

EGY FELSŐ KORLÁT A HETEROGÉN ANYAGÚ PRIZMATIKUS RUDAK CSAVARÁSI MEREVSÉGÉRE

ECSEDI ISTVÁN*

[Beérkezett 1977. október 28-án]

A tanulmány tömör keresztmetszetű, heterogén de izotrop prizmatikus rudak csavarási merevségére egy egyenlőtlenségi relációt ad meg, mégpedig felső korlátot. A korlát bizonyítása a heterogén anyagú prizmatikus rudak csavarási feladatára vonatkozó újabb irodalmi eredmények alkalmazásával történt.

Jelölések

x, y derékszögű Descartes-féle koordináták,
 e_x, e_y , az x, y koordinátarendszer egységvektorai,
 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} e_x + \frac{\partial}{\partial y} e_y$ Hamilton-féle differenciáloperátor,
 $„ \cdot ”$ két vektor skaláris szorzatának jele,
 $\bar{G} = G(x, y)$ csúszató rugalmassági modulus,
 $U = U(x, y)$ feszültségfüggvény,
 T x, y síkbeli, egyszeresen összefüggő korlátos tartomány,
 g a T tartomány határgörbéje,
 S csavarási merevség,
 M csavaró-nyomaték,
 θ fajlagos elcsavarodás szöge,
 $f_x = f(x), \tilde{f} = \tilde{f}(x)$ segédfüggvények,
 $s_x(y), s_y(x), S_x, S_y$ és egyéb mennyiségeket, változókat a szövegben értelmezzünk.

1. Bevezetés

Ismeretes, hogy az 1. ábrán vázolt tömör keresztmetszetű, heterogén, de izotrop, lineárisan rugalmas anyagú prizmatikus rúd csavarási feladata a következő peremérték problémára vezet, [1]:

Meghatározandó az a T tartományon és a T tartomány g határgörbéjén folytonos $U = U(x, y)$ kétváltozós függvény, amely a T tartományban a

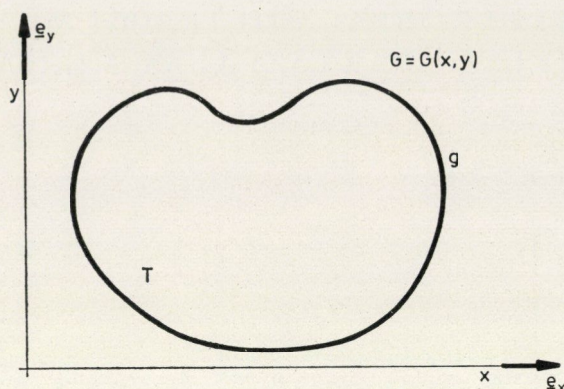
$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{G} (\nabla U) \right] = -2 \quad (1)$$

parciális differenciálegyenletet, a T tartomány határán — a g görbén — pedig az

$$U = 0 \quad (2)$$

homogén peremfeltételt elégíti ki.

* Dr. Ecsedi István, 3531 Miskolc, Vászonfehéritő u. 24, IV/1.



1. ábra. Tömör keresztmetszet

A keresztmetszet

$$S = \frac{M}{\vartheta} \quad (3)$$

formulával értelmezett S csavarási merevsége az (1), (2) által kijelölt kerületértékprobléma $U = U(x, y)$ megoldásának az ismeretében az alábbi módon számítható:

$$S = 2 \int_T U dT. \quad (4)$$

Jelen tanulmány az S csavarási merevséggel kapcsolatban az alábbi egyenlőtlenségi relációt ismerteti:

$$S \leq S_x + S_y, \quad (5)$$

ahol

$$S_x = \int_{Y_1}^{Y_2} s_x(y) dy, \quad S_y = \int_{X_1}^{X_2} s_y(x) dx, \quad (6), (7)$$

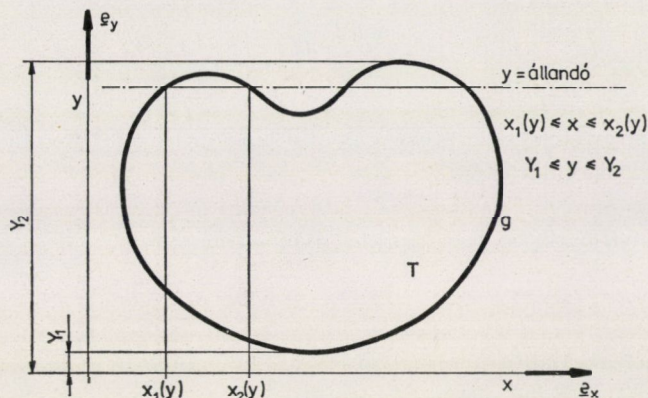
$$s_x(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} G(x, y) [x - \bar{x}(x, y)]^2 dx, \quad (8)$$

$$\bar{x}(x, y) = \frac{\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} G(x, y) x dx}{\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} G(x, y) dx}, \quad (9)$$

$$s_y(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} G(x, y) [y - \bar{y}(x, y)]^2 dy, \quad (10)$$

$$\bar{y}(x, y) = \frac{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} G(x, y) y dy}{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} G(x, y) dy}. \quad (11)$$

A fenti formulákban szereplő $x_1(y)$, $x_2(y)$ a T tartomány g határgörbéjének $y = \text{állandó}$ egyenletű egyenessel való metszéspontjának abszcisszáit jelenti, hasonlóan értelmezett $y_1(x)$ és $y_2(x)$, azaz a g határgörbe $x = \text{állandó}$ egyenletű egyenessel való metszéspontjának ordinátáit $y_1(x)$, $y_2(x)$ jelöli. Az $x_1(y)$, $x_2(y)$, Y_1 , Y_2 jelentését a 2. ábra, az $y_1(x)$, $y_2(x)$, X_1 , X_2 jelentését pedig a 3. ábra szemlélteti.



2. ábra. Az $y = \text{állandó}$ egyeneshez tartozó $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$ intervallum

2. Az (5) egyenlőtlenségi reláció igazolása

Elöljáróban olyan segédteteleket, formulákat ismertetünk, amelyek alapvető szerepet játszanak a csavarási merevségre vonatkozó egyenlőtlenségi reláció bizonyításánál.

A jól ismert

$$\nabla \cdot \left[U \frac{1}{G} (\nabla U) \right] = \frac{1}{G} (\nabla U)^2 + U \nabla \cdot \left[\frac{1}{G} (\nabla U) \right] \quad (12)$$

azonosságból integrálással az alábbi egyenletet kapjuk, ha tekintettel vagyunk az (1) egyenletre:

$$\int_T U \nabla \cdot \left[\frac{1}{G} (\nabla) U \right] dT = \int_T \frac{1}{G} (\nabla U)^2 dT - 2 \int_T U dT. \quad (13)$$

A Gauss-féle integráletalakítási tétel és a (2) egyenlet alkalmazásával belátható, hogy

$$\int_T U \nabla \cdot \left[\frac{1}{G} (\nabla U) \right] dT = 0. \quad (14)$$

A (14), (17), (4) egyenletek kombinálásával a következő alapvető eredményt tudjuk levezetni:

$$S = \int_T \frac{(\nabla U)^2}{G} dT. \quad (15)$$

A (15) és a (4) egyenletek felhasználásával jutunk a (16) egyenletre:

$$S = - \int_T \frac{(\nabla U)^2}{G} dT + 4 \int_T U dT. \quad (16)$$

A csavarási merevségre vonatkozó egyenlőtlenségi reláció igazolása a (16) formula felhasználásával történik.

A T tartományból az $y =$ állandó egyenesek (2. ábra) véges számú intervallumot hasítanak ki. Egy tipikus ilyen intervallum

$$x_1(y) \leq x \leq x_2(y). \quad (17)$$

Jelölje $f = f(x)$ az alábbi peremértékfeladat megoldását:

$$\left[\frac{1}{G(x, y)} f'(x) \right]' + 1 = 0, \quad (18)$$

$$f[x_1(y)] = 0, \quad f[x_2(y)] = 0. \quad (19a), (19b)$$

A (18) egyenletben vesszõ az x változó szerinti differenciálás jele.

Legyen

$$s_x(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x) dx. \quad (20)$$

Elemi számolással igazolható, hogy

$$s_x(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{1}{G(x, y)} [f'(x)]^2 dx. \quad (21)$$

Tekintsük a következő előírással értelmezett $k_x = k_x[\tilde{f}(x)]$ függvényt:

$$k_x = k_x[\tilde{f}(x)] = - \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{1}{G(x, y)} [\tilde{f}'(x)]^2 dx + 2 \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \tilde{f}(x) dx, \quad (22)$$

ahol $\tilde{f} = \tilde{f}(x)$ az $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$ zárt intervallumban folytonos, az $x_1(y) < x < x_2(y)$ nyílt intervallumban pedig szakaszonként folytonosan differenciálható olyan egyváltozós függvényt jelöl, amely az

$$\tilde{f}[x_1(y)] = 0, \quad \tilde{f}[x_2(y)] = 0 \quad (23), (24)$$

homogén peremfeltételeket kielégíti.

A (25) egyenlőtlenségi reláció igazolása megtalálható bármely variáció-számítással foglalkozó kézikönyvben (pl. [2], [3]):

$$s_x(y) \geq k_x[\tilde{f}(x)]. \quad (25)$$

Elemi számolással igazolható, hogy

$$s_x(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} G(x, y) [x - \bar{x}(x, y)]^2 dx, \quad (26)$$

ahol

$$\bar{x}(x, y) = \frac{\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} G(x, y) x dx}{\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} G(x, y) dx}. \quad (27)$$

A T tartományból az $x = \text{állandó}$ egyenesek által kihalított

$$y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$$

intervallumokhoz (3. ábra) az előbbieket szerint eljárva hozzárendelhetjük az $s_y = s_y(x)$, $k_y = k_y(\tilde{f})$, $\tilde{f} = \tilde{f}(y)$, $\bar{y} = \bar{y}(x, y)$ függvényeket. Ezen mennyiségek formálisan a már levezetett eredményekből — $s_x = s_x(y)$, $k_x = k_x[\tilde{f}(x)]$, $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$ — az x és y változók felcserélésével állíthatók elő. Így írhatjuk, hogy

$$s_y(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} G(x, y) [y - \bar{y}(x, y)]^2 dy, \quad (28)$$

ahol

$$\bar{y}(x, y) = \frac{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} G(x, y) y dy}{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} G(x, y) dy}. \quad (29)$$

Nyilván fennáll az alábbi egyenlőtlenségi reláció a (25) mintájára:

$$s_y(x) \geq k_y[\tilde{f}(y)], \quad (30)$$

ahol

$$k_y[\tilde{f}(y)] = - \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{1}{G(x, y)} [\tilde{f}(y)]^2 dy + 2 \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \tilde{f}(y) dy. \quad (31)$$

A (30) formulában szereplő $\tilde{f} = \tilde{f}(y)$ függvény az $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ zárt intervallumban folytonos az $y_1(x) < y < y_2(x)$ nyílt intervallumban pedig szakaszanként folytonosan differenciálható olyan egyváltozós függvényt jelöl, amely az

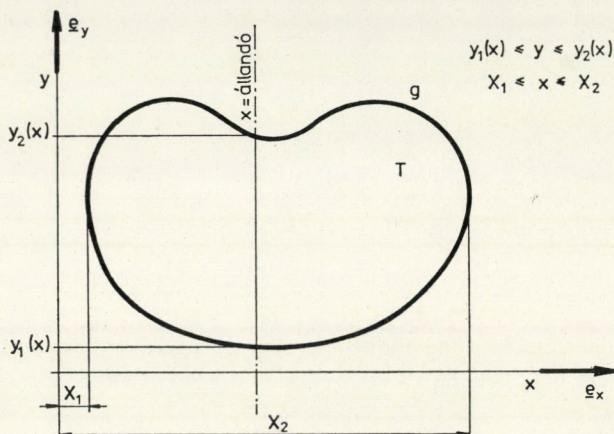
$$\tilde{f}[y_1(x)] = 0, \quad \tilde{f}[y_2(x)] = 0 \quad (32a), (32b)$$

homogén peremfeltételeket kielégíti.

Megjegyzendő, hogy a (31) formulában a vessző az y szerinti deriváltat jelöli.

A (25) egyenlőtlenségi reláció alapján írhatjuk az $\tilde{f}(x) = U(x, y)$ választással, hogy

$$s_x(y) \geq - \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{1}{G(x, y)} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx + 2 \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} U dx. \quad (33)$$



3. ábra. Az $x = \text{állandó}$ egyeneshez tartozó $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ intervallum

Összegezve a fenti integrálokat az $y = \text{állandó}$ vonalhoz tartozó (x_1, x_2) intervallumokra, majd y szerint integrálva kapjuk, hogy

$$\int_{y_1}^{y_2} s_x(y) dy \geq - \int_T \frac{1}{G} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dT + 2 \int_T U dT. \quad (34)$$

Hasonló módon eljárva, a (29) egyenlőtlenségi relációból kiindulva nyerjük az alábbi formulát:

$$\int_{x_1}^{x_2} s_y(x) dx \geq - \int_T \frac{1}{G} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 dT + 2 \int_T U dT. \quad (35)$$

Legyen

$$S_x = \int_{y_1}^{y_2} s_x(y) dy, \quad S_y = \int_{x_1}^{x_2} s_y(x) dx. \quad (36), (37)$$

A (33), (35) egyenlőtlenségek összeadásával, a (36), (37) jelölések és a (16) formula alkalmazásával az

$$S \leq S_x + S_y \quad (38)$$

formula adódik.

3. Homogén anyagú prizmatikus rúdra vonatkozó felső korlát

A $G = G(x, y) =$ állandó esetben $s_x(y)$ és $s_y(x)$ viszonylag egyszerűen kiszámítható. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$s_x(y) = G \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} (x - \bar{x})^2 dx, \quad (39)$$

$$\bar{x} = \frac{x_1(y) + x_2(y)}{2}, \quad (40)$$

$$s_y(x) = G \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} (y - \bar{y})^2 dy \quad (41)$$

$$\bar{y} = \frac{y_1(x) + y_2(x)}{2} \quad (42)$$

alakú lesz. A kijelölt integrálások elvégzésével azt kapjuk, hogy

$$s_x(y) = G \frac{d_x^3(y)}{12}, \quad s_y(x) = G \frac{d_y^3(x)}{12}, \quad (43), (44)$$

$$d_x(y) = x_2(y) - x_1(y), \quad d_y(x) = y_2(x) - y_1(x). \quad (45), (46)$$

A fentieknek megfelelően S_x -re és S_y -ra az

$$S_x = G \int_{y_1}^{y_2} \frac{d_x^3(y)}{12} dy, \quad S_y = G \int_{x_1}^{x_2} \frac{d_y^3(x)}{12} dx \quad (47), (48)$$

eredmény adódik. A csavarási merevségre vonatkozó

$$S \leq S_x + S_y \quad (49)$$

felső korlátnak igen egyszerű mechanikai interpretáció adható, a jól ismert

$$S < GI_p \quad (50)$$

relációval történő összevetés elemzésével. I_p a T tartománynak az x, y koordinátarendszer kezdőpontjára számított másodrendű nyomatékát jelöli. Igazolható, hogy (50) akkor lesz a legélesebb felső korlát az S csavarási merevség számára, ha az x, y koordinátarendszer kezdőpontja a keresztmetszet súlypontjában van.

Legyen az x, y koordinátarendszer a keresztmetszet súlypontjában. Jelölje I_x, I_y a keresztmetszetnek a súlyponti x, y tengelyekre vonatkozó másodrendű nyomatékait. Nyilván

$$I_p = I_x + I_y, \quad (51)$$

ahol I a keresztmetszetnek a keresztmetszet súlypontjára vonatkozó másodrendű nyomatéka. Az I_x és I_y értelmezéséből következik, hogy

$$I_y = \int_T x^2 dT = \int_{y_1}^{y_2} q_x(y) dy, \quad (52)$$

$$q_x(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} x^2 dx = \frac{x_2^3(y) - x_1^3(y)}{3}, \quad (53)$$

$$I_x = \int_T y^2 dT = \int_{x_1}^{x_2} q_y(x) dx, \quad (54)$$

$$q_y(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} y^2 dy = \frac{y_2^3(x) - y_1^3(x)}{3}. \quad (55)$$

A Steiner-tétel alkalmazásával írható, hogy

$$s_x(y) \leq Gq_x(y), \quad s_y(x) \leq Gq_y(x). \quad (56), (57)$$

Az (56), (57) egyenlőtlenségi relációk következménye, hogy

$$S_x \leq GI_y, \quad S_y \leq GI_x \quad (58), (59)$$

azaz

$$S_x + S_y \leq G(I_x + I_y) = GI_p. \quad (60)$$

Ez utóbbi eredményből pedig az következik, hogy (49) egyenlőtlenségi relációtól élesebb felső korlátot kapunk az S csavarási merevség számára, mint az (50) formula alkalmazása által. Ezen állítás illusztrálására tekintsük az alábbi példát:

A 4. ábrán vázolt egyenlő szárú derékszögű háromszög alakú tömör keresztmetszetre vonatkozólag az alábbi eredményeket tudjuk levezetni:

$$I_p = \frac{1}{18} a^4,$$

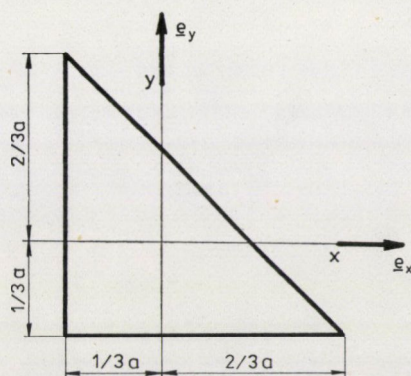
$$S_x = \frac{1}{48} a^4 G, \quad S_y = \frac{1}{48} a^4 G.$$

Jelen esetben az

$$S^* = S_x + S_y = \frac{1}{24} a^4 G$$

háromnegyed része az

$$S^{**} = GI_p = \frac{1}{18} a^4 G$$



4. ábra. Egyenlő szárú derékszögű háromszög alakú keresztmetszet

menyiségnek. Tehát az (49) egyenlőtlenségi reláció élesebb felső korlátot ad a csavarási merevség számára ebben a feladatban, mint a jól ismert (50) egyenlőtlenségi reláció.

IRODALOM

1. ZIENKIEWICZ Ely I. F.: Torsion of Compound Bars (a relaxation solution). *Intern. Journal of Mech. Sci.* 1. (1960), 356—365
2. COURANT R.—HILBERT D.: *Methods of Mathematical Physics*. Vol. 1. Interscience, New York, 1953
3. WEINSTOCK R.: *Calculus of Variations with Application to Physics and Engineering*, McGraw-Hill, 1952

A Top Value for the Torsional Stiffness of Prismatic Bars Made of Heterogeneous Material

An inequality relation, i.e. a limiting top value is derived for the torsional stiffness of prismatic bars made of heterogeneous, yet isotropic material. The verification of the limiting value was carried out with the help of the latest results published by the literature on the problem of torsioning prismatic bars made of heterogeneous material.

Höchstgrenze für die Torsionssteifheit der prismatischen Stäbe aus heterogenem Material.

Für die Torsionssteifheit von prismatischen Stäbe aus ungleichartigem, jedoch isotropem Material wird eine Ungleichheitsrelation, und zwar eine Höchstgrenze abgeleitet. Der Nachweis der Höchstgrenze wurde mit Hilfe der neuesten Ergebnisse in der einschlägigen Fachliteratur inbezug auf die Untersuchungen der Torsionsprobleme von prismatischen Stäbe aus heterogenem Material durchgeführt.