EGYDIMENZIÓS VÉLETLEN TÉRKITÖLTÉS VÁLTOZÓ HOSSZÚSÁGÚ SZAKASZOKKAL

Írta: BÁNKÖVI GYÖRGY és DOBÓ ANDOR

Bevezetés

Véletlen térkitöltési problémák felmerülnek számos gyakorlati területen (szemcsés anyagok raktározása, autók parkolása stb.), valamint az elméleti fizikában, például folyadékok strukturális felépítésének vizsgálata során.

Ezek egzakt matematikai tárgyalása általában igen nehéz, konkrét eredmények is csak néhány speciális esetben ismeretesek. Ilyen speciális esetet tárgyal RÉNYI ALFRÉD [1] dolgozatában, ahol a probléma a következő: a $(0, x)$ intervallumra találomra ráhelyezünk egységnyi szakaszokat úgy, hogy azoknak ne legyen egymással közös pontjuk. Az elhelyezést addig folytatjuk, míg a szabad helyek közül a legnagyobb hossza sem haladja meg az egységet. Meghatározandó az ily módon elhelyezhető intervallumok összhosszának (számának) várható értéke. Ezt a mennyiséget $M(x)$-szel jelölve, a szerző azt az eredményt kapta, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{M(x)}{x} = \int_0^\infty \exp\left\{-2\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right\} dt = 0{,}748\ldots$$

Ennek a modellnek n dimenziós általánosításait vizsgálta PALÁSTI ILONA [2]. BÁNKÖVI GYÖRGY [3] dolgozatában megmutatta, hogy egydimenziós véletlen térkitöltési modelleken alapuló Monte Carlo-módszerek segítségével hogyan számíthatók ki bizonyos típusú bonyolult integrálok.

Jelen dolgozatunkban olyan egydimenziós problémákat vizsgálunk, amelyeknél a szakaszoknak nemcsak elhelyezése, hanem hossza is a véletlentől függ. Ezek a problémák általában jóval bonyolultabbak, mint azok, amelyek az állandó hosszúságú szakaszok esetén fellépnek. Az általunk tárgyalt két modell közül az egyszerűbbel (1. modell) az 1—3. §-okban foglalkozunk; itt az [1] dolgozatban vizsgált esetet olyan értelemben általánosítjuk, hogy az elhelyezendő szakaszok hosszát valószínűségi változónak tekintjük, míg a kezdeti feltétel ugyanaz marad (1-nél kisebb „szabad helyre" nem helyezhető el szakasz). A 4—5. §-okban az 1. modellt továbbfejlesztjük (2. modell), oly módon, hogy a kezdeti feltételt is megváltoztatjuk (az 1-nél kisebb „hézagokat" is kitöltjük). A 6. §-ban eredményeink egy gyakorlati alkalmazási lehetőségére mutatunk rá, míg a 7. §-ban a Monte Carlo-módszerrel elvégzett kísérletek eredményét ismertetjük.

Érdekes, bár kétségtelenül nehéz probléma modelleink többdimenziós megfelelőinek tárgyalása, amely a [2] dolgozat eredményeinek továbbfejlesztésével talán lehetővé válik. Megemlítjük még, hogy kapott eredményeink a [3] dolgozatban tárgyalt Monte Carlo-módszerrel könnyen kiszámítható integrálok osztályát bővítik.

1. §. Az egydimenziós véletlen térkitöltési probléma 1. modellje

Legyen η valószínűségi változó, értelmezve a $[h, 1]$ intervallumon $(h>0)$. Jelölje $F(y)$ η eloszlásfüggvényét.

A $(0, x)$ intervallumon véletlenszerűen helyezzünk el $y_1, y_2, \ldots, y_n \ldots$ hosszúságú szakaszokat, ahol y_i $(i = 1, 2, \ldots)$ η értékeire vonatkozó sorozatos független megfigyelések eredményei. Az elhelyezést az alábbiak szerint végezzük:

1. modell:

1.° Ha $0 \leqq x \leqq 1$, akkor a $(0, x)$ intervallumra nem helyezünk el szakaszt.

2.° Ha $x > 1$, helyezzük el az első, y_1 hosszúságú szakaszt úgy, hogy a szakasz baloldali végpontja — amelyet τ-val jelölünk — a $(0, x - y_1)$ intervallumon egyenletes eloszlású legyen.

3.° Tekintsük a $(0, \tau)$ és $(\tau + y_1, x)$ „szabad intervallumok" közül a nagyobbikat. Amennyiben az 1-nél hosszabb, helyezzük el rajta az y_2 szakaszt 2.°-nek megfelelően (azaz a szakasz baloldali végpontja az y_2-vel jobbról megrövidített szabad intervallumon egyenletes eloszlású legyen).

4.° Válasszuk ki a $(0, x)$ intervallumon az y_1 és y_2 elhelyezése után kapott legnagyobb szabad intervallumot, amennyiben ez 1-nél hosszabb, helyezzük el rajta az y_3 szakaszt az előbbieknek megfelelően[1], és így tovább.

5.° Az eljárás akkor ér véget, ha a leghosszabb szabad intervallum sem nagyobb 1-nél.

Az ilyen módon elhelyezhető szakaszok összhossza nyilván valószínűségi változó; jelöljük ezt ξ_x-szel és várható értékét $M(x)$-szel.[2] Az elhelyezési

[1] Megjegyezzük, hogy a modell matematikai tárgyalása ugyanarra az eredményre vezet (1. (1'') egyenlet), ha az elhelyezés sorrendjét nem az 1-nél hosszabb szabad intervallumok nagysága, hanem tetszőleges, de előre megállapított szabályok határozzák meg. (Pl. mindig a balról első, vagy pedig találomra kiválasztott szabad helyre tesszük a következő elhelyezendő szakaszt.)

[2] $M(x)$ természetesen függ η eloszlásától is, ezt azonban külön nem jelöljük.

eljárásból következik, hogy $M(x)$ kielégíti az

$$(1)\qquad M(x+1)=2\int_h^1 \frac{1}{x+1-y}\int_0^{x+1-y} M(t)\,dt\,dF(y)+\int_h^1 y\,dF(y)\qquad (x>0)$$

függvényegyenletet, valamint az

$$(2)\qquad M(x)=0\qquad (0\leqq x\leqq 1)$$

kezdeti feltételt, ahol $F(y)$ a $[h, 1]$ intervallumon értelmezett tetszőleges, de egy adott elhelyezés folyamán rögzített eloszlásfüggvény, (2) az 1.° következménye, (1) pedig az alábbi módon vezethető le:

Ha $M(x+1|y;t)$ jelenti a ξ_{x+1} valószínűségi változó feltételes várható értékét az $y_1=y$ $(h\leqq y\leqq 1)$ és $\tau=t$ $(0\leqq t\leqq x+1-y)$ feltétel mellett, akkor

$$M(x+1|y;t)=M(t)+M(x+1-t-y)+y\qquad (x>0).$$

Minthogy t a $(0, x+1-y)$ intervallumban egyenletes eloszlású, az

$$M(x+1|y)=\frac{1}{x+1-y}\int_0^{x+1-y} M(x+1|y;t)\,dt=\frac{2}{x+1-y}\int_0^{x+1-y} M(t)\,dt+y$$

és

$$M(x+1)=\int_h^1 M(x+1|y)\,dF(y)$$

összefüggésekből (1) már nyilvánvaló. Ha a közölt elhelyezési eljárás esetén nem a szakaszok összhosszának, hanem a szakaszok számának várható értékét vizsgáljuk, amelyet $N(x)$-szel jelölünk, az (1) összefüggés levezetésénél alkalmazott gondolatmenettel az

$$(1')\qquad N(x+1)=2\int_h^1 \frac{1}{x+1-y}\int_0^{x+1-y} N(t)\,dt\,dF(y)+1\qquad (x>0)$$

egyenlethez jutunk. Az 1.°-ből következik az

$$(2')\qquad N(x)=0\qquad (0\leqq x\leqq 1)$$

kezdeti feltétel.

A továbbiakban a két esetet együtt tárgyaljuk, ezért a

$$(1'')\qquad Q(x+1)=2\int_h^1 \frac{1}{x+1-y}\int_0^{x+1-y} Q(t)\,dt\,dF(y)+K_i\qquad (x>0,\ i=1, 2)$$

függvényegyenletet vizsgáljuk a

$$Q(x)=0 \qquad (0 \leqq x \leqq 1) \tag{2''}$$

kezdeti feltétel mellett, ahol

$$K_1 = \int_h^1 y\,dF(y), \; K_2 = 1,$$

$$Q(x) = \begin{cases} M(x), & \text{ha } i=1, \\ N(x), & \text{ha } i=2, \end{cases}$$

K_1 ismert, minthogy $F(y)$ adott.

2. §. A függvényegyenlet megoldása Laplace-transzformáció segítségével

Az

$$R(x) = \frac{1}{x}\int_0^x Q(t)\,dt \tag{3}$$

jelölés mellett (1″) az alábbi alakba megy át:

$$\frac{d}{dx}[(x+1)R(x+1)] = 2\int_h^1 R(x+1-y)\,dF(y) + K_i \qquad (x>0), \tag{4}$$

míg (2″)-ből a kezdeti feltétel

$$R(x)=0 \qquad (0 \leqq x \leqq 1).$$

$R(x)$ Laplace-transzformáltját jelöljük $\varphi(s)$-sel, azaz

$$\varphi(s) = \int_0^\infty R(x)e^{-sx}dx \qquad (s=\sigma+it,\ \sigma>0).$$

Az 1. modellből nyilvánvaló, hogy

$$0 \leqq Q(x) \leqq \frac{x}{h},$$

azaz, hogy

$$0 \leqq R(x) \leqq \frac{x}{2h}, \tag{5}$$

amiből $\varphi(s)$ létezése következik.

(4) mindkét oldalát e^{-sx}-szel szorozva és x szerint integrálva, az

$$\int_0^\infty \frac{d}{dx}[(x+1)\,R(x+1)]e^{-sx}dx = 2\int_0^\infty \left(\int_h^1 R(x+1-y)\,dF(y)\right)e^{-sx}dx + \frac{K_i}{s} \tag{6}$$

egyenletet kapjuk. Figyelembe véve egyrészt, hogy (6) jobb oldalán az integrálás sorrendje felcserélhető, és hogy

$$\int_0^\infty R(x+1-y)e^{-sx}dx = e^{s(1-y)}\varphi(s) \qquad (h \leqq y \leqq 1),$$

másrészt, hogy

$$\int_0^\infty \frac{d}{dx}[x+1)R(x+1)]e^{-sx}dx = -se^s\varphi'(s),$$

az alábbi differenciálegyenlethez jutunk:

$$\varphi'(s)+2\frac{\psi(s)}{s}\varphi(s)+\frac{K_i e^{-s}}{s^2}=0, \tag{7}$$

ahol

$$\psi(s)=\int_h^1 e^{-sy}dF(y).$$

(5)-ből következik, hogy

$$\lim_{s\to+\infty}\varphi(s)=0. \tag{8}$$

Megoldva a (7) differenciálegyenletet a (8) kezdeti feltétel mellett:

$$\varphi(s)=\frac{K_i}{s^2}\int_s^\infty \exp\left\{-t-2\int_s^t\frac{1-\psi(u)}{u}du\right\}dt. \tag{9}$$

(9)-ből következik, hogy

$$\lim_{s\to+0}s^2\varphi(s)=K_i\int_0^\infty \exp\left\{-t-2\int_0^t\frac{1-\psi(u)}{u}du\right\}dt=C_i \qquad (i=1,2). \tag{10}$$

3. §. $Q(x)$ aszimptotikus viselkedésének vizsgálata

$R(x)$ aszimptotikus viselkedésének vizsgálatánál az alábbi Tauber-típusú tételt használjuk fel:[1]

Ha $\alpha(x)$ monoton növekvő függvény $(0<x<+\infty)$, $\beta>0$ és

$$\lim_{s\to+0}s^\beta\int_0^\infty e^{-sx}d\alpha(x)=\gamma, \tag{11}$$

akkor

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{x^\beta}=\frac{\gamma}{\Gamma(\beta+1)}. \tag{12}$$

[1] Lásd: [1], [4], vagy [5].

Tegyük fel, hogy $R(x)$ monoton növekedő függvény. Alkalmazva a fenti tételt $\alpha(x)=R(x)$ és $\beta=1$ választása mellett és figyelembe véve a (10) összefüggést, valamint azt, hogy

$$\int_0^\infty e^{-sx}dR(x)=\int_0^\infty R'(x)e^{-sx}dx=s\varphi(s),$$

a következő eredményt kapjuk:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{R(x)}{x}=C_i \qquad (i=1,2). \tag{13}$$

$R(x)$ aszimptotikus viselkedéséből már tudunk következtetni $Q(x)$ aszimptotikus viselkedésére. Vegyük észre ugyanis, hogy ha $\alpha(x)$ és $\alpha'(x)$ monoton növekvő függvények $(0\leqq x<+\infty)$, $\beta>1$ és

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{x^\beta}=C, \tag{14}$$

akkor

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha'(x)}{\beta x^{\beta-1}}=C. \tag{15}$$

Ez következik egyrészt a fent idézett Tauber-típusú tétel megfordításából[1] (ami úgy értendő, hogy (11) és (12) szerepét felcseréljük), másrészt a parciális integrálás útján belátható

$$\lim_{s\to+0}s^{\beta-1}\int_0^\infty e^{-sx}d\alpha'(x)=\lim_{s\to+0}s^\beta\int_0^\infty e^{-sx}d\alpha(x)$$

összefüggésből.

Tegyük fel, hogy $Q(x)$ monoton növekvő $(0\leqq x<+\infty)$. Ekkor a (3), (13), (14) és (15) összefüggésekből $\alpha(x)=\int_0^x Q(t)dt$ és $\alpha'(x)=Q(x)$ mellett a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{Q(x)}{x}=2C_i \qquad (i=1,2) \tag{16}$$

eredményre jutunk. (16) érvényességének igazolásához még meg kell mutatnunk, hogy $R(x)$ és $Q(x)$ monoton növekvő függvények $(0\leqq x<+\infty)$. Elegendő azonban $Q(x)$ monotonitásának igazolása, ebből ugyanis (3) miatt $R(x)$ monotonitása már nyilvánvaló.

LEMMA:

Ha $Q(x)$ kielégíti az (1″) *egyenletet és monoton növekvő a* $[0, 1]$ *intervallumban, akkor monoton növekvő minden x-re* $(0\leqq x<+\infty)$.

[1] Lásd: [5] 182. o.

Bizonyítás:

A feltétel szerint $Q(x)$ monoton növekvő; ha $0 \leqq x \leqq 1$. Megmutatjuk, hogy ha $Q(x)$ monoton növekvő valamely $[0, x_0]$ intervallumban $(x_0 \geqq 1)$, akkor monoton növekvő a $0 \leqq x \leqq x_0 + h$ intervallumban is. Tegyük fel ugyanis, hogy $Q'(\bar{x}) < 0$ valamely $x_0 < \bar{x} \leqq x_0 + h$ helyen. Az (1″) és (4) egyenletből következik, hogy

$$Q(x) = 2\int_h^1 R(x-y)\,dF(y) + K_i \qquad (x>1).$$

Minthogy az indirekt feltevés szerint

$$Q'(\bar{x}) = 2\int_h^1 \frac{\partial}{\partial x} R(\bar{x}-y)\,dF(y) < 0 \qquad (x_0 < \bar{x} \leqq x_0 + h)$$

és $F(y)$ monoton növekvő, ezért létezik olyan y_0 $(h \leqq y_0 \leqq 1)$, amelyre

$$\frac{\partial}{\partial x} R(\bar{x} - y_0) < 0.$$

De $\bar{x} - y_0 \leqq x_0$, ami ellentmondásra vezet, mert $0 \leqq x \leqq x_0$-ra $Q(x)$ és így $R(x)$ is monoton növekvő. Ezt a gondolatmenetet felhasználva állításunk teljes indukcióval belátható.

Ezáltal (16) érvényességét igazoltuk, fennáll tehát a következő

1. TÉTEL: *Az 1. §-ban definiált $M(x)$ és $N(x)$ függvények az alábbi aszimptotikus összefüggéseknek tesznek eleget:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{M(x)}{x} = 2\left(\int_h^1 y\,dF(y)\right)\int_0^\infty \exp\left\{-t-2\int_0^t \frac{1-\psi(u)}{u}\,du\right\}dt \tag{17}$$

és

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{N(x)}{x} = 2\int_0^\infty \exp\left\{-t-2\int_0^t \frac{1-\psi(u)}{u}\,du\right\}dt. \tag{18}$$

Az 1. tételben szereplő $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{M(x)}{x}$ és $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{N(x)}{x}$ értékei, mint látható, η eloszlásától függenek. Felmerül az a kérdés, hogy a fenti mennyiségek milyen határok között változhatnak. Erre vonatkozóan két tételt mondunk ki.

2. TÉTEL: *A $[h, 1]$ intervallumon értelmezett η valószínűségi változó tetszőleges eloszlása mellett*

$$C(1) \leqq \lim_{x\to+\infty} \frac{N(x)}{x} \leqq C(h) \qquad (0 < h \leqq 1),$$

ahol

$$C(h)=2\int_0^{\infty}\exp\left\{-t-2\int_0^t\frac{1-e^{-hu}}{u}\,du\right\}dt.$$

Bizonyítás.

Az állítás egyszerűen belátható (18)-ból, minthogy

$$e^{-u}\leqq\psi(u)\leqq e^{-hu};$$

az alsó határ $\mathbf{P}(\eta=1)=1$, a felső határ $\mathbf{P}(\eta=h)=1$ esetén elérhető.

Megjegyzés. A 2. tétel állítása nyilvánvalónak tűnik azon meggondolás alapján, hogy hosszabb szakaszokból kevesebb helyezhető el; ez a meggondolás azonban csak (1 valószínűséggel) konstans hosszúságú szakaszok elhelyezésénél érvényes. A változó hosszúságú elhelyezett szakaszok számának kialakításában (amint az (18)-ból látható) nem η-nak, hanem $e^{-u\eta}$-nak $(0<u<\infty)$ várható értéke játszik szerepet. Így előfordulhat, hogy átlagosan rövidebb szakaszokból kevesebb helyezhető el (várható értékben), mint átlagosan hosszabb, de „kedvezőbb eloszlású" szakaszokból.

3. TÉTEL: *Az* $m(h)=hC(h)$ *függvény monoton növekvő* $(0<h\leqq 1)$

Bizonyítás. Minthogy egyrészt

$$m'(h)=C(h)-4\int_0^{\infty}(1-e^{-ht})\exp\left\{-t-2\int_0^t\frac{1-e^{-hu}}{u}\,du\right\}dt= \tag{19}$$

$$=-C(h)+4\int_0^{\infty}\exp\left\{-t(1+h)-2\int_0^t\frac{1-e^{-hu}}{u}\,du\right\}dt,$$

másrészt (parciálisan integrálva)

$$C(h)=2\int_0^{\infty}t\left(1+2\frac{1-e^{-ht}}{t}\right)\exp\left\{-t-2\int_0^t\frac{1-e^{-hu}}{u}\,du\right\}dt,$$

ahonnan

$$\begin{aligned}C(h)&=4\int_0^{\infty}\exp\left\{-t(1+h)-2\int_0^t\frac{1-e^{-hu}}{u}\,du\right\}dt-\\&-2\int_0^{\infty}t\exp\left\{-t-2\int_0^t\frac{1-e^{-hu}}{u}\,du\right\}dt,\end{aligned} \tag{20}$$

(20)-ból behelyettesítve (19)-be:

$$m'(h)=2\int_0^\infty t\exp\left\{-t-2\int_0^\infty \frac{1-e^{-hu}}{u}\,du\right\}dt>0 \qquad (0<h\leqq 1),$$

amiből az állítás következik.

Megjegyzés. (17)-ből látható, hogy $m(h)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{M(x)}{x}$, ha $\mathbf{P}(\eta=h)=1$. Az 1. modell szerinti, (1 valószínűséggel) konstans szakaszokkal való térkitöltésnél az elhelyezett szakaszok átlagos összhossza nagyobb, ha az egyes szakaszok hossza nagyobb. Ez a tény nem meglepő, de nem is nyilvánvaló.

Az a sejtésünk, hogy az η valószínűségi változó tetszőleges eloszlása mellett fennáll a

$$hC(h)\leqq \lim_{x\to+\infty}\frac{M(x)}{x}\leqq C(1) \qquad (0<h\leqq 1)$$

egyenlőtlenség, de ezt nem sikerült bizonyítanunk. Ez azt jelentené, hogy a RÉNYI A. által [1] dolgozatban vizsgált modell — ahol $\mathbf{P}(\eta=1)=1$, azaz

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{M(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{N(x)}{x}=C(1)=0{,}748\ldots$$

— az 1. modell szerint elhelyezhető szakaszok átlagos számára vonatkozóan alsó határt, a szakaszok összhosszának átlagára vonatkozóan pedig felső határt szolgáltat.

4. §. Az 1. modell továbbfejlesztése

Az egydimenziós véletlen térkitöltésnek az 1. modell szerint való megvalósítása esetén a $(0,x)$ intervallumon maradnak 1-nél nem hosszabb lefedetlen szakaszok („hézagok"). Ebben a §-ban az 1. modellt továbbfejlesztjük, olyan értelemben, hogy a lefedési eljárást a hézagok egy részére is kiterjesztjük.

A fent vázoltaknak megfelelően tekintsük a következő elhelyezési eljárást:

2. modell:

1.° Az elhelyezést hajtsuk végre az 1. modellnek megfelelően.

2.° A megmaradt „hézagokat" rendezzük el nagyság szerint csökkenő sorrendben; jelölje l_{max} a legnagyobb hézag hosszát.

3.° Legyen y_ν az éppen elhelyezni kívánt szakasz hossza. $l_{max}>h$ és $l_{max}>y_\nu$ esetén a soron következő szakaszt elhelyezzük. A maximális hézagot ezáltal kitöltöttnek tekintjük, s ide már több szakaszt nem helyezünk el. (A hézagból fedetlenül maradt helyeket nem tekintjük újabb hézagoknak.[1])

4.° $y_\nu \geqq l_{\max} > h$ esetén a ν-edik szakaszt el nem helyezhetőnek tekintjük és helyette az $y_{\nu+1}$ hosszúságú szakaszt próbáljuk elhelyezni.

5.° Az elhelyezési eljárás véget ér, ha $l_{\max} \leqq h$.

A továbbiakban feltesszük, hogy

$$F(h+\varepsilon)>0, \tag{21}$$

ha $\varepsilon>0$; ennek következtében ugyanis a 2. modell szerint történő elhelyezési eljárás 1 valószínűséggel befejeződik. Jelöljük a $(0, x)$ intervallumon ily módon elhelyezhető szakaszok összhosszának várható értékét $M^*(x)$-szel, a szakaszok számának várható értékét pedig $N^*(x)$-szel.

Az itt közölt modell vizsgálata nyilván ekvivalens az (1″) egyenlet megoldásának a (2″)-nél általánosabb kezdeti feltétel mellett történő vizsgálatával.

Legyen

$$Q^*(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } 0\leqq x\leqq h \\ q^*(x), & \text{ha } h<x\leqq 1, \end{cases} \tag{22}$$

ahol $q^*(x)$ adott, a $(h, 1]$ intervallumban monoton növekvő függvény és $q^*(1)=1$.

Vizsgáljuk tehát a

$$Q^*(x+1)=2\int_h^1 \frac{1}{x+1-y}\left(\int_0^{x+1-y} Q^*(t)\,dt\right)dF(y)+K_i \qquad (x>0;\, i=1,2) \tag{23}$$

egyenletet a (22) kezdeti feltétel mellett, ahol

$$Q^*(x)=\begin{cases} M^*(x), & \text{ha } i=1 \\ N^*(x), & \text{ha } i=2. \end{cases}$$

Az

$$R^*(x)=\frac{1}{x}\int_0^x Q^*(t)\,dt \tag{24}$$

jelölés mellett (23) az alábbi alakba megy át:

$$\frac{d}{dx}[(x+1)R^*(x+1)]=2\int_h^1 R^*(x+1-y)\,dF(y)+K_i \qquad (x>0). \tag{25}$$

[1] Ha $h\geqq 1/2$, akkor ez a megszorítás tárgytalan. Megjegyezzük, hogy az általunk közölt módszer könnyen alkalmazható abban az esetben is, ha a fenti megszorítástól eltekintünk, tudniillik ekkor csak a (22) alatti kezdeti feltétel módosul; ezzel a térkitöltési modellel azonban itt nem foglalkozunk.

(22)-ből (24) miatt a kezdeti feltétel:

$$R^*(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq h \\ r^*(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_h^x q^*(t)\,dt, & \text{ha} \quad h<x\leqq 1. \end{cases} \tag{26}$$

Jelölje $\varphi^*(s)$ $R^*(x)$ Laplace-transzformáltját. Minthogy $q^*(x)\leqq 1$, ezért

$$Q^*(x)\leqq Q(x)+\frac{x}{h}\leqq\frac{2x}{h}$$

és így

$$R^*(x)\leqq\frac{x}{h}, \tag{27}$$

amiből $\varphi^*(s)$ létezése következik.

Megismételve a 2. §-ban közölt gondolatmenetet, az alábbi differenciálegyenlethez jutunk:

$$\frac{d\varphi^*(s)}{ds}+\frac{2\psi(s)}{s}\varphi^*(s)+\frac{1}{s^2}\left(s^2A(s)+r^*(1)se^{-s}-2sB(s)+K_1e^{-s}\right)=0, \tag{28}$$

ahol

$$A(s)=\int_h^1 tr^*(t)e^{-st}\,dt,$$

$$B(s)=\int_h^1 b(s,y)e^{-sy}\,dF(y),$$

$$b(s,y)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad y\geqq 1-h \\ \displaystyle\int_h^{1-y} r^*(t)e^{-st}\,dt, & \text{ha} \quad y<1-h. \end{cases}$$

(Megjegyezzük, hogy $B(s)=0$, ha $h\geqq 1/2$.)

(27)-ből következik, hogy

$$\lim_{s\to+\infty}\varphi^*(s)=0. \tag{29}$$

Megoldva a (28)-differenciálegyenletet a (29) kezdeti feltétel mellett:

$$\varphi^*(s)=\frac{1}{s^2}\int_s^\infty\left(t^2e^tA(t)+r^*(1)t-2t\,e^tB(t)+K_1\right)\exp\left\{-t-2\int_s^t\frac{1-\psi(u)}{u}\,du\right\}dt.$$

Alkalmazva a 3. §-ban közölt gondolatmenetet, (figyelembe véve, hogy a $Q(x)$ monoton növekedésének bizonyítására vonatkozó lemma $Q^*(x)$-re is érvényes) eredményül az alábbi tételt nyerjük:

4. TÉTEL. *Ha $Q^*(x)$ eleget tesz a (23) egyenletnek és a (22) alatti kezdeti feltételnek, akkor*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{Q^*(x)}{x}=2C_i^*, \qquad (i=1,2), \tag{30}$$

ahol

$$C_i^*=\int_0^\infty (t^2e^tA(t)+r^*(1)t-2te^tB(t)+K_i)\exp\left\{-t-2\int_0^t\frac{1-\psi(u)}{u}du\right\}dt.$$

5. §. A $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Q^*(x)}{x}=2C_i^*$ összefüggés meghatározása konkrét esetekben

Ebben a §-ban $q^*(x)$ alkalmas módon történő megválasztásával vizsgáljuk $N^*(x)$ és $M^*(x)$ aszimptotikus értékének alakulását. A számítások egyszerűsítése végett mindvégig feltesszük, hogy $h\geqq 1/2$.[1]

a) Legyen

$$q^*(x)\equiv 1 \qquad (h<x\leqq 1). \tag{31}$$

Ez azt jelenti, hogy az 1. modell szerint történő elhelyezés után maradt hézagok közül a h-nál hosszabbak mindegyikére utólag még el tudunk helyezni egy-egy szakaszt (ez (21) miatt lehetséges).

A (31) feltételből következik, hogy

$$r^*(x)=1-\frac{h}{x} \qquad (h<x\leqq 1)$$

$$A(s)=\frac{e^{-s}}{s^2}\,[e^{(1-h)s}-1-(1-h)s]$$

$$B(s)=0,$$

és így (30)-ból

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{N^*(x)}{x}=2\int_0^\infty \exp\left\{-ht-2\int_0^t\frac{1-\psi(u)}{u}du\right\}dt \qquad (h\geqq 1/2). \tag{32}$$

$M^*(x)$ aszimptotikus értékének konkrét esetekben való vizsgálata már jóval bonyolultabb feladat; mi itt csak két egyszerű példát tárgyalunk. A 2. modell definíciójából következik, hogy $i=1$ $(Q^*(x)=M^*(x))$ esetén $q^*(x)$ jelenti az x hosszúságú $(h\leqq x\leqq 1)$ hézagon elhelyezett szakasz hosszának

[1] A 6. §-ban tárgyaltak szempontjából csak az az eset érdekes, amikor h közel van 1-hez.

várható értékét, azaz az η valószínűségi változó feltételes várható értékét, a $h \leqq \eta < x$ feltétel mellett, tehát

$$q^*(x) = \frac{\int_h^{x-0} y\,dF(y)}{\int_h^{x-0} dF(y)}.$$

b) Legyen η olyan diszkrét valószínűségi változó, amely a h és 1 értékeket p, illetve $1-p$ valószínűséggel veszi fel. Ebben az esetben a hézagokon csak h hosszúságú szakaszok helyezhetők el, tehát $q^*(x) = h$ $(h < x \leqq 1)$. Ennek következtében

$$r^*(x) = h\left(1 - \frac{h}{x}\right),$$

$$A(s) = \frac{he^{-s}}{s^2}[e^{(1-h)s} - 1 - (1-h)s],$$

$$K_1 = ph + 1 - p,$$

$$B(s) = 0,$$

és így (30)-ból

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{M^*(x)}{x} =$$

$$= 2\int_0^\infty [he^{(1-h)t} + (1-h)(1-p)] \exp\left\{-t - 2\int_0^t \frac{1 - pe^{-hu} - (1-p)e^{-u}}{u} du\right\} dt =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{M(x)}{x} + h \lim_{x\to+\infty} \frac{N^*(x) - N(x)}{x}. \tag{33}$$

c) Legyen η a $(h, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Ez esetben

$$q^*(x) = \frac{x+h}{2},$$

$$r^*(x) = \frac{1}{4x}(x^2 + 2hx - 3h^2),$$

$$A(s) = \frac{e^{-s}}{4s^3}[2e^{s(1-h)}(2hs+1) - \{(1+2h-3h^2)s^2 + 2(1+h)s + 2\}],$$

$$K_1 = \frac{1+h}{2},$$

$$B(s) = 0,$$

és így (30)-ból

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{M^*(x)}{x}=$$

$$=2\int_0^\infty\left\{\left(he^{(1-h)t}+\frac{e^{(1-h)t}-1}{2t}\right)\exp\left\}-t-2\int_0^t\frac{1}{u}\left[1-\frac{e^{-u}(1-e^{(1-h)u})}{(1-h)u}\right]du\right\}dt.$$

6. §. Az elért eredmények egy gyakorlati alkalmazása

A véletlen térkitöltési modellek egyik alkalmazási területe autóparkolási szisztémák vizsgálata.[1]

A parkolásnál az optimális helykihasználás nyilván az, amikor az autók szorosan egymás mellé állnak be, ez azonban a gyakorlatban nem mindig valósítható meg. A jó helykihasználás érdekében szokásos az autók helyét előre kijelölni azáltal, hogy a parkolóhelyen egyforma távolságra fehér sávokat festenek. A parkolásnak ez a módja előnyösnek bizonyul az esetben, ha az autók közel egyforma nagyságúak. (Ekkor ugyanis a kijelölt helyet egy-egy autó optimálisan tölti ki.) Ha azonban az autók nagysága meglehetősen ingadozik, akkor a kijelölt helyekre való beállás térkihasználás szempontjából előnytelenné válhat, mert a sávozás a legnagyobb autóméret szerint történik.

A gyakorlatban a parkolás számos esetben nem meghatározott szisztéma szerint, hanem véletlenszerűen megy végbe. A véletlenszerű elhelyezkedés nyilván előnytelen, ha az autók nagysága egyforma (a helykihasználás csak kb. 75%-os, lásd: [1]), de előnyössé válhat, ha az autók nagysága erősen ingadozik. RÉNYI ALFRÉD vetette fel azt a kérdést, hogy milyen esetben nyújt jobb eredményt a véletlenszerű elhelyezés a szisztematikus (sávos) elhelyezésnél, vagyis mikor nem érdemes az autók helyét előre kijelölni. Elért eredményeink segítségével a kérdésre válasz adható, ha a véletlen módon történő beállásra bizonyos egyszerű feltételek teljesülnek.

A 2. modell a következőképpen hozható kapcsolatba az autóparkolással. Az elhelyezendő szakaszok hossza jelentse a beálló autók nagyságát. (Az „autók nagyságán” értjük azok valódi hosszát, illetve szélességét, megnövelve még egy kis távolsággal, amely a beállás módjától függ.)

Egységnek tekintjük a legnagyobb autó nagyságát (vagy annál nagyobb számot). A $(0, x)$ intervallumnak megfelel a parkolóhely hossza, a fenti egységben kifejezve. (Elég nagy x esetén az $x\to+\infty$-re kapott eredményeink már jó közelítéssel alkalmazhatók.) Egy szakasz elhelyezésének megfelel egy autó beállása.

[1] Erre először N. G. DE BRUIJN mutatott rá (lásd [1]).

Természetesen nem várhatjuk azt, hogy a valóságban az autók elkerülik az 1-nél rövidebb helyeket („hézagokat"), ha 1-nél hosszabb szabad hely még van. Heurisztikus megfontolások alapján azonban arra következtethetünk, hogy az általunk tárgyalt modell térkihasználás szempontjából kedvezőtlenebb, mint a valóság.

Hasonlítsuk össze ugyanis a 2. modellt egy olyan elhelyezési eljárással, amelynél megengedjük a hézagok kitöltését mielőtt a „szabad" helyek elfogynának. Minthogy a hézagokban a kisebb szakaszok inkább elférnek, a szabad helyeken elhelyezendő szakaszok eredeti eloszlása módosul, méghozzá úgy, hogy a hosszabb szakaszok nagyobb valószínűséggel fordulnak elő. Kísérleti tapasztalataink alapján viszont arra következtethetünk, hogy ez a módosítás a térkihasználást javítja.

A hézagokon is jobb lesz a térkihasználás; ti. akkor, amikor egy szakaszt nem tudunk egy hézagon elhelyezni, megvizsgáljuk annak elhelyezését egy nagyobb hézagon, ami által az egyes hézagokon az elhelyezett szakasz hosszának várható értéke növekszik. A 2. modell szerint történő autóparkolásnál a kitöltött térhányadra kapott eredményünket tehát úgy tekinthetjük, mint a gyakorlatban előforduló térkihasználás alsó becslését.

Természetesen felmerülhet az a kérdés, hogy miért nem lehet egy olyan modellt vizsgálni, amely pontosabban írja le az autóparkolást. Erre a következőket válaszoljuk:

1. A gyakorlatban a véletlen módon történő autóparkolást számos tényező befolyásolja (pl. terepviszonyok, pszichológiai hatás stb.), s ezek figyelembevétele a helyes matematikai modell megtalálását igen nehézzé teszi.

2. Ha találunk is olyan modellt, amely a valóságot jól közelíti, a matematikai tárgyalásban rendkívül nehéz problémák merülnek fel. Például, ha az autók a „hézagokra" is beállnak amikor még „szabad helyek" vannak, akkor az egyes szabad helyek kitöltése nem lesz független egymástól, s ez az egzakt matematikai tárgyalást áttekinthetetlenül bonyolulttá teszi.

7. §. A Monte Carlo-módszer alkalmazása

Sok olyan problémánál, ahol az egzakt matematikai tárgyalás nehézségekbe ütközik, sikerrel alkalmazható az ún. Monte Carlo-módszer[1]. Ez a módszer előnyösnek bizonyulhat abban az esetben is, amikor a kapott összefüggések numerikus módszerekkel történő kiszámítása túlságosan bonyolult és nincs szükség nagy pontosságra.

A véletlen térkitöltési problémáknál a Monte Carlo-módszer alkalmazása

[1] Lásd pl. [6], [7].

azt jelenti, hogy a modellt az előírt szabályoknak megfelelően, véletlen számtáblázat[1] felhasználásával, kísérletileg megvalósítjuk (szimulálás). Ezen az úton közelítőleg meghatároztuk $M(x)$, $N(x)$, $M^*(x)$ és $N^*(x)$ értékét $x=100$ esetén, midőn η az 1/2 és 1 értékeket 1/2—1/2 valószínűséggel veszi fel. Tapasztalataink alapján

$$\left|\frac{M(100)}{100}-\lim_{x\to+\infty}\frac{M(x)}{x}\right|$$

jelentősen kisebb, mint a kísérleti eredmények szórása, hacsak az elvégzett kísérletek száma nem túlságosan nagy — ugyanez mondható $N(x)$, $M^*(x)$ és $N^*(x)$-re is —, így gyakorlatilag jó közelítést nyújt, ha a kísérleteket 100 egységnyi intervallumon hajtjuk végre.

Alábbiakban feltüntetjük 10 kísérlet alapján kapott eredményeinket:

$$10^{-2}M(100)=0{,}661, \qquad \text{szórás}=0{,}014$$

$$10^{-2}N(100)=0{,}880, \qquad \text{szórás}=0{,}025$$

$$10^{-2}M^*(100)=0{,}805, \qquad \text{szórás}=0{,}009$$

$$10^{-2}N^*(100)=1{,}168, \qquad \text{szórás}=0{,}042.$$

A fenti eredményeket összehasonlítva a „sávos elhelyezéssel", ahol az elhelyezett szakaszok száma nyilván 100, a szakaszok átlagos összhossza pedig 75, láthatjuk, hogy a 2. modell alkalmazása a sávos elhelyezéssel szemben jobb eredményt nyújt. Eredményeink jó egyezést mutatnak (33)-mal, valamint a (17) és (18) közötti kapcsolattal (ti. $M(100)\approx 0{,}75\,N(100)$).

Megjegyezzük, hogy a Monte Carlo-módszer alkalmazása jelen esetben jóval egyszerűbb a numerikus integrálásnál, és igen egyszerűen programozható elektronikus számológépek számára.

IRODALOM

[1] RÉNYI A.: Egy egydimenziós véletlen térkitöltési problémáról, *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* 3 (1958) 109—127.

[2] PALÁSTI, I.: On some random space filling problems, *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* 5 (1960) A. sorozat, 353—360.

[3] BÁNKÖVI, G.: Evaluation of integrals by Monte Carlo methods based on the one-dimensional random space filling, *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* 5 (1960) A. sorozat, 339—352.

[4] HARDY, G. H.: *Divergent Series* (Oxford 1949).

[1] Kísérleteinknél a [8]-ban található véletlen számok táblázatát használtuk.

[5] WIDDER, D. V.: *The Laplace transform* (Princeton, 1946).
[6] MEYER, H. A. (ed.): *Symposium on Monte Carlo methods* (New York, 1956).
[7] BROWN, G. W.: Monte Carlo-módszerek; BECKENBACH, E. F.: *Modern matematika mérnököknek*, (Budapest, 1960), 289—314.
[8] HALD, A.: Statistical Tables and Formulas Wiley, New York, 1952.

(Beérkezett: 1961. VII. 10.)

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete