$$\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^i \partial \alpha_s}, \quad \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial \alpha_s} + \frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha_s} \qquad (s=1,2),$$

ezért fennáll

$$\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^i \partial \alpha_2]} + \frac{\partial x^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial \alpha_2]} + \frac{\partial x^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha_2]} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial[\alpha_1 \partial \alpha_2]} + \frac{\partial x^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha_2]},$$

ahol a szögletes zárójelek az α_1 és α_2 szerinti alternálást jelentik. Az alternálás folytán a jobb oldal első tagja nulla és így (1. 9)-ből kapjuk:

$$\frac{\partial x^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha_2]} + \dot{f}_{ik}\frac{\partial x^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial x^k}{\partial \alpha_2]} + f_{ik}\left(\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial x^k}{\partial \alpha_2]} + \frac{\partial x^i}{\partial[\alpha_1}\frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \alpha_2]}\right) = 0. \tag{1.12}$$

Mivel azonban

$$\mu_i = \mu_i(x, \dot{x}, t),$$

ezért

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial \mu_i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial \mu_i}{\partial \dot{x}^k}\frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \alpha_s} \qquad (s=1,2).$$

Így (1. 12)-ből következik, hogy

$$\left\{\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \mu_k}{\partial x^i}\right) + (\dot{f}_{ik} - \dot{f}_{ki})\right\}\frac{\partial x^i}{\partial \alpha_1}\frac{\partial x^k}{\partial \alpha_2} +$$
$$+\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial \dot{x}^k} + 2f_{ik}\right)\left(\frac{\partial x^i}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial x^i}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \alpha_1}\right) = 0.$$

Ezen egyenletek tetszőleges t paraméterezés mellett fennállnak, így speciálisan $t=s$ esetén is. Ez esetben (1. 11) következményeképpen

$$\mu_i = k_i,$$

tehát

$$\left\{\left(\frac{\partial k_i}{\partial x^k} - \frac{\partial k_i}{\partial x^i}\right) + (f'_{ik} - f'_{ki})\right\}\frac{\partial x^i}{\partial \alpha_1}\frac{\partial x^k}{\partial \alpha_2} +$$
$$+\left(\frac{\partial k_i}{\partial x'^k} + 2f_{ik}\right)\left(\frac{\partial x^i}{\partial \alpha_1}\frac{\partial x'^k}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial x^i}{\partial \alpha_2}\frac{\partial x'^k}{\partial \alpha_1}\right) = 0, \tag{1.13}$$

ahol a vesszők mindenütt ívhossz szerinti deriválást jelentenek. Bevezetve az

$$u^i = \frac{\partial x^i}{\partial \alpha_1}, \quad v^i = \frac{\partial x^i}{\partial \alpha_2}, \quad z^i = \frac{\partial x'^i}{\partial \alpha_1}, \quad w^i = \frac{\partial x'^i}{\partial \alpha_2}$$

jelöléseket, továbbá u^i és v^i lineáris függetlenségét felhasználva (ami következik abból, hogy az X_2 halmazt tetszőlegesen választottuk), (1. 13)-ból

$$f'_{[i,j]} = \frac{\partial k_j}{\partial x^i} - \frac{\partial k_i}{\partial x^j} \tag{1.14}$$

adódik, ahol $[i, j]$ az i, j indexek szerinti alternálást jelenti. Másrészről azonban

$$A_{ij}(u^i z^j - v^i w^j) = 0, \tag{1.15}$$

ahol A_{ij} az (1. 13) kifejezés második tagjának együtthatója. Figyelembe kell vennünk továbbá azt is, hogy x'^i egységvektor:

$$g_{ij} x'^i x'^j = 1,$$

és következésképpen, előbbi jelöléseink felhasználásával pl.:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} u^k x'^i x'^j + 2x'_j z^j = 0. \tag{1.16}$$

Így az (1. 15) egyenletnek (1. 16) következményének kell lenni, azaz

$$A_{ij}(u^i z^j - v^i w^j) + \lambda \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} x'^i x'^j u^k + 2x'_j z^j \right) = 0$$

azonosan fennáll, ahol λ tetszőleges konstans. Ez az u^k független változókban lineáris egyenlet, amiből

$$A_{kj} z^j + \lambda \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} x'^i x'^j = 0,$$

$$A_{ij} v^i w^j - 2\lambda x'_j z^j = 0$$

következik, ahonnan

$$A_{ij} = \frac{\partial k_i}{\partial x'^j} + 2f_{ij} = 0.$$

Ebből

$$f_{[i,j]} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial k_j}{\partial x'^i} - \frac{\partial k_i}{\partial x'^j} \right), \tag{1.17}$$

ahol $[i, j]$ az i és j indexek szerinti alternálást jelenti. Következésképpen az (1. 7) külső forma akkor és csak akkor lesz a Bevezetésben vázoltak értelmében invariáns, ha az f_{ij} függvényekre és az S görbékre fennállnak az (1. 14) és (1. 17) egyenletek.

Mivel f_{ij} antiszimmetrikus függvény, (1. 17)-ből könnyen adódik, hogy

$$\frac{\partial k_i}{\partial x'^j}+\frac{\partial k_j}{\partial x'^k}=0,$$

amiből:

$$\frac{\partial^2 k_i}{\partial x'^j \partial x'^l}=0,$$

azaz k_i az x'^i változók lineáris függvénye, tehát

$$k_i(x, x')=F_{ij}x'^j+B_i. \tag{1.18}$$

Itt (1. 17) folyományaként az F_{ij} függvények szintén antiszimmetrikus függvények:

$$F_{ij}=F_{ij}(x), \quad F_{ij}+F_{ji}=0,$$

továbbá

$$B_i=B_i(x).$$

Másrészről

$$f'_{ij}=\frac{\delta f_{ij}}{\delta s}=\frac{\partial f_{ij}}{\partial x^l}x'^l+\frac{\partial f_{ij}}{\partial x'^l}x''^l,$$

és

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x'^l}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 k_i}{\partial x'^j \partial x'^l}=0,$$

azért (1. 14) és (1. 18) alapján fenn kell állniok a következő egyenlőségeknek:

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^l}x'^l=\left(\frac{\partial F_{il}}{\partial x^j}-\frac{\partial F_{jl}}{\partial x^i}\right)x'^l+\left(\frac{\partial B_i}{\partial x^j}-\frac{\partial B_j}{\partial x^i}\right),$$

azaz

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^l}+\frac{\partial F_{jl}}{\partial x^i}-\frac{\partial F_{il}}{\partial x^j}=0,$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial x^j}-\frac{\partial B_j}{\partial x^i}=0.$$

Így F_{ij} valamely vektormező rotációja, B_i pedig valamely skalármező gradiense.

Végül, mivel x'^i egységvektor,

$$p_i=g_{ij}x'^j=x'_i. \tag{1.19}$$

Így (1. 7) és (1. 17) alapján kapjuk, hogy a V_n tér S görbéi X_2 halmazára a

$$\underset{(2)}{dS}=[dx^i dx'_i]+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial k_j}{\partial x'^i}-\frac{\partial k_i}{\partial x'^j}\right)[dx^i dx^j] \tag{1.20}$$

külső forma invariáns lesz a) a V_n tér koordinátatranszformációival, illetve b) az S görbék paraméterezésével szemben.

Az (1.20) kifejezés abszolút értékét a V_n tér S görbéi X_2 kétparaméteres halmaza *sűrűségének* nevezzük. Ezzel a jelen pont elején felvetett problémát megoldottuk, nevezetesen bebizonyítottuk a következő tételt:

1. TÉTEL: *A V_n tér feltételeinket kielégítő S görbéi valamely $2(n-1)$ méretű X halmazának kétparaméteres X_2 részhalmaza akkor és csak akkor rendelkezik* (1.7) *alakú invariáns sűrűséggel, ha az S görbe főnormális vektora* (1.18) *alakú, ahol F_{ij} valamely vektormező rotációja, B_i valamely skalármező gradiense, az f_{ij} antiszimmetrikus függvény pedig* (1.17) *alakú.*

Az (1.20) külső formának az X_2 halmazra, azaz e halmaznak megfelelő α_1, α_2 paraméterértékekre kiterjesztett integrálja a fent vázolt értelemben szintén invariáns. Ez az integrál a V_n tér S görbéi X_2 halmazának *integrálgeometriai mértéke.*

1.3. Az elmondottakból világos, hogy a V_n tér fenti feltételeket kielégítő S görbéi X halmazának bármely $2m$-paraméteres X_{2m} részhalmaza (ahol $m<n$) szintén rendelkezik invariáns sűrűséggel, amelyet a

$$(1.21)\qquad \underset{(2m)}{dS} = \left\{[dx^i dx_i'] + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial k_j}{\partial x'^i} - \frac{\partial k_i}{\partial x'^j}\right)[dx^i dx^j]\right\}^m$$

külső forma abszolút értéke szolgáltatja, ahol a hatványozás mint ismételt külső szorzás értendő. Következésképpen fennáll a

2. TÉTEL. *A V_n Riemann-tér 1. tétel feltételeit kielégítő S görbéi $2(n-1)$-paraméteres X halmazának bármely $2m$-paraméteres X_{2m} részhalmaza* ($m<n$) *rendelkezik* (1.7) *típusú invariáns sűrűséggel, amelyet az* (1.21) *külső forma abszolút értéke szolgáltat.*

E sűrűségnek az X_{2m} halmazra, azaz e halmaznak megfelelő $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m}$ paraméterértékekre kiterjesztett

$$(1.22)\qquad M(X_{2m}) = \int_{X_{2m}} \left\{[dx^i dx_i'] + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial k_j}{\partial x'^i} - \frac{\partial k_i}{\partial x'^j}\right)[dx^i dx^j]\right\}^m$$

integrálját az X_{2m} halmaz *integrálgeometriai mértékének* nevezzük.

1. KOROLLÁRIUM. Abban a speciális esetben, amikor a vizsgált S görbék a V_n Riemann-tér Γ geodetikus vonalai, tehát amelyekre $k_i \equiv 0$, a 2. tétel feltételei triviálisan teljesülnek és akkor (1.21) sűrűség az egyszerű

$$\underset{(2m)}{d\Gamma} = \{[dx^i dx_i']\}^m \qquad (m<n)$$

formát veszi fel. Ennek abszolút értéke $m=n-1$ esetben a V_n tér Γ geodetikusai X halmazának L. SANTALÓ által bevezetett invariáns sűrűségét adja.

2. KOROLLÁRIUM. Speciálisan, $n=2$ esetén, amikor az X_2 kétparaméteres görbesereg egy kétméretű felületen fekszik, az (1.21) formulából a halmaz sűrűségére (1.19) felhasználásával a

$$(1.23)\qquad \underset{(2)}{dS} = [dx^1 dp_1] + [dx^2 dp_2] - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial k_1}{\partial x'^2} - \frac{\partial k_2}{\partial x'^1}\right)[dx^1 dx^2]$$

formát kapjuk, amely (1.18) figyelembevételével a következő alakra hozható:

$$\underset{(2)}{dS} = [dx^1 dp_1] + [dx^2 dp_2] - F_{12}(x)[dx^1 dx^2].$$

Esetünkben azonban

$$F_{12}(x) = k(x)\cdot O_{12}(x),$$

ahol $k=k(x)$ az S görbék geodetikus görbülete, O_{ij} pedig a helytől függő ortogonális matrix, amely a görbe érintőegységvektorát a geodetikus normális egységvektorába viszi át. Könnyű azonban belátni, hogy

$$O_{12}(x) = \sqrt{g} = (\mathrm{Det}\,|g_{ij}|)^{1/2} \qquad (i, j = 1, 2),$$

és így az (1.23) sűrűség a következő, B. LESZOVOJ [1] által kapott alakot veszi fel:

$$(1.24)\qquad \underset{(2)}{dS} = [dx^1 dp_1] + [dx^2 dp_2] - k(x)\sqrt{g}\,[dx^1 dx^2].$$

Ha ezen a felületen egy geodetikus polárkoordinátarendszert tekintünk, amelyben a felület metrikus formája

$$ds^2 = d\varrho^2 + g(\varrho, \theta)\cdot d\theta^2,$$

ahol θ a koordinátarendszer O kezdőpontján és a felület egy tetszőleges P pontján áthaladó geodetikus vonal rögzített iránnyal bezárt szöge, ϱ pedig P-nek O-tól vett geodetikus távolsága, akkor egyszerű számolással adódik, hogy (1.24) e polárkoordinátarendszerben a

$$\underset{(2)}{dS} = \left(\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\varrho} - k\sqrt{g}\right)[d\varrho\, d\theta]$$

alakot veszi fel, amely L. SANTALÓ [2] formulájának általánosítása a felület $k=k(x)$ geodetikus görbületű S görbéinek kétparaméteres sokaságára.

MEGJEGYZÉS. A V_n Riemann-tér S görbéire kapott (1.10), (1.11), (1.18) differenciálegyenletrendszert (melynek teljesülése esetén az S görbék $2(n-1)$-paraméteres X halmaza bármely $2m$-paraméteres X_{2m} részhalmazának létezik (1.21) alakú invariáns sűrűsége, amely tehát meghatározza a kérdéses görbesokaságot), általános esetben nem könnyű megoldani. Néhány speciális esetben előállítottuk ezen megoldásokat, amelyek leírására azonban itt nem térhetünk ki. Csupán megjegyezzük, hogy az n-dimenziós euklideszi tér esetén e megoldások pl. a csavarvonal bizonyos általánosításait képező görbék halmazához vezettek.

2. Görbék halmazának mértéke mint mechanikai rendszerek Poincaré-féle integrálinvariánsa

A továbbiakban megmutatjuk, hogy a V_n Riemann-térnek a 2. tétel feltételeit kielégítő S görbéi $2m$-paraméteres X_{2m} halmaza $(m<n)$ (1.22) invariáns mértékének érdekes és fontos mechanikai interpretáció adható. Nevezetesen bebizonyítjuk, hogy az E. CARTAN (lásd pl. [1]) által tanulmányozott Poincaré-féle integrálinvariánsok a már vizsgáltaknál jóval általánosabb mechanikai rendszerek trajektóriáira is léteznek és bizonyos esetekben lényegében az (1.22) invariáns integrállal azonosak. Az integrálgeometria tételeinek ilyen interpretációja lehetővé teszi a kapott eredmények alkalmazását az analízis és a mechanika számos problémájának vizsgálatánál.

2. 1. Az (1.22) invariáns integrál fizikai tartalmának tisztázásához tegyük fel, hogy m_0 nyugalmi tömegű és e egységnyi töltésű töltött részecske mozog az $(n+1)$-dimenziós eseménytér gravitációs erőterében (az általános relativitáselmélet $(n+1)$-dimenziós terében) elektromágneses mezőben. Tegyük fel továbbá, hogy terünk, amelyet egy tetszőleges T koordinátarendszer $x^1, x^2, \ldots, x^n, x^{n+1}$ eseménykoordinátáira vonatkoztatunk, $g_{ij}=g_{ij}(x^1, \ldots, x^{n+1})$ tenzormezővel adott V_{n+1} Riemann-tér, ahol

$$\operatorname{Det}|g_{ij}| \neq 0, \quad g_{ij}=g_{ji},$$

és, mint e pontban mindenütt, ha külön megjegyzést nem teszünk, a latinbetűs indexek az $1, 2, \ldots, n+1$ értékeket futják be. Ez esetben a tekintett pont mozgását a térben egy görbe írja le, amelynek egyenlete

$$x^i = x^i(x^{n+1}) \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{2.1}$$

alakban írható (ahol paraméterként az x^{n+1} koordinátát használjuk). A töltött részecske mozgását a V_{n+1} térben leíró görbét e részecske trajektóriájának nevezik. E trajektória mentén történő „végtelen kis" elmozdulás koordinátáit dx^i $(i=1, 2, \ldots, n+1)$ differenciálokkal jelöljük. Ugyanakkor a V_{n+1} tér elektromágneses mezejét meghatározó vektorpotenciál komponenseinek jelölésére A_i $(i=1, \ldots, n)$, a mező skalárpotenciáljának jelölésére $\overline{\varphi}$ szimbólumokat vezetjük be.

A relativitáselméletben általában az x^{n+1} paraméter helyett olyan τ paraméter használatos, amelynek differenciálja a trajektória íveleme (ún. sajátidő a trajektória mentén):

$$d\tau = \sqrt{g_{ij}\,dx^i dx^j}.$$

A trajektória érintővektora, amelynek komponenseit x'^i-vel jelöljük, a következő:

$$x'^i = \frac{dx^i}{d\tau}. \tag{2.2}$$

(Ezentúl vesszővel jelöljük a trajektória ívhossza szerinti deriválást.)

A fenti jelölések felhasználásával a tekintett pont valóságos trajektóriája a V_{n+1} tér két adott (a τ paraméter τ_0 és τ_1 értékéhez tartozó) pontját összekötő összes lehetséges görbék közül éppen az a görbe lesz, amelyre az

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} L^{(\tau)} d\tau$$

integrál stacionáris, azaz, amelyre ezen integrál valóságos trajektória menti első variációja nulla:

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} L^{(\tau)} d\tau = 0.$$

Ezen integrálokban $L^{(\tau)}$ az x^i és x'^i változók valamely invariáns függvénye és az adott mechanikai rendszer Lagrange-függvényének nevezik. Ennél a felső τ index azt jelenti, hogy a függvényt a τ paraméterre vonatkoztattuk. Ismeretes, hogy a fenti feltételből következik, miszerint a tekintett pont trajektóriájára fennállnak a következő, ún. Euler—Lagrange-féle differenciálegyenletek:

$$\text{(2. 3)} \qquad \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L^{(\tau)}}{\partial x'^i} - \frac{\partial L^{(\tau)}}{\partial x^i} = 0.$$

Ismeretes továbbá, hogy a V_{n+1} tér általunk tekintett mechanikai rendszerének Lagrange-féle függvénye (2. 2) felhasználásával

$$\text{(2. 4)} \qquad L^{(\tau)} = -m_0 c^2 \sqrt{g_{ij} x'^i x'^j} + \frac{e}{c} \varphi_i x'^i$$

alakban írható (lásd pl. BERGMAN: [1]), ahol a φ_i-k az $(A_i, \overline{\varphi})$ kovariáns világvektor komponensei, c konstans pedig a fénysebesség.

Feltesszük most, hogy a vizsgált elektromágneses mezőre vonatkozó φ_i vektor csak a hely függvénye és független az iránytól, azaz $\varphi_i = \varphi_i(x)$ és bevezetjük az

$$\frac{e}{c} \varphi_i = V_i(x)$$

jelöléseket, továbbá az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $m_0 = 1$. Ekkor $L^{(\tau)}$ függvény a következő alakban írható:

$$\text{(2. 4)} \qquad L^{(\tau)} = -(c^2 \sqrt{g_{ij} x'^i x'^j} - V_i(x) x'^i).$$

A

$$\text{(2. 5)} \qquad p_k = \frac{\partial L^{(\tau)}}{\partial x'^k} = -\frac{c^2 g_{ik} x'^i}{\sqrt{g_{ij} x'^i x'^j}} - V_k(x)$$

mennyiséget a rendszer k-ik *impulzusának* nevezzük és az ennek analógiájára képzett

$$p_k = -\frac{c^2 g_{ik} x'^i}{\sqrt{g_{ij} x'^i x'^j}} \tag{2.6}$$

mennyiségek az elektromágneses mezőtől mentes rendszer Lagrange-függvényéből számított impulzus komponensei.

Ezek alapján a (2.5) mennyiségek felhasználásával a V_{n+1} tér fenti trajektóriái $2(n-1)$-paraméteres X halmaza tetszőleges kétparaméteres részhalmazára, POINCARÉ eljárását követve, képezhetjük a

$$\underset{(2)}{dS} = [dx^i d\tilde{p}_i],$$

vagy általánosabban az X halmaz tetszőleges $2m$-paraméteres X_{2m} $(m<n)$ részhalmazára a

$$\underset{(2m)}{dS} = \{[dx^i d\tilde{p}_i]\}^m \qquad (m<n) \tag{2.7}$$

külső formákat. E külső forma

$$M(X_{2m}) = \int_{X_{2m}} \{[dx^i d\tilde{p}_i]\}^m$$

integrálja (ahol az integrálás kiterjesztendő a rendszer fázisterének adott $2m$-méretű sokaságára) LIOUVILLE ismert tétele folytán (lásd pl. L. LANDAU—E. LIFSIC, [1]) invariáns marad a sokaság pontjainak — a tekintett részecskék mozgásegyenleteinek megfelelő — időbeni elmozdulásaival szemben. Ez azonban éppen azt jelenti, hogy rendszerünk trajektóriái X halmaza tetszőleges $2m$-paraméteres X_{2m} részhalmazának létezik (a Bevezetésben vázoltaknak megfelelő értelemben) invariáns mértéke. Természetesen, mint a rendszer Lagrange-függvényének (2.4) alakjából is kitűnik, a fentiek csupán a $V_i \equiv 0$ esetben, azaz, ha elektromágneses mező nem lép fel, jelentenek a V_{n+1} tér „geodetikus vonalai" halmazára vonatkozó invariáns mértéket.

2.2. A továbbiakban megmutatjuk, hogy a V_{n+1} térben töltött részecskék trajektóriái X halmazának valamely X_{2m} részhalmazára kapott (2.7) alakú invariáns sűrűség lényegében megegyezik az előző pontban a Riemann-tér feltételeinket kielégítő S görbéinek $2m$-paraméteres halmazára definiált invariáns sűrűséggel. Ehhez a részecskék trajektóriáira kapott (2.3) differenciálegyenletrendszert a mechanikai rendszer (2.4) Lagrange-függvényének felhasználásával a következő alakban írjuk:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L^{(\tau)}}{\partial x'^k} - \frac{\partial L^{(\tau)}}{\partial x^k} = \left\{\frac{d}{d\tau}\frac{\partial(c^2\sqrt{g_{ij}x'^i x'^j})}{\partial x'^k} - \frac{\partial(c^2\sqrt{g_{ij}x'^i x'^j})}{\partial x^k}\right\} -$$

$$-\left\{\frac{d}{d\tau}\frac{\partial V_i x'^i}{\partial x'^k} - \frac{\partial V_i x'^i}{\partial x^k}\right\} = 0.$$

A továbbiakban célszerű bevezetni a következő jelöléseket:

$$Q_k = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial(c^2\sqrt{g_{ij}x'^i x'^j})}{\partial x'^k} - \frac{\partial(c^2\sqrt{g_{ij}x'^i x'^j})}{\partial x^k},$$

ahol a $Q_k = Q_k(x, x')$ függvények a részecskékre ható potenciálmentes erőkomponensei. Ily módon az előzőekből kapjuk:

$$Q_k = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial V_i x'^i}{\partial x'^k} - \frac{\partial V_i x'^i}{\partial x^k} = \left(\frac{\partial V_k}{\partial x^i} - \frac{\partial V_i}{\partial x^k}\right)x'^i, \tag{2.8}$$

azaz Q_k-k az x'^i változók lineáris függvényei:

$$Q_k = F_{ki}x'^i, \tag{2.9}$$

ahol (2. 8) folyományaként

$$F_{ki} = F_{ki}(x), \quad F_{ki} + F_{ik} = 0.$$

Másrészről a (2. 8), valamint a (2. 6) jelölések figyelembevételével (2. 5)-ből kapjuk:

$$\tilde{p}_i = p_i - V_i,$$

azaz

$$d\tilde{p}_i = dp_i - dV_i = dp_i - \frac{\partial V_i}{\partial x^j}dx^j.$$

Ily módon a (2. 7) külső forma a következő alakban írható:

$$\underset{(2m)}{dS} = \left\{[dx^i dp_i] - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x^j} - \frac{\partial V_j}{\partial x^i}\right)[dx^i dx^j]\right\}^m \qquad (m < n). \tag{2.10}$$

(2. 8) és (2. 9) felhasználásával (2. 10)

$$\underset{(2m)}{dS} = \left\{[dx^i dp_i] - \frac{1}{2}F_{ij}[dx^i dx^j]\right\}^m \qquad (m < n)$$

alakot vesz fel. E külső forma abszolút értéke tehát V_{n+1} térben, töltött részecskék trajektóriái $2m$-paraméteres X_{2m} halmazának invariáns sűrűségeként tekinthetők. E forma integrálja:

$$M(X_{2m}) = \int\left\{[dx^i dp_i] - \frac{1}{2}F_{ij}[dx^i dx^j]\right\}^m \qquad (m < n), \tag{2.11}$$

ahol az integrálás az egész X_{2m} halmazra kiterjesztendő, a tekintett mechanikai rendszer Poincaré-féle integrálinvariánsa lesz. A (2. 11) integrálokat az (1. 22) kifejezésekkel összehasonlítva, (2. 8), (1. 10) és (1. 18) figyelembevételével kapjuk a következő tételt:

3. TÉTEL. *Az általános relativitáselmélet V_{n+1} terében, elektromágneses mezőben (melynek vektor és skalárpotenciáljai csak a hely függvényei) mozgó*

töltött részecskék trajektóriái $2(n-1)$-paraméteres X halmaza bármely $2m$-paraméteres X_{2m} részhalmazának $(m<n)$ létezik invariáns mértéke (a rendszer Poincaré-féle integrálinvariánsa), amelyet a (2. 11) *integrál szolgáltat. Ez a mérték lényegében azonos a 2. tétel feltételeit kielégítő S görbék $2m$-paraméteres X_{2m} halmazának invariáns mértékével.*

Megjegyezzük, hogy az elmondottak $n=3$ esetén (amikor V_4 pszeudoriemann-tér) reális fizikai tartalommal rendelkeznek. A fentiekből ugyanakkor az is világos, hogy az integrálgeometriában Riemann-tér esetén tekintett és feltételeinket kielégítő görbék halmazára vonatkozó invariáns mértékek létezése lényegében a mechanika variációs elvének következménye.

3. A kapott eredmények alkalmazásai

Ahhoz, hogy az 1. tétel feltételeit kielégítő görbék sűrűségének kifejezéséből e görbékre vonatkozó integrálformulákat nyerjünk, tegyük fel, hogy adott a V_n térben e görbék $2(n-1)$-paraméteres halmaza. E halmaz (1. 21) invariáns sűrűsége részletesen kiírva, a következő alakú:

$$\underset{(2(n-1))}{dS} = \sum_i [dx^1 dp_1 \dots dx^{i-1} dp_{i-1} dx^{i+1} dp_{i+1} \dots dx^n dp_n] + \sum_{i,j} f_{ij} [dx^1 \dots dx^n dp_1 \dots dp_{i-1} dp_{i+1} \dots dp_{j-1} dp_{j+1} \dots dp_n]. \tag{3. 1}$$

Tekintsük most a V_n tér egy rögzített $(n-1)$-dimenziós V_{n-1} hiperfelületét és a fenti feltételeket kielégítő, V_{n-1} felületet metsző S görbéinek halmazát. E halmaz egyik eleme legyen a V_{n-1}-et adott P_0 pontban $(P_0 \in V_{n-1})$ metsző S_0 görbe. Ekkor P_0 elég kis környezetében bevezethető olyan koordinátarendszer, amelyben V_{n-1} egyenlete

$$x^n = 0$$

alakban írható. Mivel azonban a (3. 1) forma invariáns az S görbék paraméterezésével szemben, azért az S_0 görbén a V_{n-1} felülettel való P_0 metszéspont szabadon megválasztható. Ezért feltehetjük, hogy

$$x^n = 0, \quad dx^n = 0,$$

és így (3. 1) a következő alakban írható:

$$\underset{(2(n-1))}{dS} = [dx^1 dp_1 \dots dx^{n-1} dp_{n-1}]. \tag{3. 2}$$

(A (3. 1) forma többi tagjaiban mindenütt szerepel dx^n, ezért a tagok nullák.)

Ily módon megállapíthatjuk, hogy az általunk tekintett speciális esetben a halmaz S görbéinek görbülete nem játszik szerepet a sűrűség kifejezésében.

Ez érthető, hiszen ekkor a V_{n-1} környezetében az S görbék halmaza lényegében ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkezik, mint a geodetikusok halmaza.

Ily módon (3. 2) felhasználásával az 1. tétel feltételeit kielégítő, a geodetikus vonalaknál jóval általánosabb görbék halmazára könnyen bizonyíthatók az integrálgeometria bizonyos Crofton-típusú tételei.

Így pl. bizonyítható, hogy ha V_{n-1} a V_n Riemann-tér egyszerű és zárt hiperfelülete konvex az S görbék halmazára nézve (a V_{n-1}-et metsző görbének vagy két pontja, vagy egy összefüggő ívdarabja közös V_{n-1}-gyel) és véges V térfogattal rendelkezik, akkor a V_{n-1}-et metsző S görbék mértéke arányos V-vel.

Az S görbék invariáns sűrűségének (1. 22) kifejezéséből egy sor integrálformula nyerhető, amelyek részben SANTALÓ [2] geodetikus vonalak halmazára kapott bizonyos tételeinek általánosításai, részben további Crofton-típusú tételekre vezetnek. E kérdésekre a későbbiekben még visszatérünk.

Befejezésül köszönetemet szeretném kifejezni P. K. RASEVSZKIJ professzornak a fenti vizsgálatok közben adott értékes tanácsaiért.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] W. BLASCHKE, Integralgeometrie 11. Zur Variationsrechnung, *Hamburger Abhandlungen* 11 (1936) 359—366.

[1] P. G. BERGMANN, *Introduction to the theory of relativity, 1958.*

[1] E. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux,* Paris, 1922.

[1] L. P. EISENHART, *Riemannian geometry,* Princeton, 1926.

[1] M. HAIMOVICI, Géométrie intégrale sur les surfaces courbes, *C. R. Acad. Sci., Paris* **203** (1936) 230—232.

[2] M. HAIMOVICI, Géométrie intégrale sur les surfaces courbes, *Ann. Sci. de l'Univ. de Jassy,* **24** (1936) 57—74.

[1] I. M. JAGLOM, Тангенциальная метрика в друпараметрическом семействе кривых на плоскости. Труды сем. по Векторному и Тензорному Анализу, **7** (1949) 341—361.

[1] B. V. LESZOVOJ, Мера площади в друпараметрическом семействе кривых на поверхности. Труды сем. по Векторному и Тензорному Анализу **6** (1948) 447—493.

[1] P. K. RASEVSZKIJ, Полиметрическая геометрия, Труды сем. по Векторному и Тензорному Анализу **5** (1941) 21—147.

[2] P. K. RASEVSZKIJ, Геометрическая теория уравнений с частными производными, Москва—Ленинград, 1947.

[1] L. A. SANTALÓ, Integral geometry in general spaces, *Proc. International Congress of Math. Cambridge,* 1950.

[2] L. A. SANTALÓ, Integral geometry on surfaces. *Duke Math. J.* **16** (1949) 361—375.

(Beérkezett: 1961. V. 11)