

A LINEÁRIS FÜGGVÉNYEGYENLETEK EGY OSZTÁLYÁRÓL

Írta: HOSSZÚ MIKLÓS

1. §. Bevezetés

1. A dolgozatban néhány

$$(1) \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i F(\sigma_i x) = 0$$

típusú függvényegyenletet fogunk tekinteni, ahol az ismeretlen F függvény értelmezési tartománya egy X halmazból alkotott

$$X^n = X \times X \times \dots \times X$$

n -tényezős direkt szorzat, míg a függvényértékek egy A Abel-féle csoport elemei, α_i, σ_i pedig az A illetve az X^n elemeire ható operátorok. Az x független változónak eszerint n komponense van; ezt szükség esetén az

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in X$$

írásmóddal lehet hangsúlyozni.

σ_i gyanánt háromféle operátort fogunk használni:

$$\pi_i x = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

$$\theta_i x = (x_1, \dots, x_{i-1}, c, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

$$\gamma^i x = (x_{i+1}, \dots, x_{i+n}), \quad x_{k+n} = x_k.$$

Ezek közül π_i az X^n -et képezi le X^{n-1} -re, θ_i az X^n -et vetíti az $x_i = c$ egyenlettel meghatározott „koordinátasíkra”, γ^i pedig n periódusú ciklikus operátor¹. Itt és a későbbiekben is a γ^i operátor jele alatt az indexeket mod n redukálni kell.

2. A szokásos

$$(F + G)(x) = F(x) + G(x), \quad x \in X^n$$

értelmezés alapján az A -beli függvényértékkel rendelkező függvények összes-

¹ Sok esetben, pl. a 2. tételben is, csupán a periodikusság játszik szerepet, a megfontolások minden változtatás nélkül átvihetők erre az általánosabb esetre is, midőn a koordinátákra bontás nincs feltéve. Így a vizsgálat kiterjed pl. egy függvény iteráltjait tartalmazó lineáris függvényegyenletekre is [2, 3]. A szögletes zárójelben álló számok a dolgozat végén található irodalomra utalnak.

sége maga is egy L^n Abel-féle csoportot alkot. Ennek alcsoportja az (1) egyenlet megoldásainak összessége, ugyanis a felírt függvényegyenlet nyilván lineáris, mert ha F és G két megoldás, akkor $F \pm G$ is az. Általában is egy lineáris függvényegyenlet összes megoldásának megadása egy S alcsoport meghatározását jelenti. A megoldás *legáltalánosabb alakja* a megoldásban szereplő *tetszőleges elemek* E halmazából származtatva

$$F = \chi f, \quad f \in E$$

alakban adja meg az S alcsoport minden egyes F elemét.

Gyakori eset, hogy az L^n csoportnak csak valamely M részét választjuk ki az (1) egyenletben megengedett függvények osztályának, vagyis (1) megoldását valamilyen mellékfeltétel kirovásával keressük, pl. csak (bizonyos topológia szerint) folytonos függvényeket tekintünk, vagy pl. csak olyanokat engedünk meg, melyek függetlenek bizonyos x_i ($i \in \kappa$) változóktól, amit a θ operátor segítségével a

$$(2) \quad F(x) = F(\theta_\kappa y)$$

feltételi egyenlettel tudunk kifejezni. (Ez utóbbinál κ az $1, \dots, n$ indexhalmaz bizonyos részhalmazát jelöli.) Ilyenkor a megoldást szolgáltató tetszőleges elemek E halmazától is megkívánjuk, hogy az L^n -nel közös része M része legyen.

Maga E rendszerint L^n -ből és az L^n -re ható operátorok tartományából vagy ezek egy részéből áll, de nyilván határozatlan egy tetszőleges 1—1 leképezés erejéig, ugyanis az $e \in E$ elemekre az

$$e \rightarrow e' = \varepsilon e$$

1—1 leképezést alkalmazva olyan E' halmazt nyerünk, melynek elemeiből a megoldások

$$F = \chi \varepsilon^{-1} e' \quad e' \in E'$$

alakban származtathatók. Határozatlan továbbá E olyan szempontból is, hogy χE többszörösen fedheti S -et, vagyis egy-egy $F \in S$ megoldást több $f, g \in E$ elemből is származtathatunk az

$$F = \chi f = \chi g$$

alakban. Célszerű tehát kiválasztani E -nek azt a legszűkebb $\bar{E}$ részét, melyre $\chi \bar{E}$ egyszeresen fedi S -et, mert így kapjuk meg a megoldásban szereplő *lényeges* tetszőleges elemeket, melyek közül már egyik sem hagyható el a teljes megoldási rendszer származtatásához. Ez az eset áll fenn pl. a lineáris differenciálegyenletek esetében, midőn a legáltalánosabb megoldás egyetlen lineárisan független (alap) rendszerből származtatható.

A dolgozatban vizsgált esetekben, midőn E is csoport, és χ homomorfizmus, mely E -t S -re képezi le, a lényeges tetszőleges elemek E halmaza nyilván E -nek a χ homomorfizmus magja szerinti faktorcsoportjával izomorf. Ez tehát azt jelenti, hogy példáinkban egy $\bar{E}$ legszűkebb rendszert úgy nyerrünk, ha megkeressük azoknak az $e \in E$ elemeknek az N alcsoportját, melyeket χ a 0-ra képez le, és E -ből kiválasztjuk az $fN(f \in E)$ mellékosztályoknak egy teljes reprezentáns rendszerét.

Minthogy a megoldásban szereplő tetszőleges elemek halmaza és a megoldás legáltalánosabb alakjának fogalma a megoldást képező alcsoport fogalmához képest több határozatlanságot tartalmaz, fő feladatunknak mindig ez utóbbi megadását tekintjük egy lineáris függvényegyenlet megoldásakor.

3. A probléma történetét illetően megemlítjük, hogy M. GHERMANESCU [1, 4–10] kezdeményezte a

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) F(\gamma^i x) = b(x), \quad x \in X^n$$

inhomogén függvényegyenlet vizsgálatát, melynek legáltalánosabb megoldása nyilván előállítható a homogén egyenlet általános megoldása és egy partikuláris megoldás összegeként. Fontos szerepet játszik a

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(\gamma^i x) F(\gamma^{i+j} x) = b(\gamma^j x), \quad j = 1, \dots, n$$

egyenletrendszer lineárisan független egyenleteinek száma. Külön vizsgálatot igényel a homogén egyenlet, ahol $\alpha_i = 1$. Ekkor is különösen az a speciális eset bizonyult nehéznek, midőn $F(x)$ független bizonyos x_i komponensektől. A nehézséget az okozza, hogy a megoldást is legfeljebb annyi változós függvényekkel kell megadni, mint ahány változótól ténylegesen függ maga F , vagyis megköveteljük, hogy a megoldásban szereplő tetszőleges elemek E halmaza az (1)-ben megengedett (2) alakú függvények M halmazának része legyen. Így látni fogjuk, hogy a specializálás ez esetben korántsem jelent egyszerűsítést. Ekkor a függvényegyenlet megoldása az 1. segédételben összefoglalt kombinatorikai megfontolásokat igényli.

A $\sigma_i = \gamma^i$ eset felfogható kissé általánosabban úgy is, hogy ekkor $\sigma_i x = \gamma \sigma_{i-1} x$, ahol γ n periódusú operátor. Ebben a felfogásban H. KIESEWETTER [12] vizsgálatait (3) általánosításának tekinthetjük, midőn a σ_i operátorok nem a $\sigma_i = \gamma \sigma_{i-1}$ összefüggés alapján alkotnak ciklust, hanem pl.

$$\sigma_i x = \varphi(\sigma_{i-1} x, \sigma_{i-2} x)$$

alapján, ahol φ olyan függvény, mely $X^n \times X^n$ -t X^n -re képezi le, és az indexeket mod n redukálni kell.

(3) általánosításával kapcsolatban vetődött fel az a probléma, hogy mi az egyenlet megoldása, ha a γ^i ciklikus permutációk helyett az $1, 2, \dots, n$ indexek teljes permutációs csoportjának egyéb elemeit tekintjük [7].

A $\sigma_i = \pi_i$ operátorral az (1) függvényegyenlet a kombinatorikus topológiában játszik fontos szerepet [2, 13–16].

4. A dolgozat 2. §-ában a homológia csoportok meghatározásával foglalkozunk, függvényegyenlet megoldási módszerekkel.

A 3. §-ban (3) megoldását adjuk meg a (2) mellékfeltétellel, abban a speciális esetben, midőn

$$\alpha_i(x) = 1, \quad b(x) = 0.$$

Bebizonyítjuk, hogy akkor (3) megoldásainak S alcsoportja az

$$f_i(x) - f_i(\gamma^i x)$$

alakú függvények S_i alcsoportjainak összege, ahol $f_i \in L^n$

$$f_i(x) = f_i(\theta_{\kappa(\kappa-i)} x), \quad x \in X^n$$

tulajdonságú függvény, azaz független az x_k [$k \in \kappa \cup (\kappa - i)$] változóktól.

Általánosítjuk [1] eredményeit is, amelyben a szerzők a

$$\kappa = p + 1, p + 2, \dots, n$$

esetet vizsgálták, továbbá (11) alatt explicit alakban előállítjuk az f_i függvényeket, kifejezve azokat F segítségével, vagyis adott F megoldáshoz megadjuk az öt

$$F(x) = \sum_{i=1}^n [f_i(x) - f_i(\gamma^i x)]$$

alakban előállító f_i függvényeket. A felírt képletekben a szokásnak megfelelően $\kappa \cup \nu$ és $\kappa \pm \nu$ a halmazok egyesítését, illetve az elempárok összegéből vagy különbségéből alkotott halmazt jelöli.

2. §. A homológia csoportok függvényegyenletei

1. A kombinatorikus topológiában egy $f \in L^n$ függvényt röviden n -dimenziós *lánchnak* szokás nevezni. Értelmezzük egy $f \in L^{n-1}$ lánc n -dimenziós *határát* a

$$(\Delta f)(x) = \sum_{i=1}^n (-1)_i f(\pi_i x), \quad x \in X^n$$

egyenlettel. Az ilyen határokból alkotott láncok összessége az L^n -nek egy D^n alcsoportja. A

$$(4) \quad (\Delta F)(x) = 0, \quad x \in X^{n+1}$$

feltételt (függvényegyenletet) kielégítő (0 határú) $F \in L^n$ láncok, az ún. *ciklusok* összessége is alcsoportja L^n -nek, ezt Z^n -nel jelöljük. A $H^n = Z^n/D^n$ faktorcsoport az ún. *homológia* csoport. Ha $n=1$, akkor (4)

$$-F(x_2) + F(x_1) = 0, \quad x_i \in X$$

-ra redukálódik, ekkor $F = \text{állandó}$. Minthogy továbbá $n > 1$ esetén $H^n = 0$ [16], ezért ekkor $Z^n = D^n$. Fennáll tehát az

1. TÉTEL. A (4) függvényegyenlet minden megoldása felírható az

$$(5) \quad F(x) = \begin{cases} (\Delta f)(x) & , \text{ ha } n > 1; \\ \text{állandó,} & \text{ ha } n = 1 \end{cases}$$

alakban, ahol f alkalmas L^{n-1} -beli függvény, Δ pedig a fentebb értelmezett határképző operátor.

A tétel más szavakkal azt mondja ki, hogy egy $n > 1$ -dimenziós lánc akkor és csak akkor ciklus, ha határa egy $n-1$ -dimenziós láncnak. Ebből következik az is, hogy két $n-1$ -dimenziós lánc határa akkor és csak akkor egyezik meg, ha különbségük ciklus, vagyis egymástól legfeljebb egy $n-2$ -dimenziós lánc határában különböznek. Eszerint az n -dimenziós ciklusok Z^n alcsoportját már az $n-1$ -dimenziós láncok határai közül azok is megadják, melyek páronként nem csupán egy $n-2$ -dimenziós lánc határában térnek el egymástól, és e rendszer már legszűkebb, nem tartalmaz felesleges elemet. Vagyis az n -dimenziós ciklusok Z^n alcsoportja a Δ leképezésben éppen az fD^{n-1} ($f \in L^{n-1}$) mellékosztályok egy reprezentáns rendszerének a képe. (Mint-hogy Δ az L^{n-1} -nek L^n -be való homomorfizmusa, és Z^{n-1} a homomorfizmus magja, ezért közvetlenül is világos, hogy a $D^n = \Delta L^{n-1}$ homomorf kép izomorf L^{n-1}/Z^{n-1} -nel.) A bevezetésben tett megjegyzés szerint tehát érvényes a következő:

1' TÉTEL. A (4) függvényegyenlet legáltalánosabb megoldása (5), ahol a megoldásban szereplő tetszőleges f függvények halmaza izomorf az L^{n-1}/D^{n-1} faktorcsoporttal.

2. Függvényegyenlet megoldási módszerekkel is könnyen bizonyítható az 1. tétel, [16]-ra való hivatkozás nélkül. Legyen ugyanis $n > 1$, és $x_{n+1} = c$ rögzített, akkor (4)-ből az

$$f(\bar{x}) = (-1)^{n+1} F(x_1, \dots, x_n, c), \quad \bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in X^n$$

jelöléssel valóban

$$\begin{aligned} F(\bar{x}) &= F(\pi_{n+1}x) = -(-1)^n \sum_{i=1}^n (-1)^i F(\pi_i x) = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{n+1} (-1)^i F(\pi_i x) = \sum_{i=1}^n (-1)^i f(\pi_i \bar{x}) = (\Delta f)(\bar{x}). \end{aligned}$$

Viszont ha

$$F(\bar{x}) = (\Delta f)(\bar{x}), \quad \bar{x} \in X^n$$

teljesül, akkor fennáll

$$F(\pi_i x) = \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^j f(\pi_j \pi_i x) + \sum_{j=i+1}^{n+1} (-1)^{j-1} f(\pi_j \pi_i x),$$

$$(\Delta F)(x) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i F(\pi_i x) = \sum_{j < i} (-1)^{i+j} f(\pi_j \pi_i x) + \sum_{j > i} (-1)^{i+j-1} f(\pi_j \pi_i x) = 0,$$

vagyis

$$F(\bar{x}) = (\Delta f)(\bar{x}), \quad \bar{x} \in X^n$$

tetszőleges $f \in L^{n-1}$ függvénnyel ki is elégíti (4)-et.

Az $n = 1$ esetben a tétel állítása nyilvánvalóan teljesül.

3. Megjegyezzük, hogy pl. az $n = 2$ esetben Z^2 -t az

$$(6) \quad F(x_1, x_2) + F(x_2, x_3) = F(x_1, x_3)$$

függvényegyenletet kielégítő függvények alkotják, míg D^2 -t a

$$(7) \quad \Delta f = f(x_1) - f(x_2)$$

alakúak, melyek közül az $f(c) = 0$ feltételt kielégítő f függvényhez tartozók valóban az előző függvényegyenlet legáltalánosabb megoldásai [11, 17, 18]. Finomítható tehát az az állítás, hogy (6) legáltalánosabb megoldását a (7) képlet adja, ahol f tetszőleges egyváltozós függvény. Ugyanis a felírt (7) képlet többszörösen is megadja (6) teljes megoldását. E példában a bevezetés jelöléseit követve, tekinthetjük úgy, hogy

$$E = L^{n-1}$$

$$\chi f = (\Delta f)(x), \quad N = \chi^{-1} 0 = D^{n-1},$$

tehát $n = 1$ esetén $N = D^1$ a

$$\chi f = f(x_1) - f(x_2) = 0$$

feltételt kielégítő, $f(x) = \text{állandó}$ függvények összessége, s így az

$$f(c) = 0$$

feltételt kielégítő függvények összessége L^1 -nek L^1/D^1 -gyel izomorf része. Algebrai kifejezések nélkül szemléletesebben ezt úgy mondhatjuk, hogy minden kétváltozós függvény, amely

$$F(x_1, x_2) = g(x_1) - g(x_2)$$

alakban előállítható, előáll

$$F(x_1, x_2) = f(x_1) - f(x_2), \quad f(c) = 0$$

alakban is, éspedig egyértelműen. Legyen ugyanis pl. $f(x) = g(x) - g(c)$, akkor valóban fennáll az utóbbi egyenlet, és az $x_2 = c$ helyettesítés igazolja, hogy az ilyen $f(x) = F(x, c)$ már egyértelműen meg is van határozva F -fel.

Megjegyezzük még, hogy szokás Δ -t másként is értelmezni. Pl. [14]-ben (6) helyett

$$F(x_1, x_2 x_3) + F(x_2, x_3) = (x_1 x_2, x_3) + F(x_1, x_2) x_3, \quad x_i \in X$$

lép fel, ahol azonban X maga is csoport, éspedig A -nak operátor csoportja. Ekkor Z^1 meghatározásának problémája is érdekes, az

$$F(x_1 x_2) = F(x_1) x_2 + F(x_2), \quad x_i \in X$$

ún. keresztezett homomorfizmusok megkeresése a feladat.

3. §. A ciklikus egyenlet vizsgálata

1. Foglalkozzunk a

$$(8) \quad \sum_{i=1}^n F(\gamma^i x) = 0, \quad x \in X^n$$

függvényegyenlet vizsgálatával.

2. TÉTEL. Adott A Abel-féle csoport esetén, melyen az $na = b$ egyenlet egyértelműen megoldható $a \in A$ -ra, a (8) függvényegyenlet legáltalánosabb megoldása

$$(9) \quad F(x) = \nabla_1 f(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - f(\gamma x),$$

ahol $f \in L^n$ tetszőleges függvény.

Bizonyítás. (8) alapján

$$F(x) = - \sum_{i=1}^{n-1} F(\gamma^i x),$$

tehát

$$F(x) = 1/n[(n-1)F(x) + F(x)] = 1/n \sum_{i=1}^{n-1} [F(x) - F(\gamma^i x)] =$$

$$= 1/n \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i [F(\gamma^{j-1} x) - F(\gamma^j x)] = f(x) - f(\gamma x),$$

ahol

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1/n \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i F(\gamma^{j-1} x).$$

Viszont nyilvánvaló, hogy (9) tetszőleges $f \in L^n$ esetén ki is elégíti (7)-et:

$$\sum_{i=1}^n F(\gamma^i x) = \sum_{i=1}^n [f(\gamma^i x) - f(\gamma^{i+1} x)] = \sum_{i=1}^n f(\gamma^i x) - \sum_{i=2}^{n+1} f(\gamma^i x) = 0.$$

Látjuk, hogy a megoldások S^1 alcsoportja L^n -ből a ∇_1 leképezéssel származtatható, esetünkben tehát a bevezetés jelölései szerint $E=L^n$, és $\chi=\nabla_1$ endomorfizmus, mely L^n -et S^1 -re képezi le. Az endomorfizmus magja a

$$\nabla_1 g = g(x) - g(\gamma x) = 0$$

feltételt kielégítő (a ciklikus operátorral szemben invariáns) g függvények C alcsoportja, tehát $\bar{E}$ gyanánt választható L^n -nek az L^n/C -vel izomorf része.

A bizonyítás egyszersmind megadja $f(x)$ -et is, azaz adott $F(x)$ -hez a (9) függvényegyenlet legáltalánosabb

$$f(x) = g(x) + 1/n \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i F(\gamma^{j-1} x), \quad g(x) = g(\gamma x)$$

megoldását.

2. Térjünk rá ezután (8) megoldására abban az esetben, midőn

$$(2) \quad F(x) = F(\theta_\kappa x), \quad x \in X^n$$

teljesül valamely adott κ indexhalmazra. Észrevesszük, hogy (9)-hez hasonlóan a

$$(10) \quad \sum_{i=1}^{n-1} [f_i(x) - f_i(\gamma^i x)], \quad f_i(x) = f_i(\theta_{\kappa \cup \{x-i\}} x), \quad x \in X^n$$

alakú függvények összessége kielégíti (8)-at, továbbá (2)-t is, hiszen $f_i(x)$ és $f_i(\gamma^i x)$ -ben x_k ($k \in \kappa$) éppen a k -adik, illetve $k-i$ -edik helyen szerepelne, az ezen a helyen álló változóktól azonban az f_i függvény (10)₂ alapján független.

Jelöljük S_κ^n -nel az L^n csoportnak a (10) alatti alakú függvényeket tartalmazó alcsoportját. (Világos, hogy a (10) alakú függvények összege és különbsége is ugyanilyen alakú.)

3. TÉTEL. Legyen A^n Abel-féle csoport, melyen az $ma = b$ egyenletnek van egyértelmű $a = b/m$ megoldása, tetszőleges $m = 1, 2, \dots, n$ esetén. Akkor a (8) függvényegyenlet (2)-t kielégítő minden $F \in L^n$ megoldása az S_κ^n rész-csoport eleme, azaz felírható a (10) alakban, alkalmas $f_i \in L^n$ függvényekkel.

1. SEGÉDTÉTEL. Jelöljük K_r^m -nel az $1, \dots, m$ elemekből alkotott r -ed-osztályú kombinációk halmazát. Akkor bármely $T_\nu \in A$ ($\nu \in K_r^n$) sorozat és rögzített m esetén fennáll

$$\sum_{m \in \nu \in K_r^n} \sum_{i=1}^n T_{\nu-i} = r \sum_{\nu \in K_r^n} T_\nu.$$

2. SEGÉDTÉTEL. Ha egy $T_\nu \in A^n$ ($\nu \in K_r^n$) sorozat olyan tulajdonságú, hogy valamely rögzített m esetén fennáll

$$T_\nu = T_{\nu \cup m}, \quad T_{(1, \dots, n)} = 0,$$

akkor

$$T_m = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(-1)^{r-1}}{r} \sum_{m \in \nu \in K_r^n} \sum_{i=1}^n T_{\nu-i}.$$

3. SEGÉDTÉTEL. Ha $F(x)$ kielégíti (8) és (2)-t, akkor

$$\sum_{i=1}^n F(\theta_{\nu-i} x) \in S_x^n$$

teljesül bármely $\nu \in K_r^n$ esetén, mely x -t (vagy alkalmas k -val $x-k$ -t) részhalmazként tartalmazza.

3. Foglalkozunk először a segédtételek bizonyításával.

Ad. 1. Az 1. segédtételben felírt egyenlőség jobb oldalán az összeg minden tagja pontosan r -szer szerepel a bal oldalon.

Legyen ugyanis ν egy eleme n_0 . Akkor $\nu-i$ ($i=1, \dots, n$) éppen r esetben tartalmazza n_0 -t, ahányszor $\nu \in K_r^n$ r számú eleme közül valamelyik az n_0 helyére kerül $\nu-i$ -ben. Legyen

$$\nu - p_j \quad (j=1, \dots, p)$$

ezek közül az összes különböző, és

$$\nu - s_j = \nu, \quad (j=1, \dots, s).$$

Mínthogy

$$\nu - p_j - s_k \quad (j=1, \dots, p; \quad k=1, \dots, s)$$

megadja az összes lehetséges r számú olyan $\nu-i$ alakú indexhalmazt, mely n_0 -t tartalmazza, ezért $ps=r$.

Egy adott $\nu = \bar{\nu} - i$ -t nyilván csak oly $\bar{\nu} \in K_r^n$ -ből kiindulva kaphatunk, melyre

$$\bar{\nu} = \nu + i = \nu - p_j$$

teljesül valamilyen $j=1, \dots, p$ esetén. Ezek mindegyikéből s féleképpen áll elő

$$\nu = \bar{\nu} - i = \nu - p_j - i = \nu - s_k,$$

éspedig akkor, amikor

$$i = s_k - p_j \quad (k=1, \dots, s).$$

Tehát a bal oldali összeg pontosan $ps=r$ esetben tartalmaz $\nu \in K_r^n$ indexű tagot.

Ad 2. Az 1. segédtételben szereplő összeget átrendezve, kapjuk, hogy

$$\sum_{m \in \nu \in K_r^n} T_\nu = 1/r \sum_{m \in \nu \in K_r^n} \sum_{i=1}^n T_{\nu-i} - \sum_{m \notin \nu \in K_r^n} T_\nu,$$

tehát ismételt alkalmazással a

$$\begin{aligned} T_m &= \sum_{m \in \nu \in K_1^n} T_\nu = 1/1 \sum_{m \in \nu \in K_1^n} \sum_{i=1}^n T_{\nu-i} - \sum_{m \notin \nu \in K_1^n} T_\nu = \\ &= 1/1 \sum_{m \in \nu \in K_1^n} \sum_{i=1}^n T_{\nu-i} - \sum_{m \in \nu \in K_2^n} T_\nu = 1/1 \sum \dots - 1/2 \sum \dots + \sum_{m \notin \nu \in K_2^n} T_\nu = \dots \end{aligned}$$

egyenlőség sorozat igazolja a 2. segédétel állítását.

Ad 3. Helyettesítsünk (8)-ban x_k ($k \in \nu$) helyébe c -t, akkor

$$\sum_{i=1}^n F(\gamma^i \theta_\nu x) = 0,$$

tehát

$$\sum_{i=1}^n F(\theta_{\nu-1} x) = \sum_{i=1}^n [F(\theta_{\nu-i} x) - F(\gamma^i \theta_\nu x)], \quad (x \subseteq \nu)$$

valóban speciális S_x^n -beli függvény.

4. Térjünk rá ezután a 3. tétel bizonyítására. Mint előrebocsátottuk, S_x^n minden eleme kielégíti (8)-at és (2)-t. Azt kell tehát csak bizonyítani, hogy (8) minden (2) alakú megoldása S_x^n -hoz tartozik. E célból válasszuk a 2. segédételben szereplő sorozat elemeiként $T_\nu = F(\theta_{x-m+\nu} x)$ -et. Akkor a 2. segédétel feltételei teljesülnek, ugyanis bármely $m \in x$ esetén

$$(x-m) + \nu \cup m(x-m+\nu) \cup (x-m+m) = (x-m+\nu) \cup x,$$

tehát (2)-t is figyelembe véve,

$$T_{\nu \cup m} = F(\theta_{x-m+\nu \cup m} x) = F(\theta_{(x-m+\nu) \cup x} x) = F(\theta_x \theta_{x-m+\nu} x) = F(\theta_{x-n+\nu} x) = T_\nu,$$

továbbá (8)-ból az $x_k = c$ ($k = 1, \dots, n$) helyettesítéssel

$$n T_{(1, \dots, n)} = n F(\theta_{(1, \dots, n)} x) = n F(c, c, \dots, c) = 0$$

adódik. Így a 2. és 3. segédételt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$F(x) = F(\theta_x x) = F(\theta_{x-m+n} x) = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(-1)^{r-1}}{r} \sum_{m \in \nu \in K_r^n} \sum_{i=1}^n F(\theta_{x-m+\nu-i} x) \in S_x^n,$$

s ezt kellett éppen bizonyítani.

Figyelemre méltó, hogy a bizonyítás alapján $F(x)$ -hez effektíve is megadható egy (10) alakú előállítás, pl. az

$$(11) \quad f_i(x) = g(x) + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(-1)^{r-1}}{r} \sum_{m \in \nu \in K_r^n} F(\theta_{x-m+\nu-i} x)$$

függvénnyel, ahol $g(x) = g(\gamma x)$ tetszőleges ciklikus invariáns függvény.

Megfigyelhetjük, hogy a 3. segéd-tételben és a 3. tétel teljes bizonyítása során sem használtuk fel a (8) egyenletet teljes általánosságban, hanem csak rögzített $x_k = c$ ($k \in \kappa$) választás esetén, tetszőlegesen változó x_i ($i \notin \kappa$)-val.

5. Az S_x^n megoldások alcsoportját az L^n csoportból a következő módon lehet származtatni: a $k \in \kappa \cup (\kappa - i)$ indexű változók helyébe $x_k = c$ -t helyettesítve olyan f_i függvények E_i alcsoportját kapjuk, melyek kielégítik az

$$f_i(x) = f_i(\theta_{\kappa \cup (\kappa - i)} x), \quad x \in X^n$$

összefüggést, azaz függetlenek az x_k ($k \in \kappa \cup (\kappa - i)$) változóktól. Ezután az E_i elemekre értelmezzük a

$$\nabla_i f = f(x) - f(\gamma^i x)$$

operátort, mely nyilván endomorfizmus, amely E_i -t S_x^n -ba képezi le. Így a 3. tétel állítása úgy fogalmazható, hogy (8)-nak a (2) feltétellel kijelölt M halmazon minden megoldása az

$$(10') \quad S_x^n = \sum_i \nabla_i E_i$$

alcsoport eleme.

A bevezetésben mondtak szerint a legáltalánosabb megoldás származtatható $E = \sum_i E_i$ -nek olyan részhalmazából, melyet a ∇_i leképezések egyrétűen képeznek le S_x^n -ra. Keressük tehát E ezen részét!

A következő észrevételeket tehetjük:

a) Ha valamely i, j indexpárra

$$\nabla_i E_i \cap \nabla_j E_j = N \neq 0,$$

akkor egyikükből, pl. E_j -ből $\nabla_j^{-1} N$ elhagyható.

Ez az eset áll elő pl. akkor, ha $j = n - i$; akkor $\nabla_{n-i} E_{n-i} = \nabla_i E_i$ miatt az E_i halmazok közül elég csupán a $2i \leq n$ feltételt kielégítő indexűeket tekinteni.

Ugyanis bármely $f \in E_{n-i}$ esetén

$$\nabla_{n-i} f = f(x) - f(\gamma^{n-i} x) = h(x) - h(\gamma^i x) = \nabla_i h,$$

ahol

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(\gamma^{n-i} x)$$

nyilván kielégíti a

$$h(x) = h(\theta_{\kappa \cup (\kappa - i)} x)$$

feltételt is, mivelhogy $f \in E_{n-i}$ független a $k \in \kappa \cup [\kappa - (n - i)]$ indexű változóitól, tehát

$$h(x) = -f(\gamma^{n-i} x) = -f(x_{1+n-i}, \dots, x_{r+n-i}, \dots)$$

sem fog függeni az

$$x_k, k \in \kappa \cup [\kappa - (n - i)] + n - i = (\kappa + n - i) \cup \kappa = \kappa \cup (\kappa - i)$$

változóktól.

Hasonló eset áll elő pl. akkor, ha $j = ri$ esetén

$$(12) \quad x \cup (x - j) \supseteq \bigcup_{p=0}^r (x - pi)$$

teljesül; ekkor $\nabla_j E_j \subseteq \nabla_i E_i$, ugyanis akkor bármely $f \in E_j$ esetén írható

$$\begin{aligned} \nabla_j f = f(x) - f(\gamma^j x) &= f(x) - f(\gamma^i x) + f(\gamma^i x) - f(\gamma^{2i} x) + \dots + \\ &+ f(\gamma^{(r-1)i} x) - f(\gamma^{ri} x), \end{aligned}$$

mely valóban speciális

$$\nabla_i h_p, \quad h_p(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(\gamma^{pi} x) \in E_i$$

alakú függvények összege, éspedig olyanoké, melyek bizonyos x_k ($k \in x \cup (x - i)$) változóktól sem függő $h_p(x)$ -ből származnak. Hogy $h_p \in E_i$, azaz

$$h_p(x) = h_p(\theta_{x \cup (x-i)} x)$$

teljesül, az nyilvánvaló h_p értelmezése és (12) alapján, hiszen $f(\gamma^{pi} x)$ független a

$$q(\in (x - pi) \cup [x - (p+1)i]) = x \cup (x - i) - pi$$

-edik helyen álló változótól, ahol

$$h_p(x) = f(\gamma^{pi} x) = f(x_{1+pi}, \dots, x_{k+pi}, \dots)$$

-ben éppen x_k ($k \in x \cup (x - i)$) állana.

b) Minthogy éppen a $g(x) = g(\gamma^i x)$ tulajdonságú $g \in E_i$ függvényekre áll $\nabla_i g = 0$, tehát ezek alcsoportját C^i -vel jelölve, mindegyik E_i helyett vehető egy az E_i/C^i -vel izomorf rész.

Az a) redukció alapján azt látjuk, hogy a legáltalánosabb megoldást adó (10), illetve (10') formulában az összegezést nem kell $i = 1, 2, \dots, n$ -re elvégezni, a tagok közül egyesek összevonhatók mint azonos típusúak; pl. az összegezést elég csak az $1, \dots, [n/2]$ indexek olyan részhalmazára végezni, melyet a (12) feltételt kielégítő j indexek elhagyásával nyerünk.

IRODALOM

- [1] J. ACZÉL—M. GHERMANESCU—M. HOSSZÚ, On cyclic equations, *Az MTA Mat. Kut. Int. Közleményei*, 5 (1960), 215—221.
- [2] J. ERDŐS, A remark on the paper "On some functional equations" by S. Kurepa, *Glasnik Mat.—Fiz. Astr. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske*, (2) 14 (1959), 3—5.
- [3] N. GERCEVANOFF, Quelques procédés de la résolution des équations fonctionnelles linéaires par la méthode d'itération, *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS*, 39 (1943), 207—209.
- [4] M. GHERMANESCU, Sur quelques équations fonctionnelles linéaires, *Bulletin Soc. Math. France*, 68 (1940), 109—128.
- [5] M. GHERMANESCU, O clasa de ecuații funcționale, *Pozitiva*, 1 (1940), 121—125.

- [6] M. GHERMANESCU, Sur une classe d'équations fonctionnelles du premier ordre, *Acta Mathematica*, **75** (1943), 191—218.
- [7] M. GHERMANESCU, Sur une équation fonctionnelle, *Bulletin Sci. de l'École Polyt. de Timişoara*, **11** (1943), 3—7.
- [8] M. GHERMANESCU, Ecuatii funcţionale liniare, *Buletinul Şti.* **3** (1951), 245—259.
- [9] M. GHERMANESCU, Ecuatii funcţionale cu argument funcţional n -periodic, *Acad. R. P. Romîne Bul. şti. mat. fiz.*, **9** (1957), 43—78.
- [10] M. GHERMANESCU, O clasă de ecuaţii funcţionale liniare, *Studii şi Cercetări Matematice*, **1** (1958), 113—126.
- [11] S. GOŁĄB, O metryce łątowej ogólnych przestrzeni I, Zasada Chasles'a, *Wiadomosci Math.*, **38** (1933), 1—12.
- [12] H. KIESEWETTER, *Struktur linearer Funktionalgleichungen im Zusammenhang mit N. H. Abels Theorem*, Dissertation, Jena, 1958.
- [13] S. KUREPA, On some functional equations, *Glasnik Mat.—Fiz., Astr. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske* (2) **11** (1956), 3—5.
- [14] A. G. KUROS, *Csoportelmélet*, Budapest, 1955.
- [15] L. SZ. PONTRJAGIN, *Kombinatorikus topológia*, Budapest, 1955.
- [16] T. RADO—P. V. REICHELDERFER, *Continuous Transformations in Analysis*, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955.
- [17] P. ROSSIER, Sur l'équation de Chasles, *C. R. Soc. Phys. Hist. Nat. Genève*, **62** (1945) 95—97.
- [18] D. M. SINZOW, Über eine Funktionalgleichung, *Archiv der Math. und Physik*, (3) **6** (1903), 216—217.
- [19] A. VALERIAS, *Two new types of linear functional equations* (Spanish), Buenos Aires, 1944.

(Beérkezett: 1960. VI. 6.)

*A Miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem
Matematikai Intézete*