

SZILÁRD SZEMCSÉK MOZGÁS TÖRVÉNYEI CENTRIFUGÁLIS ERŐTÉR BEN*

PETHŐ SZILVESZTER**

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett 1977. szept. 10.]

A tanulmányban a Stokes-féle közegellenállás érvényessége esetén a centrifugális erőterben mozgó szilárd szemcsék foronómiai függvényeit lehet megtalálni. FINKEJ professzor által bevezetett jelöléseket alkalmazva, a foronómiai függvényeknek a centrifugális erőter és a szilárd szemcse alapvető paramétereivel való kapcsolatát jól meg lehet állapítani.

Folyamatos üzemű centrifuga szilárd szemcséinek mozgás törvényeinek tanulmányozásához az 1. ábra nyújt segítséget. A centrifuga n fordulatszámú, így ω szögsebessége is állandó. Az igen nagy fordulatszám következtében a szemekre ható centrifugális erő a nehézségi erőnél nagyságrendekkel nagyobb, így a nehézségi erőt nem is szükséges figyelembe venni. A zagy bevezetése a centrifugába R_1 sugáron történik, a centrifuga külső sugara R_2 .

A centrifugára általában igen finom szemű anyag kerül feladásra, ezért a Stokes-féle közegellenállást veszik figyelembe. Így a centrifugában t időpillanatban v sebességgel sugár irányban mozgó m tömegű, x nagyságú szemcsére ható mdv/dt gyorsító erő a következő:

$$m \frac{dv}{dt} = mR\omega^2 - kxv: \quad R_1 \leq R \leq R_2. \quad (1)$$

A differenciálegyenletben k a közegellenállási tényező. Az egyenletet differenciálva, $dR/dt = v$ figyelembevételével

$$mv'' + kxv' - m\omega^2v = 0. \quad (2)$$

Az ilyen típusú differenciálegyenlet megoldásakor a v függvényt a t független változó exponenciális függvényeként a következő formában írják fel:

$$v = e^{\lambda t}. \quad (3)$$

A kitevőben λ állandót jelent. Ezt az egyenletet ill. ennek első és második differenciál-hányadosát (2)-be helyettesítve, az állandó értéke meghatározható.

* Az MTA Műszaki Mechanikai Bizottságához beterjesztett jelentés első részének rövidített szövege.

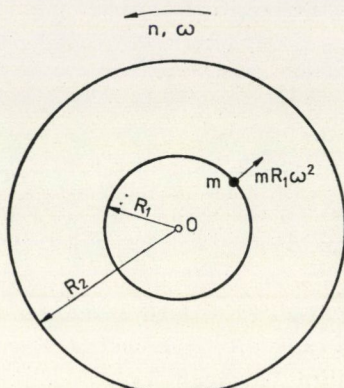
** Prof. Dr. Pethő Szilveszter, Miskolc-Egyetemváros Ásványelőkészítési Tanszék.

A függvény első és második differenciálhányadosa

$$v' = \lambda e^{\lambda t} \quad \text{és} \quad v'' = \lambda^2 e^{\lambda t}. \quad (4)$$

Így a (2) egyenlet az

$$m\lambda^2 + kx\lambda - m\omega^2 = 0 \quad (5)$$



1. ábra

alakot veszi fel. Ez az egyenlet λ -ra megoldható, mivel másodfokú egyenletről van szó:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-kx \pm \sqrt{(kx)^2 + 4m^2\omega^2}}{2m} \quad (6)$$

A v sebesség

$$v = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (7)$$

Itt C_1 és C_2 integrálási állandókat jelentenek. Mivel $t = 0$ -nál $v = 0$, ezért $C_2 = -C_1$ és

$$v = C_1 (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}). \quad (8)$$

A C_1 állandó meghatározása érdekében sebességgel kapcsolatos további peremfeltétel nem ismeretes. Viszont a függvényt differenciálva, a kezdő gyorsulás ismeretében használható peremfeltételt lehet megadni:

$$a = \frac{dv}{dt} = C_1 (\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}) \quad (9)$$

$t = 0$ esetében $a = R_1 \omega^2$, így

$$C_1 = \frac{R_1 \omega^2}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (10)$$

Ezért a pillanatnyi v sebesség és az a gyorsulás:

$$v = \frac{R_1 \omega^2}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \quad (11)$$

és

$$a = \frac{R_1 \omega^2}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}). \quad (12)$$

A t ideig megtett s út a következő:

$$s = \int_0^t v dt = \frac{R_1 \omega^2}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{1}{\lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \frac{1}{\lambda_2} e^{\lambda_2 t} + C_3 \right). \quad (13)$$

A C_3 állandó meghatározásához szükséges határfeltétel: $t = 0$ -nál $s = 0$, így

$$C_3 = \frac{R_1 \omega^2}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (14)$$

és

$$s = \frac{R_1 \omega^2}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{1}{\lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \frac{1}{\lambda_2} e^{\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \right). \quad (15)$$

Ezt az egyenletet tovább átalakítva,

$$s = \frac{R_1 \omega^2}{\lambda_1 \lambda_2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} + 1 \right). \quad (16)$$

λ_1 -et és λ_2 -öt gravitációs erőterben való $v_0 = m/kx$ süllyedési végsebességgel ([1], [2]) ill. az ω szögsebességgel is meg lehet adni;

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2v_0} + \sqrt{\left(\frac{1}{2v_0}\right)^2 + \omega^2} \quad (17)$$

és

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2v_0} - \sqrt{\left(\frac{1}{2v_0}\right)^2 + \omega^2}. \quad (18)$$

Továbbá

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{v_0}\right)^2 + 4\omega^2} \quad (19)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = -\omega^2, \quad (20)$$

illetve

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (2v_0\omega)^2}} \right], \quad (21)$$

és

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = -\frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1 + (2v_0\omega)^2}} \right]. \quad (22)$$

λ_1 -et és λ_2 -őt illetve ezek függvényeit a (11), (12) és (16) egyenletekbe helyettesítve, látható, hogy a szilárd szem pillanatnyi sebessége, gyorsulása és a megtett út a centrifugára jellemző R_1 és ω , a szilárd szemcse v_0 süllyedési végsebességének, továbbá a t időnek a függvénye:

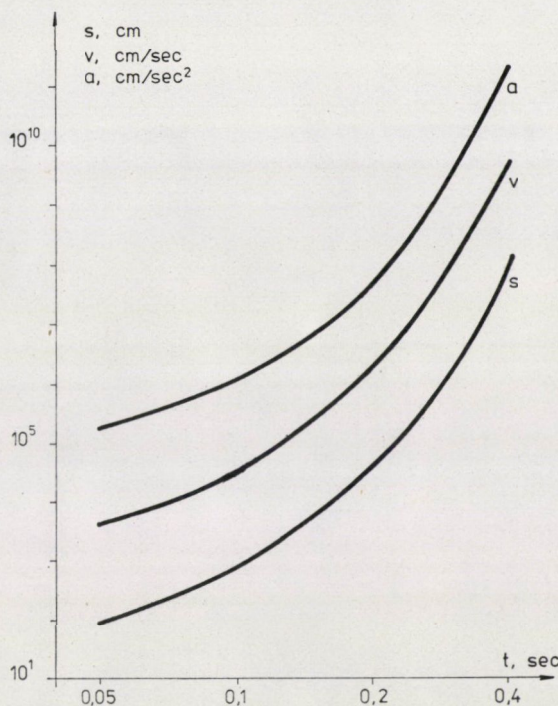
$$v = \frac{R_1^2}{\sqrt{\frac{1}{v_0^2} + 4\omega^2}} \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2v_0} + \sqrt{\left(\frac{1}{2v_0}\right)^2 + \omega^2} \right] t - \exp \left[-\frac{1}{2v_0} - \sqrt{\left(\frac{1}{2v_0}\right)^2 + \omega^2} \right] t \right\} \quad (23)$$

$$a = \frac{1}{2} R_1 \omega^2 \left\{ \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (2v_0\omega)^2}} \right] \exp \left[-\frac{1}{2v_0} + \sqrt{\left(\frac{1}{2v_0}\right)^2 + \omega^2} \right] t + \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1 + (2v_0\omega)^2}} \right] \exp \left[-\frac{1}{2v_0} - \sqrt{\left(\frac{1}{2v_0}\right)^2 + \omega^2} \right] t \right\} \quad (24)$$

és

$$s = R_1 \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1 + (2v_0\omega)^2}} \right] \exp \left[-\frac{1}{2v_0} + \sqrt{\left(\frac{1}{2v_0}\right)^2 + \omega^2} \right] t + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (2v_0\omega)^2}} \right] \exp \left[-\frac{1}{2v_0} - \sqrt{\left(\frac{1}{2v_0}\right)^2 + \omega^2} \right] t \right\}. \quad (25)$$

A 2. ábrán a centrifugális erőterben olyan szilárd szemcse foronómiai függvényei láthatók [3], amelynek $v_0 = 0,05$ cm/sec a süllyedési végsebessége; $R_1 = 25$ cm és $\omega = (2400)^{1/2}$. A sebesség, gyorsulás és befutott út exponenciálisan növekvő jellege az ábráról is jól látható.



2. ábra

IRODALOM

1. FINKEY József: Die wissenschaftlichen Grundlagen der nassen Erzaufbereitung. Verlag von Julius Springer, Berlin 1924
2. TARJÁN Gusztáv: Ásványelőkészítés I. Egyetemi jegyzet. Kézirat, Tankönyvkiadó, Budapest 1974
3. RAISZ Iván: A szerző felkérése alapján készített kézirat, 1977

The Laws of Motion of Solid Grains in a Centrifugal Field of Forces. — The paper discusses the phoronomic functions of solid grains moving in a centrifugal field of forces, in the case Stokes' law of medium resistance, is valid. Using the notations introduced by Prof. FINKEY the relations of the phoronomic functions with the centrifugal field of forces and the basic parameters of the solid grains can be well established.

Die Bewegungsgesetze von festen Körpern in einem Zentrifugalkraftfeld. — In der Arbeit sind die phoronomischen Funktionen für sich in einem Zentrifugalkraftfeld bewegende feste Körper abgeleitet, falls das Stokessche Strömungswiderstandsgesetz Geltung hat. Unter Verwendung der von Prof. FINKEY eingeführten Bezeichnungen kann der Zusammenhang der phoronomischen Parameter mit dem Zentrifugalkraftfeld und den grundlegenden Parametern der festen Körper gut festgestellt werden.