# SÚLYOZOTT (0, 2)-INTERPOLÁCIÓ ULTRASZFÉRIKUS POLINOMOK GYÖKEIN

Írta: BALÁZS JÁNOS

## 1. §. Bevezetés

TURÁN PÁL nevezte el (0, 2)-interpolációs polinomoknak azokat a legfeljebb $(2n-1)$-edfokú $R_n(x)$ polinomokat, amelyek az adott

$$(1.1) \qquad -1 \leqq \xi_n < \xi_{n-1} < \cdots < \xi_2 < \xi_1 \leqq +1$$

pontokban a következő egyenlőségeket teljesítik

$$(1.2) \qquad R_n(\xi_\nu) = \alpha_\nu, \quad R_n''(\xi_\nu) = \beta_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ahol $\alpha_\nu, \beta_\nu$, $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ tetszés szerint megadott valós számok. A (0, 2)-interpolációs polinomok vizsgálatát TURÁN PÁL kezdeményezte és a következő kérdéseket vetette fel:

*a*) Megadott $n$ különböző $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ alappont esetén *létezik-e* olyan legfeljebb $(2n-1)$-edfokú $R_n(x)$ polinom, amelyre az (1.2) alatti egyenlőségek teljesülnek?

*b*) Ha ilyen $R_n(x)$ polinom létezik, akkor *egyetlen egy, vagy több ilyen* polinom létezik-e?

*c*) Ha ilyen $R_n(x)$ polinom egyértelműen meghatározható, hogyan lehet az $R_n(x)$ polinomot további vizsgálatok szempontjából *kezelhető alakban* előállítani?

*d*) Ha az adott

$$-1 \leqq \xi_{n,n} < \xi_{n-1,n} < \cdots < \xi_{2,n} < \xi_{1,n} \leqq +1, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

alappontrendszerhez egyértelműen meghatározhatók az $R_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, interpolációs polinomok és $\alpha_{\nu n} = f(\xi_{\nu n})$, $(\nu = 1, 2, \ldots, n;$ $n = 1, 2, \ldots)$, ahol $f(x)$ egy folytonos függvényt jelent, $\beta_{\nu n}$ valós számok megfelelően adottak, akkor vajon az $R_n(x)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, interpolációs polinomok sorozata a $[-1, +1]$ intervallumban *konvergál-e* az $f(x)$ függvényhez vagy nem; s ha konvergál, akkor az $f(x)$ függvénynek milyen feltételeket kell a folytonosságon kívül még teljesítenie?

Ha az (1.1) interpolációs alappontok, továbbá $r_1, r_2, \ldots, r_n$ pozitív egész számok és $\gamma_{ki}$ értékek adottak, és keressük azt a legkisebb fokú $H(x)$ polinomot, amelyre

$$H^{(i)}(\xi_k) = \gamma_{ki}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n; \; i = 0, 1, 2, \ldots, r_k - 1)$$

akkor nem nehéz bebizonyítani, hogy a feladatnak egyetlen egy megoldása van. Az interpolációnak ezt a módját, ilyen általános esetben, HERMITE [1] vizsgálta első ízben. A $H(x)$ úgynevezett Hermite-féle interpolációs polinom fokszáma nem nagyobb az $m-1$ számnál, ahol

$$m=r_1+r_2+\cdots+r_n.$$

Abban az esetben, ha $r_1=r_2=\cdots=r_n=1$; tehát ha a legfeljebb $(n-1)$-edfokú interpolációs polinom a $\xi_\nu$, $(\nu=1,2,\ldots,n)$, alaphelyeken a megadott $\gamma_{\nu 0}=\gamma_\nu$, $(\nu=1,2,\ldots,n)$, értékekkel egyenlő, az interpolációs polinomok egy-egy alakját NEWTON és LAGRANGE határozták meg első ízben. Ezen interpolációs polinomok esetében a konvergencia már a múlt század vége óta a vizsgálatok tárgyát képezi. A vizsgálatok kezdeményezése RUNGE és BOREL nevéhez fűződik. E vizsgálatokban több magyar matematikus ért el igen szép eredményeket.

Ha $r_1=r_2=\cdots=r_n=2$, akkor az interpolációs polinomoknak FEJÉR [2] igen jól kezelhető kifejezését adta meg és bizonyos adott

$$-1\leqq\xi_{n,n}<\xi_{n-1,n}<\cdots<\xi_{2,n}<\xi_{1,n}\leqq+1, \qquad (n=1,2,\ldots)$$

interpolációs alappontrendszerekre igen elegánsan bebizonyította, hogy ha $\gamma_{k1}=0$, $(k=1,2,\ldots,n;\ n=1,2,\ldots)$, és az interpolációs polinomok a $\xi_{\nu n}$, $(\nu=1,2,\ldots,n;\ n=1,2,\ldots)$, alaphelyeken egy folytonos $f(x)$ függvény értékeivel egyeznek meg, akkor a $H_n(f)$ legfeljebb $(2n-1)$-edfokú úgynevezett Hermite—Fejér-féle interpolációs polinomok sorozata egyenletesen konvergál az $f(x)$ függvényhez a $-1\leqq x\leqq+1$ intervallumban. FEJÉR eredményei után a Hermite-féle és Hermite—Fejér-féle interpolációs polinomok esetében a konvergencia kérdés vizsgálata erőteljesen megindult és e témakörben is több hazai matematikus ért el jelentős eredményeket.

Ha a $\xi_k$, $(k=1,2,\ldots,n)$, alappontokhoz adottak a $\gamma_{ki}$ értékek, ahol $k=1,2,\ldots,n$, az $i$ index pedig a $0,j_1,j_2,\ldots,j_l$ értékeken fut át, ahol $j_1<j_2<\cdots<j_l\leqq r_k-1$ egész számok és keressük azt a *legkisebb* fokszámú $Q(x)$ polinomot, amelyre

$$Q^{(i)}(\xi_k)=\gamma_{ki}, \qquad (k=1,2,\ldots,n;\ i=0,j_1,j_2,\ldots,j_l)$$

tehát amikor a $Q(x)$ interpolációs polinom *bizonyos differenciálhányadosaira nem írunk elő semmit*, akkor az Hermite-féle interpolációval szemben ez az interpoláció ebben az értelemben *hézagos*. Az ilyen $Q(x)$ polinom létezésének, unicitásának és a konvergencia szempontjából kezelhető alak előállításának a kérdése igen nehéz feladat. Az interpolációnak ez az általános módja G. BIRKHOFF [3] dolgozatában szerepel első ízben. G. Birkhoff azonban ezt a legkisebb fokszámú $Q(x)$ polinomot nem határozta meg. Abban a speciális esetben, amikor $n=2$ PÓLYA GYÖRGY [4] meghatározott és explicit alakban előállított bizonyos úgynevezett „hézagos" interpolációs polinomokat.

A hézagos interpolációnak egyik speciális esete az, amikor a $\xi_k$, $(k=1,2,\dots,n)$, alappontokban adottak a $\gamma_{ki}$ értékek $(k=1,2,\dots,n;\ i=0,2)$ és keressük azt a legkisebb, legfeljebb $(2n-1)$-edfokú $R_n(x)$ polinomot, amelyre

$$R_n^{(i)}(\xi_k)=\gamma_{ki}, \qquad (k=1,2,\dots,n;\ i=0,2).$$

Ez a hézagos interpoláció a TURÁN PÁL által elnevezett $(0,2)$-*interpoláció*. Várható, hogy ezen interpolációs polinomoknak az

$$y''(x)+A(x)y(x)=0$$

alakú differenciálegyenletek elmélete szempontjából lesz jelentősége.

A $(0,2)$-interpoláció TURÁN PÁL által felvetett kérdéseiben az első eredmény SURÁNYI JÁNOS és TURÁN PÁL nevéhez fűződik. Az irodalomjegyzékben az [5] alatt feltüntetett dolgozatban kimutatták, hogy ha a $\xi_\nu$, $(\nu=1,2,\dots,n)$ alappontok a nulla pontra szimmetrikusan helyezkednek el és $n=2k+1$ páratlan szám, akkor az (1.2) alatti egyenlőségeknek eleget tevő $R_n(x)$, $(0,2)$-interpolációs polinom vagy nem létezik, vagy nem határozható meg egyértelműen. Ha az (1.1) alappontok a $P_n^{(\lambda)}(x), \lambda>-\frac{1}{2}$, ultraszférikus polinom gyökei, $n\geqq 4$ páros szám és $\lambda+\frac{1}{2}$ nem páros természetes szám, akkor mindig létezik egyetlen egy legfeljebb $(2n-1)$-edfokú $R_n(x)$ polinom. Bebizonyították továbbá, hogy ha az (1.1) alatti alappontok a $\Pi_n(x)=(1-x^2)P'_{n-1}(x)$ polinomok gyökei, ahol $P_{n-1}(x)$ az $(n-1)$-edfokú Legendre-féle polinomot jelöli és $n$ páros szám, akkor ugyancsak egy $R_n(x)$, $(0,2)$-interpolációs polinom létezik.

Ha az (1.1) alappontok a $\Pi_n(x)$ polinom gyökei, $n=2k$, akkor az interpolációs polinomok explicit alakját TURÁN PÁL és BALÁZS JÁNOS [6] határozták meg; a [7] alatti dolgozatukban pedig ezen interpolációs polinomokra vonatkozólag konvergencia tételt bizonyítottak be. A konvergencia tételt FREUD GÉZA [8] élesítette és bebizonyította, hogy ha a $[-1,+1]$ intervallumban az $f(x)$ függvényre teljesül az

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)=o(h)$$

feltétel, $\alpha_\nu=f(\xi_\nu)$, $(\nu=1,2,\dots,n;\ n=4,6,\dots)$ és a $\beta_\nu$ értékek megfelelően választottak, akkor az $R_n(x)$ $(0,2)$-interpolációs polinomok egyenletesen konvergálnak az $f(x)$ függvényhez a $-1\leqq x\leqq +1$ intervallumban, ha $n\to\infty$. Ezen tételben kimondott állítás bizonyos értelemben tovább már nem élesíthető. Ugyanis, ha $0<\varepsilon<1$, $\beta_\nu=0$, $(\nu=1,2,\dots,n;\ n=4,6,\dots)$, akkor megadható egy olyan Lip$(1-\varepsilon)$ osztályba tartozó $f(x)$ függvény, amelyhez tartozó $R_n(x)$ $(0, 2)$-interpolációs polinomok a nulla pontban nem korlátosak. (TURÁN—BALÁZS [7]).

E vizsgálatokba bekapcsolódva R. B. SAXENA és A. SHARMA ([9], [10]) hindu matematikusok meghatározták a $\Pi_n(x)$ polinom gyökein, $n=2k$, azt a legfeljebb $(3n-1)$-edfokú $R_n(x)$, úgynevezett $(0, 1, 3)$-interpolációs polinomot, amely polinom, továbbá az első és harmadik deriváltja a megadott értékeket veszi fel az alappontokban. Konvergencia tételt is bizonyítottak. R. B. SAXENA [11] meghatározta a $(0, 1, 2, 4)$-interpolációs polinomokat ugyancsak a $\Pi_n(x)$, $n=2k$, polinom gyökein, mint alappontokban. Bizonyított továbbá konvergencia tételt is. Bizonyos értelemben módosított $(0, 2)$-interpolációs polinomokat is meghatározott R. B. SAXENA és ezekre is bizonyított konvergencia tételt.

K. K. MATHUR és A. SHARMA [12] az $e^{-x^2}$ súlyfüggvényre a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban ortogonális $H_n(x)$ Hermite-féle polinomok gyökeihez, mint alappontokhoz tartozó $(0, 2)$ és $(0, 1, 3)$-interpolációs polinomok egyértelmű létezését mutatták ki, ha $n=2k$. Meghatározták az interpolációs polinomok explicit alakját is, azonban az előállításban szereplő konstansok bonyolult kifejezése miatt, konvergencia tételt nem bizonyítottak.

KIS OTTÓ [13] dolgozatában komplex $(0, 2)$-interpolációval foglalkozott. Az alappontok a következők:

$$z_k=\exp i\frac{2\pi}{n}k, \qquad (k=1, 2, \dots, n), \quad n\geqq 2.$$

Bebizonyította, hogy ezen alappontok esetén a $(0, 2)$-interpolációs polinomok mindig léteznek és egyértelműen meghatározhatók, függetlenül attól, hogy $n$ páros vagy páratlan. Meghatározta ezen polinomok explicit alakját és kimutatja, hogy ha $f(z)$ reguláris a $|z|<1$ körben és folytonos, ha $|z|\leqq 1$; továbbá $f(e^{ix})$ eleget tesz a Dini—Lipschitz-féle feltételnek, $\alpha_k=f(z_k)$, $(k=1, 2, \dots, n)$ és $\beta_k$ értékek megfelelően választottak, akkor az $R_n(z)$, $(0, 2)$-interpolációs polinomok a $|z|\leqq 1$ körben egyenletesen konvergálnak az $f(z)$ függvényhez, ha $n\to\infty$.

A $(0, 2)$-interpolációs polinomok konvergenciáját tehát ugyanolyan feltételek biztosítják, mint a Lagrange-féle interpoláció esetében, ha az alappontok $z_k=\exp i\frac{2\pi}{n}k$, $(k=1, 2, \dots, n)$.

A $z_k=\exp i\frac{2\pi}{n}k$, $(k=1, 2, \dots, n)$ alappontok esetében KIS OTTÓ meghatározta a $(0, 1, 2, \dots, r-2, r)$-interpolációs polinomokat is és konvergencia tételt bizonyított be a $(0, 1, 3)$-interpolációs polinomok esetében.

A [14] dolgozatban KIS OTTÓ trigonometrikus (0, 2)-interpolációval foglalkozott, amikor az alappontok $\xi_k=\frac{2\pi}{n}k$, $(k=0,1,2,\dots,n-1)$ pontok. Ezen alappontok esetében a (0, 2)-interpolációs alappolinomok egyértelműen meghatározhatók, ha az alappontok száma páratlan. KIS OTTÓ explicit alakban előállította ezeket az interpolációs polinomokat és bebizonyította, hogy ha $f(x)$ $2\pi$ szerint periodikus folytonos függvény kielégíti az

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)=o(h)$$

feltételt, $\alpha_k=f(\xi_k)$, a $\beta_k$ értékek megfelelően választottak $(k=0,1,2,\dots,n-1;$ $n=1,3,5,\dots)$, akkor az $R_k(x)$, (0, 2)-interpolációs polinomok sorozata egyenletesen konvergál az egész valós tengelyen az $f(x)$ függvényhez. Kimutatja továbbá, hogy az $f(x)$ függvényre vonatkozó feltétel nem enyhíthető.

Ezzel tulajdonképpen megemlítettük a hézagos interpolációra vonatkozó eddig ismeretes valamennyi eredményt. Az eddigi vizsgálatok és eredmények mutatják, hogy a (0, 2)-interpoláció, vagy másfajta hézagos interpoláció kérdéseinek a vizsgálata nem könnyű probléma. A hézagos interpolációs polinomok nem minden adott alappontrendszer esetén léteznek és határozhatók meg egyértelműen. Ha pedig egy alappontrendszer esetében a hézagos interpolációs polinomok léteznek, egyértelműen meghatározhatók, akkor ezen interpolációs polinomok konvergencia szempontjából kezelhető alakban való előállítása jelent nagy nehézséget. Ez a kérdés lényegesen egyszerűbb abban az esetben, ha Lagrange-féle vagy Hermite-féle interpolációról van szó.

Kívánatos olyan alappontrendszer megadása, amelyhez egyértelműen léteznek (0, 2)-interpolációs polinomok és amely interpolációs polinomok a lehető legegyszerűbb alakban előállíthatók. Ez fontos kérdés nemcsak a konvergencia vizsgálat, hanem az említett differenciálegyenletek elméletében való alkalmazhatóság szempontjából is. E cél elérése érdekében vetette fel TURÁN PÁL a súlyozott (0, 2)-interpoláció gondolatát.

## 2. §. A súlyozott interpoláció értelmezése, a bizonyítandó tételek

Legyen adott a $[-1,+1]$ intervallumban $n$ különböző $x_\nu$, $(\nu=1,2,\dots,n)$ pont, egy $\varrho(x)$ súlyfüggvény, amely a $(-1,+1)$ intervallumban kétszer folytonosan differenciálható; továbbá adottak az $y_\nu$ és $y_\nu''$, $(\nu=1,2,\dots,n)$ valós értékek és keressük azt a legfeljebb $(2n-1)$-edfokú $S_n(x)$ polinomot, amely a következő egyenlőségeknek tesz eleget:

$$S_n(x_\nu)=y_\nu,\ \{\varrho(x)S_n(x)\}''_{x=x_\nu}=y_\nu'',\qquad (\nu=1,2,\dots,n).$$

Ez a súlyozott (0, 2)-interpoláció értelmezése.

A kérdés az, hogyan kell a $\varrho(x)$ súlyfüggvényt és az alappontokat úgy megválasztani, hogy az $S_n(x)$ polinomok egyértelműen létezzenek és a konvergencia, valamint esetleges egyéb vizsgálatok szempontjából az $S_n(x)$ polinomok kezelhető alakban előállíthatók legyenek.

A dolgozat tárgya ilyen súlyozott (0, 2)-interpoláció vizsgálata, bizonyos mellékfeltétel teljesülése mellett, abban az esetben, ha a súlyfüggvény

(2. 1) $$\varrho(x)=(1-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}, \qquad (\alpha>-1),$$

és az alappontok

(2. 2) $$-1<x_n<x_{n-1}<\cdots<x_1<+1$$

az $\omega_n(x)=P_n^{(\alpha)}(x)$, $\alpha>-1$, ultraszférikus polinom gyökei. Azzal az esettel, amikor az alappontok az Hermite-féle vagy a Laugerre-féle polinomok gyökei egy következő dolgozatban fogunk foglalkozni. Természetesen ezen esetben a $\varrho(x)$ súlyfüggvény más lesz, mint a (2. 1) súlyfüggvény.

Ultraszférikus polinomokon a következő polinomokat értjük:

(2. 3) $$P_n^{(\alpha)}(x)=\left\{\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n+\alpha}]\right\}(1-x^2)^{-\alpha}, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

ahol $\alpha>-1$. Ismeretes, hogy az $\omega_n(x)=P_n^{(\alpha)}(x)$ ultraszférikus polinomok gyökei mind egyszeresek és valamennyi gyök a $(-1,+1)$ intervallum belsejébe esik, azaz a gyökök felírhatók a (2. 2) alatt megjelölt módon.

Az $\omega_n(x)$ ultraszférikus polinomok kielégítik az

(2. 4) $$(1-x^2)\omega_n''(x)-2(\alpha+1)x\omega_n'(x)+n(n+2\alpha+1)\omega_n(x)=0$$

differenciálegyenletet és érvényesek a következő egyenlőségek:

(2. 5) $$(1-x^2)\omega_n'(x)=-nx\omega_n(x)+(n+\alpha)\omega_{n-1}(x),$$

(2. 6) $$\int_{-1}^{1}\omega_n(x)\omega_m(x)(1-x^2)^\alpha dx=$$

$$=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad n\neq m\\ \dfrac{2^{2\alpha+1}}{2n+2\alpha+1}\cdot\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)^2}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}, & \text{ha} \quad n=m.\end{cases}$$

A (2. 5) és (2. 6) alatti kifejezések megtalálhatók SZEGŐ GÁBOR [15] könyvének 71., illetve 67. oldalán. A (2. 6) kifejezés azt jelenti, hogy az ultraszférikus polinomok ortogonális rendszert alkotnak a $[-1,+1]$ intervallumban az $(1-x^2)^\alpha$ súlyfüggvényre vonatkozólag.

Ha $v_n(x)=(1-x^2)^{\frac{1+2\alpha}{4}} P_n^{(\alpha)}(x)$, akkor igaz a következő (lásd SZEGŐ [15], 165. oldal)

$$(2.7) \qquad \lim n^{\frac{1}{2}} \max_{-1\leqq x\leqq +1} |v_n(x)|=O(1), \quad \text{ha} \quad \alpha \geqq -\frac{1}{2}.$$

Az ultraszférikus polinomokra vonatkozó felsorolt összefüggéseket a bizonyítások során fel fogjuk használni.

Ha mármost adott a (2.1) alatti súlyfüggvény, a (2.2) alatti alappontok, továbbá tetszés szerinti $y_\nu$ és $y_\nu''$ $(\nu=1,2,\ldots,n)$ valós számok, akkor keresni fogjuk azt a legfeljebb $2n$-edfokú $S_n(x)$ polinomot, amelyre teljesülnek a következő egyenlőségek

$$(2.8) \qquad S_n(x_\nu)=y_\nu, \ \{\varrho(x)S_n(x)\}''_{x=x_\nu}=y_\nu'', \qquad (\nu=1,2,\ldots,n)$$

azzal a mellékfeltétellel, hogy

$$(2.9) \qquad S_n(0)=\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu l_\nu(0)^2,$$

ahol

$$(2.10) \qquad l_\nu(x)=\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)(x-x_\nu)}, \qquad (\nu=1,2,\ldots,n),$$

az $(n-1)$-edfokú Lagrange-féle interpolációs alappolinom. Ha $s_\nu(x)$ jelöli azt a legfeljebb $2n$-edfokú polinomot, amelyre

$$(2.11) \qquad s_\nu(x_k)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad \nu\neq k\\ 1, & \text{ha} \quad \nu=k\end{cases} \quad \text{és} \quad \{\varrho(x)s_\nu(x)\}''_{x=x_k}=0,$$
$$(\nu=1,2,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots,n)$$

és $\sigma_\nu(x)$ pedig azt a legfeljebb $2n$-edfokú polinomot, amelyre

$$(2.12) \qquad \sigma_\nu(x_\nu)=0, \quad \{\varrho(x)\sigma_\nu(x)\}''_{x=x_k}=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad \nu\neq k\\ 1, & \text{ha} \quad \nu=k,\end{cases}$$
$$(k=1,2,\ldots,n;\ \nu=1,2,\ldots,n)$$

akkor a (2.8) egyenlőségeknek eleget tevő $S_n(x)$ polinom nyilvánvalóan a következő módon írható fel:

$$(2.13) \qquad S_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu s_\nu(x)+\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu''\sigma_\nu(x),$$

ha

$$(2.14) \qquad S_n(0)=\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu s_\nu(0)+\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu''\sigma_\nu(0)=\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu l_\nu(0)^2.$$

Bebizonyítjuk a következő tételeket:

I. tétel. *Ha* $n=2k+1$ *páratlan szám, akkor a tetszés szerint megadott* $y_\nu$ *és* $y_\nu''$, $(\nu=1,2,\ldots,n)$, *valós értékekre, a* $\varrho(x)=(1-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$, $\alpha>-1$ *súlyfüggvény mellett olyan legfeljebb* $2n$*-edfokú* $S_n(x)$ *polinom sohasem határozható meg egyértelműen, amelyre*

$$S_n(x_\nu)=y_\nu,\quad \{\varrho(x)S_n(x)\}''_{x=x_\nu}=y_\nu'',\qquad (\nu=1,2,\ldots,n)$$

és

$$S_n(0)=\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu l_\nu(0)^2,$$

*ahol* $x_\nu$, $(\nu=1,2,\ldots,n)$ *az* $\omega_n(x)=P_n^{(\alpha)}(x)$ *ultraszférikus polinom gyökeit jelenti és* $l_\nu(x)$ *a* (2. 10) *alatti kifejezés.*

II. tétel. *Ha* $n=2k$ *páros szám, akkor a tetszés szerint megadott* $y_\nu$ *és* $y_\nu''$, $(\nu=1,2,\ldots,n)$ *valós értékekre a* $\varrho(x)=(1-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$, $\alpha>-1$, *súlyfüggvény mellett egy és csak egy olyan legfeljebb* $2n$*-edfokú* $S_n(x)$ *polinom létezik, amelyre*

$$S_n(x_\nu)\,y_\nu,\quad \{\varrho(x)S_n(x)\}''_{x=x_\nu}=y_\nu'',\qquad (\nu=1,2,\ldots,n) \tag{2. 15}$$

*és*

$$S_n(0)=\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu l_\nu(0)^2, \tag{2. 16}$$

*ahol* $x_\nu$, $(\nu=1,2,\ldots,n)$, *az* $\omega_n(x)=P_n^{(\alpha)}(x)$ *ultraszférikus polinom gyökeit jelenti és* $l_\nu(x)$ *a* (2. 10) *alatti kifejezés.*

Ha a (2. 9) alatti mellékfeltétel teljesülését nem követeljük meg és keressük azt a legfeljebb $(2n-1)$-edfokú $S_n^*(x)$ polinomot, amelyre

$$S_n^*(x_\nu)=y_\nu \quad\text{és}\quad \{\varrho(x)S_n^*(x)\}''_{x=x_\nu}=y_\nu'',\qquad (\nu=1,2,\ldots,n), \tag{2. 17}$$

ahol $x_\nu$, $(\nu=1,2,\ldots,n)$, az $\omega_n(x)$ ultraszférikus polinom gyökeit jelenti, akkor megadhatók olyan $y_\nu$ és $y_\nu''$, $(\nu=1,2,\ldots,n)$ valós értékek, amelyekhez a (2. 17) egyenlőségeknek eleget tevő legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinom nem létezik. Ezt az állítást be fogjuk bizonyítani.

A (2. 9) alatti mellékfeltételt úgy választottuk meg, hogy a (2. 11), illetve a (2. 12) egyenlőségeknek eleget tevő $s_\nu(x)$ úgynevezett *elsőfajú*, illetve a $\sigma_\nu(x)$ úgynevezett *másodfajú* alappolinomok a lehető legegyszerűbb alakban legyenek előállíthatók.

III. tétel. *Ha* $n=2k$ *páros szám, akkor a II. tétel feltételeit kielégítő legfeljebb* $2n$*-edfokú* $S_n(x)$ *polinomok a következő módon írhatók fel*

$$S_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu s_\nu(x)+\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu''\sigma_\nu(x),\qquad (n=2,4,6,\ldots) \tag{2. 18}$$

*ebben az* $s_\nu(x)$, $(\nu=1,2,\ldots,n)$, *legfeljebb* $2n$*-edfokú elsőfajú alappolinomok kifejezése*

$$(2.19)\qquad s_\nu(x)=l_\nu(x)^2+\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)}\int\limits_0^x\frac{l_\nu(t)(a_\nu t+b_\nu)-l_\nu'(t)}{t-x_\nu}\,dt,$$

*ahol*

$$(2.20)\qquad a_\nu x_\nu+b_\nu=l_\nu'(x_\nu),\quad a_\nu=\frac{1+\alpha(1-x_\nu^2-\alpha x_\nu^2)}{2(1-x_\nu^2)^2},$$

*és a* $\sigma_\nu(x)$, $(\nu=1,2,\ldots,n)$, *legfeljebb* $2n$*-edfokú elsőfajú alappolinomok kifejezése*

$$(2.21)\qquad \sigma_\nu(x)=\frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}\omega_\nu'(x_\nu)}\int\limits_0^x l_\nu(t)\,dt.$$

A (2.19) és (2.21) kifejezések miatt rögtön látható, hogy az

$$S_n(0)=\sum_{\nu=1}^n y_\nu l_\nu(0)^2$$

feltétel teljesül.

IV. tétel. *Ha az* $f(x)$ *függvény olyan, hogy a* $-1\leqq x\leqq+1$ *intervallumban* $f'(x)$ *kielégíti az*

$$|f'(x_1)-f'(x_2)|\leqq M|x_1-x_2|^\mu,\qquad -1\leqq x_1<x_2\leqq+1$$

*Lipschitz-féle feltételt, ahol* $\frac{1}{2}<\mu\leqq 1$ *és* $y_\nu=f(x_\nu)$, $y_\nu'=o(\sqrt{n})(1-x_\nu^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}$, $(\nu=1,2,\ldots,n)$, *akkor a* $-1<x<+1$ *intervallumban a* (2.18) *alatti* $S_n(x)$, $(n=2,4,6,\ldots)$ *súlyozott* (0, 2)*-interpolációs polinomok sorozata az* $f(x)$ *függvényhez konvergál, ha* $\alpha>0$. *Ez a konvergencia egyenletes a* $-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon$ *intervallumban, ahol* $0<\varepsilon<1$.

A (2.19) és a (2.21) alatti kifejezések mutatják, hogy itt az interpolációs alappolinomok alakja egyszerűbb, mint a $\Pi_n(x)$ polinom gyökeihez, mint alappontokhoz tartozó (0, 2)-interpolációs alappolinomok (lásd TURÁN—BALÁZS [6]). A konvergencia tétel azonban itt az $f(x)$ függvényre vonatkozó erősebb feltételek mellett bizonyítható, mint a $\Pi_n(x)$ gyökeihez, mint alappontokhoz tartozó (0, 2)-interpolációs polinomok esetén (lásd TURÁN—BALÁZS [7] és FREUD [8]).

A IV. tételt abban az esetben bizonyítjuk be, amikor az $\omega_n(x)=P_n^{(\alpha)}(x)$ ultraszférikus polinomban az $\alpha$ paraméter nagyobb mint nulla. A konvergencia bizonyítása ebben az esetben egyszerű eszközök segítségével történhet, míg a $-1<\alpha\leqq 0$ esetben az ultraszférikus polinomokra vonatkozó aszimptotikus kifejezésekre volna szükség, amelyek (lásd SZEGŐ [15] könyvét) meglehetősen nehéz télelek bizonyítása útján nyerhetők. A $\varrho(x)=(1-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$ súlyfüggvénnyel történő (0, 2)-interpoláció tehát az $\alpha>0$ esetben egyszerűbb, ellentétben a Lagrange- és Hermite—Fejér-féle interpolációval, ahol éppen a $-1<\alpha\leqq 0$ esetben bizonyítható egyszerű eszközökkel a konvergencia tétel.

## 3. §. Az első, a második és a harmadik tétel bizonyítása

A bizonyítások során két, egyszerűen nyerhető összefüggésre lesz szükség.

a) Ha $\varrho(x)=(1-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$ és ha az $\omega_n(x)=P_n^{(\alpha)}(x)$ $n$-edfokú ultraszférikus polinom gyökeit $x_\nu$, $(\nu=1,2,\ldots,n)$ jelöli, akkor

$$\{\varrho(x)\omega_n(x)\}''_{x=x_\nu}=0, \qquad (\nu=1,2,\ldots,n). \tag{3.1}$$

Ugyanis

$$\{\varrho(x)\omega_n(x)\}''_{x=x_\nu}=$$

$$=\{\varrho''(x)\omega_n(x)-2(\alpha+1)x(1-x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}\omega_n'(x)+(1-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}\omega_n''(x)\}_{x=x_\nu}=$$

$$=(1-x_\nu^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}\{(1-x^2)^{\frac{1-\alpha}{2}}\varrho''(x)\omega_n(x)-2(\alpha+1)x\omega_n'(x)+(1-x^2)\omega_n''(x)\}_{x=x_\nu}=0,$$

$$(\nu=1,2,\ldots,n)$$

figyelembe véve a (2. 4) differenciálegyenletet.

b) Ha

$$l_\nu(x)=\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)(x-x_\nu)}, \qquad (\nu=1,2,\ldots,n) \tag{3.2}$$

az $\omega_n(x)$ ultraszférikus polinom $x_\nu$, $(\nu=1,2,\ldots,n)$ gyökeihez tartozó Lagrange-féle interpolációs alappolinom, akkor mivel

$$(x-x_\nu)l_\nu(x)=\frac{1}{\omega_n'(x_\nu)}\omega_n(x), \qquad (\nu=1,2,\ldots,n) \tag{3.3}$$

ezért a (2. 4) differenciálegyenlet alapján

$$\begin{gathered}(1-x^2)(x-x_\nu)l_\nu''(x)+2(1-x^2)l_\nu'(x)-2(\alpha+1)x(x-x_\nu)l_\nu'(x)-\\-2(\alpha+1)xl_\nu(x)+n(n+2\alpha+1)(x-x_\nu)l_\nu(x)=0.\\(\nu=1,2,\ldots,n)\end{gathered} \tag{3.4}$$

Szükségünk lesz a következő két segédtételre:

I. segédtétel. *Ha* $\varrho(x)=(1-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$, $\alpha>-1$, *és ha* $x_\nu$, $(\nu=1,2,\ldots,n)$ *az* $\omega_n(x)=P_n^{(\alpha)}(x)$ *n-edfokú ultraszférikus polinom gyökeit jelöli, akkor a*

$$\sigma_\nu(x)=\frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)dt, \qquad (\nu=1,2,\ldots,n). \tag{3.5}$$

*$2n$-edfokú olyan polinomok, amelyekre*

$$\sigma_\nu(x_j)=0, \qquad (j=1,2,\ldots,n;\ \nu=1,2,\ldots,n) \tag{3.6}$$

és

$$\{\varrho(x)\sigma_\nu(x)\}''_{x=x_j}=\begin{cases}0, & \text{ha } j\neq\nu\\ 1, & \text{ha } j=\nu.\end{cases} \qquad (j=1,2,\ldots,n;\ \nu=1,2,\ldots,n). \tag{3.7}$$

Bizonyítás: A (3.2) miatt $\sigma_\nu(x)$ nyilván $2n$-edfokú polinom. A (3.6) alatti egyenlőség nyilvánvaló $\omega_n(x_j)=0$, $(j=1,2,\ldots,n)$ miatt.

A (3.5) alapján

$$\{\varrho(x)\sigma_\nu(x)\}''_{x=x_j}=\frac{1}{2(1-x_\nu^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}\omega_n'(x_\nu)}\Big\{[\varrho(x)\omega_n(x)]''\int_0^x l_\nu(t)dt+$$

$$+2[\varrho'(x)\omega_n(x)+\varrho(x)\omega_n'(x)]l_\nu(x)+\varrho(x)\omega_n(x)l_\nu'(x)\Big\}_{x=x_j}=\begin{cases}0, & \text{ha } j\neq\nu\\ 1, & \text{ha } j=\nu,\end{cases}$$

figyelembe véve (3.1) és azt, hogy egyrészt $\omega_n(x_j)=0$, $(j=1,2,\ldots,n)$, másrészt (3.2) miatt

$$l_\nu(x_j)=\begin{cases}0, & \text{ha } j\neq\nu\\ 1, & \text{ha } j=\nu\end{cases} \qquad (j=1,2,\ldots,n;\ \nu=1,2,\ldots,n). \tag{3.8}$$

Ezzel a segédtételt igazoltuk.

II. segédtétel. *Ha* $\varrho(x)=(1-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$, $\alpha>-1$, és ha $x_\nu$, $(\nu=1,2,\ldots,n)$ *az* $\omega_n(x)=P_n^{(\alpha)}(x)$ *n-edfokú ultraszférikus polinom gyökeit jelöli, akkor az*

$$s_\nu(x)=l_\nu(x)^2+\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x\frac{l_\nu(t)(a_\nu t+b_\nu)-l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt, \tag{3.9}$$

*ahol*

$$a_\nu x_\nu+b_\nu=l_\nu'(x_\nu),\quad a_\nu=\frac{1+\alpha(1-x_\nu^2-\alpha x_\nu^2)}{2(1-x_\nu^2)^2} \tag{3.10}$$

$$(\nu=1,2,\ldots,n),$$

$2n$*-edfokú olyan polinomok, amelyekre*

$$s_\nu(x_j)=\begin{cases}0, & \text{ha } j\neq\nu\\ 1, & \text{ha } j=\nu\end{cases}\qquad (j=1,2,\ldots,n;\ \nu=1,2,\ldots,n) \tag{3.11}$$

és

$$\{\varrho(x)s_\nu(x)\}''_{x=x_j}=0,\qquad (j=1,2,\ldots,n;\ \nu=1,2,\ldots,n). \tag{3.12}$$

Bizonyítás: A (3.2) és (3.10) miatt $s_\nu(x)$ nyilván $2n$-edfokú polinom. Az $\omega_n(x_j)=0$, $(j=1,2,\ldots,n)$ és (3.8) miatt (3.11) nyilván igaz. A (3.9) alapján (3.8) és (3.1) miatt, ha $x_j\neq x_\nu$ akkor

$$\begin{aligned}\{\varrho(x)s_\nu(x)\}''_{x=x_j}&=\{\varrho''(x)l_\nu(x)^2+4\varrho'(x)l_\nu(x)l'_\nu(x)+\\&\quad+\varrho(x)[2l''_\nu(x)l_\nu(x)+2l'_\nu(x)^2]\}_{x=x_j}+\\&\quad+\frac{1}{\omega'_n(x_\nu)}\Bigg\{[\varrho(x)\omega_n(x)]''\int_0^x\frac{l_\nu(t)(a_\nu t+b_\nu)-l'_\nu(t)}{t-x_\nu}\,dt+\\&\quad+2[\varrho'(x)\omega_n(x)+\varrho(x)\omega'_n(x)]\frac{l_\nu(x)(a_\nu x+b_\nu)-l'_\nu(x)}{x-x_\nu}+\\&\quad+\varrho(x)\omega_n(x)\left[\frac{l_\nu(x)(a_\nu x+b_\nu)-l'_\nu(x)}{x-x_\nu}\right]'\Bigg\}_{x=x_j}=\\&=2\varrho(x_j)l'_\nu(x_j)^2-2\varrho(x_j)\frac{\omega'_n(x_j)}{\omega'_n(x_\nu)(x_j-x_\nu)}l'_\nu(x_j)=0\end{aligned} \tag{3.13}$$

figyelembe véve (3.2).

Ha pedig $x_j=x_\nu$ akkor (3.13) alapján, (3.10) és (3.8) miatt

$$\begin{aligned}\{\varrho(x)s_\nu(x)\}''_{x=x_\nu}&=\varrho''(x_\nu)+4\varrho'(x_\nu)l'_\nu(x_\nu)+2\varrho(x_\nu)l''_\nu(x_\nu)+\\&\quad+2\varrho(x_\nu)l'_\nu(x_\nu)^2+2\varrho(x_\nu)[l'_\nu(x_\nu)(a_\nu x_\nu+b_\nu)+a_\nu-l''_\nu(x_\nu)]=\\&=\varrho''(x_\nu)+4\varrho'(x_\nu)l'_\nu(x_\nu)+4\varrho(x_\nu)l'_\nu(x_\nu)^2+2\varrho(x_\nu)a_\nu.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Mivel pedig

$$\varrho'(x)=[(1-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}]'=-(1+\alpha)x(1-x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}, \tag{3.15}$$

és

$$\varrho''(x)=-(1-x^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}[(1+\alpha)(1-x^2)+(1-\alpha^2)x^2]; \tag{3.16}$$

továbbá (3.2) és (2.4) alapján

$$l'_\nu(x_\nu)=\frac{\omega''_n(x_\nu)}{2\omega'_n(x_\nu)}=\frac{(\alpha+1)x_\nu}{1-x_\nu^2}, \tag{3.17}$$

ezért (3. 14), (3. 16), (3. 15), (3. 17) és (3. 10) miatt

$$\{\varrho(x)s_\nu(x)\}''_{x=x_\nu}=$$

$$(3.18)\qquad =(1-x_\nu^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}\{-(1+\alpha)(1-x_\nu^2)-(1-\alpha^2)x_\nu^2-4(1+\alpha)^2x_\nu^2+$$
$$+4(1+\alpha)^2x_\nu^2+1+\alpha(1-x_\nu^2-\alpha x_\nu^2)\}=0.$$

A (3. 18) és a (3. 13) a (3. 12) egyenlőségek érvényességét bizonyítják. — Ezzel a II. segédtételt igazoltuk.

Ezek után rátérhetünk az I. tétel igazolására. Legyen $n=2k+1$ páratlan szám és $x_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots,n)$ az $\omega_n(x)=P_n^{(\alpha)}(x)$ $n$-edfokú ultraszférikus polinom gyökei, továbbá $y_\nu$ és $y_\nu''$, $(\nu=1,2,\ldots,n)$ tetszés szerint megadott valós értékek. Az I. és II. segédtétel és (3. 1) alapján nyilvánvalóan, ha $C$ tetszés szerinti konstans, az

$$(3.19)\qquad S_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}y_\nu s_\nu(x)+\sum_{\nu=1}^{n}y_\nu''\sigma_\nu(x)+C\omega_n(x)$$

olyan legfeljebb $2n$-edfokú polinom, amelyre egyrészt

$$S_n(x_\nu)=y_\nu,\quad \{\varrho(x)S_n(x)\}''_{x=x_\nu}=y_\nu,\qquad (\nu=1,2,\ldots,n)$$

másrészt viszont $n=2k+1$ miatt $\omega_n(0)=0$, és ezért az I. és II. segédtétel miatt az

$$S_n(0)=\sum_{\nu=1}^{n}y_\nu l_\nu(0)^2$$

feltétel teljesül. Mivel pedig a (3. 19) kifejezésben $C$ tetszés szerinti konstans lehet, ezzel az I. tételt igazoltuk.

A II. és III. tétel bizonyításához tételezzük fel, hogy $n=2k$ páros szám, $x_\nu$, $(\nu=1,2,\ldots,n)$ az $\omega_n(x)=P_n^{(\alpha)}(x)$ $n$-edfokú ultraszférikus polinom gyökei, továbbá $y_\nu, y_\nu''$, $(\nu=1,2,\ldots,n)$ tetszés szerint megadott valós értékek.

Az I. és II. segédtétel alapján nyilvánvalóan az

$$(3.20)\qquad S_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}y_\nu s_\nu(x)+\sum_{\nu=1}^{n}y_\nu''\sigma_\nu(x)$$

olyan legfeljebb $2n$-edfokú polinom, amely a II. tétel (2. 15) és (2. 16) egyenlőségeinek eleget tesz és a III. tétel (2. 18), (2. 19), (2. 20) és (2. 21) alatti kifejezéseivel megegyezik. Hátra van még annak a kimutatása, hogy a (3. 20) alatti polinom az egyetlen olyan legfeljebb $2n$-edfokú polinom, amely a II. tétel állításainak eleget tesz. Ennek igazolása indirekt úton történik.

Tételezzük fel tehát, hogy több ilyen polinom létezik, vagyis a (3. 20) alatti $S_n(x)$ polinomon kívül létezik legalább még egy olyan $Q_n(x)$ legfeljebb $2n$-edfokú polinom, amelyre a (2. 15) és a (2. 16) alatti egyenlőségekhez hasonlóan

$$Q_n(x_\nu)=y_\nu \quad \text{és} \quad \{\varrho(x)Q_n(x)\}''_{x=x_\nu}=y''_\nu, \qquad (\nu=1,2,\ldots,n)$$

és

$$Q_n(0)=\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu l_\nu(0)^2.$$

Ekkor azonban

$$S_n(x_\nu)-Q_\nu(x_\nu)=0; \quad \{\varrho(x)[S_n(x)-Q_n(x)]\}''_{x=x_\nu}=0, \qquad (3.21)$$

$$(\nu=1,2,\ldots,n)$$

és

$$S_n(0)-Q_n(0)=0 \qquad (3.22)$$

lenne.

A (3.21) miatt

$$S_n(x)-Q_n(x)=\omega_n(x)g_n(x)$$

alakban lenne felírható, ahol $g_n(x)$ legfeljebb $n$-edfokú polinom és $n=2k$ miatt $\omega_n(0)\neq 0$, ezért (3.22) miatt

$$g_n(0)=0 \qquad (3.23)$$

kell hogy legyen.

Másrészt teljesülnie kell a

$$\{\varrho(x)[S_n(x)-Q_n(x)]\}''_{x=x_\nu}=\{\varrho(x)\omega_n(x)g_n(x)\}''_{x=x_\nu}=$$

$$=\{\varrho(x)\omega_n(x)\}''_{x=x_\nu}g_n(x_\nu)+2\{[\varrho(x)\omega'_n(x)+\varrho'(x)\omega_n(x)]g'_n(x)\}_{x=x_\nu}+$$

$$+\varrho(x_\nu)\omega_n(x_\nu)g''_n(x_\nu)=0 \qquad (\nu=1,2,\ldots,n)$$

egyenlőségeknek. Ebből, mivel $\varrho(x)=(1-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$, (3.1) miatt

$$g'_n(x_\nu)=0, \qquad (\nu=1,2,\ldots,n)$$

adódnék, ami csak úgy lehetséges, ha $g_n(x)\equiv C$. Mivel pedig (3.23) miatt $g_n(0)=0$ kell hogy legyen, ebből az adódik, hogy $g_n(x)\equiv 0$, azaz $S_n(x)\equiv Q_n(x)$.

Ezzel a II. és a III. tétel állításait is igazoltuk.

A II. és III. tételből egy fontos következmény adódik, amelyet a IV. tétel bizonyításánál fel fogunk használni.

Következmény: *Ha $r(x)$ egy tetszés szerinti, legfeljebb $2n$-edfokú polinom, akkor*

$$r(x)\equiv\sum_{\nu=1}^{n} r(x_\nu)s_\nu(x)+\sum_{\nu=1}^{n}\{\varrho(x)r(x)\}''_{x=x_\nu}\sigma_\nu(x)+C\omega_n(x), \qquad (3.24)$$

*ahol*

$$C=\frac{1}{\omega_n(o)}\left\{r(o)-\sum_{\nu=1}^{n} r(x_\nu)l_\nu(o)^2\right\}. \qquad (3.25)$$

Bizonyítás: Legyen ugyanis

$$R(x) \equiv r(x) - \sum_{\nu=1}^{n} r(x_\nu) s_\nu(x) - \sum_{\nu=1}^{n} \{\varrho(x) r(x)\}''_{x=x_\nu} \varrho_\nu(x), \tag{3.26}$$

akkor nyilván (3.6) és (3.11) miatt

$$R(x_j) = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

és ezért

$$R(x) = \omega_n(x) g_n(x) \tag{3.27}$$

alakban írható, ahol $g_n(x)$ legfeljebb $n$-edfokú polinom. Viszont (3.26), (3.27), (3.12), (3.7) és (3.1) miatt

$$\{\varrho(x) R(x)\}''_{x=x_j} = 0 = 2\varrho(x_j) \omega'_n(x_j) g'_n(x_j), \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

ami csak úgy lehetséges, hogy $g'_n(x) \equiv 0$, azaz $g_n(x) \equiv C$, vagyis (3.27) és (3.26) miatt

$$C\omega_n(x) \equiv r(x) - \sum_{\nu=1}^{n} r(x_\nu) s_\nu(x) - \sum_{\nu=1}^{n} \{\varrho(x) r(x)\}''_{x=x_\nu} \varrho_\nu(x),$$

ez pedig a (3.24) alatti kifejezés. A $C$ konstans (3.25) alatt megjelölt értéke pedig következik a (2.19) és (2.21) kifejezésekből.

Hátra van még annak a kimutatása, hogy ha a II. tételben a (2.16) alatti egyenlőség fennállását nem követeljük meg, és keressük azt a legfeljebb $(2n-1)$-edfokú $S_n^*(x)$ polinomot, amelyre a (2.17) egyenlőségek érvényesek, akkor könnyen kimutatható, hogy ilyen $S_n^*(x)$ polinom általában nem létezik.

Válasszuk ugyanis az $y$ értékeket a következő módon, ha $\nu$ egy fix egész szám, amelyre $1 \leqq \nu \leqq n$,

$$y_k = 0 \quad \text{és} \quad y''_k = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \nu \neq k \\ 1, & \text{ha} \quad \nu = k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

és keresni fogjuk azt a legfeljebb $(2n-1)$-edfokú $S_n^*(x)$ polinomot, amelyre egyrészt

$$S_n^*(x_k) = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.28}$$

másrészt

$$\{\varrho(x) S_n^*(x)\}''_{x=x_k} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad k \neq \nu \\ 1, & \text{ha} \quad k = \nu \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.29}$$

A (3.28) miatt

$$S_n^*(x) = \omega_n(x) g_{n-1}(x),$$

ahol $g_{n-1}(x)$ legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinom. Ebből viszont (3.1) miatt a

$$\{\varrho(x) S_n^*(x)\}''_{x=x_k} = 2\varrho(x_k) \omega'_n(x_k) g'_{n-1}(x_k) = 0,$$

$$(k = 1, 2, \ldots, \nu-1, \nu+1, \ldots, n)$$

csak úgy lehet, ha $g'_{k-1}(x)\equiv 0$. Ha azonban $g'_{n-1}(x)\equiv 0$, akkor (3. 1) miatt

$$\{\varrho(x)S_n^*(x)\}''_{x=x_\nu}=2\varrho(x_\nu)\omega'_n(x_\nu)g'_{n-1}(x_\nu)=0$$

és nem eggyel egyenlő, azaz a (3. 29) egyenlőség nem teljesülhet. Ezzel állításunkat igazoltuk.

## 4. §. A másodfajú alappolinomok becslése

A IV. tétel bizonyításához szükség lesz a másodfajú alappolinomokra vonatkozó egy becslésre. A becsléshez pedig bebizonyítjuk a következő segédtételt.

III. segédtétel. *A* $-1<x<+1$ *intervallumban érvényes a következő egyenlőtlenség*

$$V(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{1-x^2}-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{1-x_\nu^2}h_\nu(x)-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{2x_\nu}{(1-x_\nu^2)^2}\mathfrak{h}_\nu(x)\geqq 0, \tag{4. 1}$$

*ahol*

$$h_\nu(x)=\left(1-\frac{\omega''_n(x_\nu)}{\omega'_n(x_\nu)}(x-x_\nu)\right)l_\nu(x)^2,\quad \mathfrak{h}_\nu(x)=(x-x_\nu)l_\nu(x)^2, \tag{4. 2}$$

*és* $l_\nu(x)$ *a* (3. 2) *alatti kifejezés.*

Bizonyítás: Az $\omega_n(x)$ ultraszférikus polinom $x_\nu$, $(\nu=1,2,\ldots,n)$ gyökeire ugyanis a definíció miatt

$$V(x_\nu)=0 \quad \text{és} \quad V'(x_\nu)=0, \qquad (\nu=1,2,\ldots,n).$$

Ez azt jelenti, hogy a $V(x)$ függvénynek a $-1<x<+1$ intervallumban legalább $2n$ nulla helye van az $x_\nu$ gyökökön. Ha tehát volna egy olyan $\xi$ pont a $(-1,+1)$ intervallum belsejében, ahol $V(\xi)<0$ lenne, akkor mivel $\lim\limits_{|x|\to 1-0} V(x)=+\infty$, a függvénynek volna legalább még egy, azaz összesen legalább $(2n+1)$ nulla helye a $(-1,+1)$ intervallum belsejében. A Rolle-féle tétel miatt ezért a $V^{(2n)}(x)$ függvénynek lenne legalább egy nulla helye a $(-1,+1)$ intervallum belsejében. Ez azonban ellentmondásra vezet, ugyanis egyrészt a (4. 1) alatti definíció miatt, másrészt mivel a $-1<x<+1$ intervallumban

$$\frac{1}{1-x^2}=\sum_{j=1}^{\infty}x^{2j}$$

ezért a $-1<x<+1$ intervallumban

$$V(x)^{(2n)}=\{(1-x^2)^{-1}\}^{(2n)}>0.$$

Ezzel a III. segédtételt igazoltuk.

Következmény: *Ha* $\alpha>0$, *akkor mivel az* $\omega_n(x)$ *ultraszférikus polinomok ortogonális rendszert alkotnak a* $-1\leqq x\leqq +1$ *intervallumban, ezért* (4.1) és (4.2) *alapján*

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\alpha-1}dx \geqq \sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{1-x_\nu^2}\int_{-1}^{1}l_\nu(x)^2(1-x^2)^\alpha dx.$$

Mivel pedig (lásd SZEGŐ [15] 343. o.)

$$(4.3)\qquad \int_{-1}^{1}l_\nu(x)^2(1-x^2)^\alpha dx = 2^{2\alpha+1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)^2}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}\cdot\frac{1}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)^2},$$
$$(\nu=1,2,\ldots,n)$$

ezért

$$(4.4)\qquad \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\alpha-1}dx \geqq 2^{2\alpha+1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)^2}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(1-x_\nu^2)^2\omega_n'(x_\nu)^2}.$$

Könnyű bebizonyítani (lásd pl. NATANSZON [16] 312. o.), ha $\beta>-1$, $\gamma>-1$, akkor minden természetes $n$ számra

$$(4.5)\qquad \frac{\Gamma(n+1+\beta+\gamma)}{\Gamma(n+1+\beta)}<dn^\gamma,$$

ahol $d$ csak a $\beta$ és $\gamma$ értékétől függő állandó.

A (4.5) alapján az ismert $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ összefüggés figyelembe vételével

$$(4.6)\qquad \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+2\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)^2}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\Gamma(n+1+\alpha+1-\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)}\cdot$$
$$\cdot\frac{\Gamma(n+1+2\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)}<d_1.$$

Ez a becslés lényegében pontos, mert, ha $k$ olyan fix egész szám, amelyre $k-\alpha>-1$ és $\alpha>-\frac{1}{2}$,

$$(4.7)\qquad \frac{\Gamma(n+1+\alpha)^2}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+2\alpha)}=$$
$$=\frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n+1)}\cdot\frac{1}{(n+k+\alpha)\cdots(n+1+\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(n+1+2\alpha+k-\alpha)}{\Gamma(n+1+2\alpha)}<d_2,$$

ahol $d_1$ és $d_2$ csak az $\alpha$ értékétől függő konstansok.

A (4. 4) és (4. 6) alapján

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(1-x_\nu^2)^2 \omega_n'(x_\nu)^2} < d_3, \tag{4.8}$$

ahol $d_3$ ismét csak az $\alpha$ értékétől függő konstans.

Ezek után rátérhetünk a másodfajú $\sigma_\nu(x)$ interpolációs polinomokra vonatkozó becslés igazolására.

IV. segédtétel. *A $-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ intervallumban, ahol $0<\varepsilon<1$ ($\varepsilon$ egyébként tetszés szerinti), érvényes a következő egyenlőtlenség, ha $\alpha>0$*

$$\sum_{\nu=1}^{n} (1-x_\nu^2)^{\frac{\alpha-3}{2}} |\sigma_\nu(x)| \leqq c_7 \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad (n=2,4,6,\ldots) \tag{4.9}$$

*ahol $\sigma_\nu(x)$ a (2. 21) másodfajú interpolációs alappolinomot jelöli és $c_7$ (a későbbiekben $c_j, j=1,2,3,\ldots$ is) csak az $\alpha$ és $\varepsilon$ értékétől függő konstans.*

Bizonyítás: A (2.21) alapján

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n} (1-x_\nu^2)^{\frac{\alpha-3}{2}} |\sigma_\nu(x)| &= \frac{|\omega_n(x)|}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(1-x_\nu^2)^2 |\omega_n'(x_\nu)|} \left| \int_0^x l_\nu(t)\,dt \right| = \\ &= \frac{|\omega_n(x)|}{2} \left\{ \sum_{|x_\nu| \geqq 1-\frac{\varepsilon}{2}} + \sum_{|x_\nu| < 1-\frac{\varepsilon}{2}} \right\} = \frac{|\omega_n(x)|}{2} \{I_1 + I_2\}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

A $-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ intervallumban, ha $0 \leqq t \leqq x$, vagy $x \leqq t \leqq 0$, akkor $(1-t^2)^{\frac{\alpha}{2}} \geqq (1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}} \geqq \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}$ és $|t-x_\nu| > \frac{\varepsilon}{2}$, ha $|x_\nu| \geqq 1-\frac{\varepsilon}{2}$, ezért a Schwartz—Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenség felhasználásával, majd az összegezést minden $\nu$ indexre elvégezve

$$\begin{aligned} \frac{\omega_n(x)}{2} I_1 &\leqq \frac{|\omega_n(x)|}{2} \sum_{|x_\nu| \geqq 1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{1}{(1-x_\nu^2)^2 \omega_n'(x_\nu)^2} \int_0^x \frac{|\omega_n(t)|}{|t-x_\nu|}\,dt \leqq \\ &\leqq c_1 |\omega_n(x)| \sum_{|x_\nu| \geqq 1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{1}{(1-x_\nu^2)^2 \omega_n'(x_\nu)^2} \int_0^x |\omega_n(t)| (1-t^2)^{\frac{\alpha}{2}} dt \leqq \\ &\leqq c_2 |\omega_n(x)| \left\{ \int_{-1}^{1} \omega_n(t)^2 (1-t^2)^\alpha dt \right\}^{1/2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(1-x_\nu^2)^2 \omega_n'(x_\nu)^2}. \end{aligned}$$

Ebből (2.7), (2.6), (4.4) és (4.6) alapján a $-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ intervallumban

$$\frac{|\omega_n(x)|}{2} I_1 \leqq c_3 \frac{1}{n}. \tag{4.11}$$

Ha pedig $|x_\nu| < 1-\frac{\varepsilon}{2}$, akkor $1-x_\nu^2 > \varepsilon\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)$ és azért a $-1+\varepsilon \leqq x \leqq$ $\leqq 1-\varepsilon$ intervallumban a Schwartz—Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenség felhasználásával,

$$\frac{|\omega_n(x)|}{2} \sum_{|x_\nu|<1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{1}{(1-x_\nu^2)^2 |\omega_n'(x_\nu)|} \left| \int_0^x l_\nu(t)\,dt \right| \leqq$$

$$\leqq c_4 |\omega_n(x)| \sum_{|x_\nu|<1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{1}{|\omega_n'(x_\nu)|} \int_0^x |l_\nu(t)| (1-t^2)^{\frac{\alpha}{2}} dt \leqq$$

$$\leqq c_5 |\omega_n(x)| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\omega_n'(x_\nu)|} \left\{ \int_{-1}^{1} l_\nu(t)^2 (1-t^2)^\alpha dt \right\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq c_5 |\omega_n(x)| \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\omega_n'(x_\nu)^2} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \int_{-1}^{1} l_\nu(t)^2 (1-t^2)^\alpha dt \right\}^{1/2}.$$

Ebből pedig a (2.7), (4.3), (4.4) és (4.6) alapján, mivel $(1-x_\nu^2) < 1$, $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$

$$\frac{|\omega_n(x)|}{2} I_2 \leqq c_6 \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{4.12}$$

egyenlőtlenség adódik a $-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ intervallumra vonatkozólag.

A (4.10), (4.11), és (4.12) a IV. segédtétel bizonyítását adják.

## 5. §. Az elsőfajú alappolinomok becslése

Az elsőfajú alappolinomok becsléséhez szükségünk lesz a következő segédtételre.

V. segédtétel. *A* $-1 < x < +1$ *intervallumban igaz a*

$$V(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(1-x^2)^{1+\alpha}} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(1-x_\nu^2)^{1+\alpha}} l_\nu(x)^2 \geqq 0 \tag{5.1}$$

*egyenlőtlenség, ahol* $l_\nu(x)$ *a* (3.2) *alatti kifejezés és* $\alpha > -1$.

A segédtétel bizonyítása szerepel BALÁZS [17] dolgozatában. A bizonyítás módja EGERVÁRY—TURÁN [18] alatti dolgozatában található meg és megegyezik az I. segédtétel bizonyítási módjával.

Az (5. 1) alatti miatt

$$V(x_\nu)=0, \qquad (\nu=1,2,\ldots,n)$$

és (2. 4), (3. 2) miatt pedig

$$V'(x_\nu)=\frac{2(1+\alpha)x_\nu}{(1-x_\nu^2)^{2+\alpha}}-\frac{1}{(1-x_\nu^2)^{1+\alpha}}\cdot\frac{\omega_n''(x_\nu)}{\omega_n'(x_\nu)}=0, \qquad (\nu=1,2,\ldots,n).$$

Ez azt jelenti, hogy a $V(x)$ függvénynek a $-1<x<+1$ intervallumban legalább $2n$ nulla helye van az $x_\nu$ gyökökön. Ha tehát volna egy olyan $\xi$ pont a $(-1,+1)$ intervallum belsejében, ahol $V(\xi)<0$ lenne, akkor mivel $\lim_{|x|\to 1-0} V(x)=+\infty$, a $V(x)$ függvénynek volna legalább még egy, azaz összesen legalább $(2n+1)$ nulla helye a $(-1,+1)$ intervallum belsejében, s akkor a Rolle-féle tétel miatt $V^{(2n)}(x)$ függvénynek lenne legalább egy nulla helye a $(-1,+1)$ intervallum belsejében. Ez azonban ellentmondásra vezet, ugyanis egyrészt az (5. 1) alatti definíció miatt, másrészt mivel $\alpha>-1$ és a $-1<x<+1$ intervallumban

$$(1-x^2)^{-1-\alpha}=\sum_{j=1}^{\infty}\binom{-1-\alpha}{j}(-1)^j x^{2j},$$

ezért a $-1<x<+1$ intervallumban

$$V(x)^{(2n)}=\{(1-x^2)^{-1-\alpha}\}^{(2n)}>0.$$

Ezzel az V. segédtételt igazoltuk.

Az (5. 1) alatti egyenlőtlenséget a következő alakban is írhatjuk:

$$(5.2) \qquad \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1-x^2}{1-x_\nu^2}\right)^{1+\alpha} l_\nu(x)^2 \leqq 1.$$

A IV. tétel bizonyításánál fel fogjuk használni a következő segédtételt:

VI. segédtétel. *A* $-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon$ *intervallumban, ahol* $0<\varepsilon<1$ *(*$\varepsilon$ *egyébként tetszés szerinti), érvényes a következő egyenlőtlenség, ha* $\alpha\geqq 0$

$$(5.3) \qquad \left|\sum_{\nu=1}^{n} l_\nu(x)^2-1\right| \leqq \frac{c_{10}}{\sqrt{n}}, \qquad (n=1,2,3,\ldots),$$

*ahol* $l_\nu(x)$ *a* (3. 2) *alatti kifejezés.*

Bizonyítás: Érvényes a következő egyenlőség (lásd pl. FEJÉR [2])

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\omega_n''(x_\nu)}{\omega_n'(x_\nu)}(x-x_\nu)\right) l_\nu(x)^2=1,$$

ezért (2. 4) miatt

$$
(5.4)\qquad \begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{n} l_\nu(x)^2-1 &= 2(\alpha+1)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{x_\nu}{1-x_\nu^2}(x-x_\nu)l_\nu(x)^2=\\ &=2(\alpha+1)\Big\{\sum_{|x-x_\nu|\leqq n^{-\frac{1}{2}}}+\sum_{|x-x_\nu|>n^{-\frac{1}{2}}}\Big\}=2(\alpha+1)\{S_1+S_2\}.\end{aligned}
$$

Mivel $|x_\nu|<1$ és $\alpha\geqq 0$ esetén $(1-x_\nu^2)^{-\alpha}\geqq 1$, továbbá a $-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon$ intervallumban $(1-x^2)^{1+\alpha}\geqq\varepsilon^{1+\alpha}$, ezért és továbbá (5. 2) miatt

$$
(5.5)\qquad |S_1|\leqq n^{-\frac{1}{2}}\sum_{|x-x_\nu|\leqq n^{-\frac{1}{2}}}\frac{1}{(1-x_\nu^2)^{1+\alpha}}l_\nu(x)^2\leqq c_8 n^{-\frac{1}{2}}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1-x^2}{1-x_\nu^2}\right)^{1+\alpha}l_\nu(x)^2\leqq c_8 n^{-\frac{1}{2}}.
$$

Ha pedig $|x-x_\nu|>n^{-\frac{1}{2}}$, akkor

$$
|S_2|\leqq n^{\frac{1}{2}}\omega_n(x)^2\sum_{|x-x_\nu|>n^{-\frac{1}{2}}}\frac{1}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)^2},
$$

és ebből (2. 7), (4. 8) miatt, mivel $(1-x_\nu^2)<1$, $(\nu=1,2,\ldots,n)$

$$
(5.6)\qquad |S_2|\leqq c_9 n^{-\frac{1}{2}}.
$$

Az (5. 4), (5. 5) és (5. 6) a IV. segédtétel bizonyítását adják.

Most rátérünk az elsőfajú alappolinomokra vonatkozó becslés igazolására. Ehhez azonban a (2. 19) alatti $s_\nu(x)$ elsőfajú alappolinomokat más alakban írjuk fel.

Igaz a következő egyenlőség

$$
(5.7)\qquad \begin{aligned}\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x\frac{l_\nu(t)(a_\nu t+b_\nu)-l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt &= a_\nu\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)dt+\\ &+\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x\frac{(a_\nu x_\nu+b_\nu)l_\nu(t)-l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt.\end{aligned}
$$

Figyelemmel a (3. 10) és (3. 17) kifejezésre

$$
\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x\frac{(a_\nu x_\nu+b_\nu)l_\nu(t)-l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt=
$$

$$
=\frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x\frac{2(\alpha+1)x_\nu l_\nu(t)-2(1-x_\nu^2)l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt=
$$

$$=\frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x \frac{1}{t-x_\nu}\{-2(\alpha+1)(t-x_\nu)l_\nu(t)-2(t^2-x_\nu^2)l_\nu'(t)+$$
$$+2(t^2-1)l_\nu'(t)+2(\alpha+1)tl_\nu(t)\}dt=$$

$$=-\frac{(\alpha+1)\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)dt-\frac{\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}(x+x_\nu)l_\nu(x)+$$

$$+\frac{\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}x_\nu l_\nu(0)+\frac{\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)dt+$$

$$+\frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x \frac{-2(1-t^2)l_\nu'(t)+2(\alpha+1)tl_\nu(t)}{t-x_\nu}dt.$$

Ebből a (3. 4) differenciálegyenlet alapján

$$\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x \frac{(ax_\nu+b_\nu)l_\nu(t)-l_\nu'(t)}{t-x_\nu}dt=-\frac{(\alpha+1)\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)dt-$$

$$-\frac{\omega_n(x)(x+x_\nu)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(x)+\frac{\omega_n(x)x_\nu}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(0)+\frac{\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)dt+$$

$$+\frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x\{(1-t^2)l_\nu''(t)-2(\alpha+1)tl_\nu'(t)+n(n+2\alpha+1)l_\nu(t)\}dt=$$

$$=-\frac{(\alpha+1)\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)dt-\frac{\omega_n(x)(x+x_\nu)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(x)+\frac{x_\nu\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(0)+$$

$$+\frac{\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)dt+\frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}(1-x^2)l_\nu'(x)-$$

$$-\frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu'(0)+\frac{\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}xl_\nu(x)-\frac{\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)dt-$$

$$-\frac{(\alpha+1)\omega_n(x)x}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(x)+\frac{(\alpha+1)\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)+$$

$$+\frac{n(n+2\alpha+1)}{2}\frac{\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)\,dt = -\frac{[x_\nu+(\alpha+1)x]\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(x)+$$

$$+\frac{x_\nu\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(0)+\frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}(1-x^2)l_\nu'(x)-$$

$$-\frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu'(0)+\frac{n(n+2\alpha+1)}{2}\cdot\frac{\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)\,dt.$$

Mivel pedig (3. 2) alapján

$$l_\nu'(x)=\frac{(x-x_\nu)\omega_n'(x)-\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)(x-x_\nu)^2},$$

ezért az előző egyenlőségből, figyelemmel arra, hogy $n=2k$ miatt $\omega_n'(0)=0$

$$\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x\frac{(a_\nu x_\nu+b_\nu)l_\nu(t)-l_\nu'(t)}{t-x_\nu}\,dt=-\frac{[x_\nu+(\alpha+1)x]\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(x)+$$

$$(5.8)\quad +\frac{x_\nu\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(0)+\frac{(1-x^2)\omega_n'(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(x)-\frac{1-x^2}{2(1-x_\nu^2)}l_\nu(x)^2+$$

$$+\frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n(0)}l_\nu(0)^2+\frac{n(n+2\alpha+1)}{2}\cdot\frac{\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)\,dt.$$

Ezek után (5. 8), (5. 7) (2. 19) alapján az $s_\nu(x)$ elsőfajú alappolinom a következő módon írható fel:

$$s_\nu(x)=l_\nu(x)^2+a_\nu\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)\,dt-\frac{[x_\nu+(\alpha+1)x]\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(x)+$$

$$(5.9)\quad +\frac{x_\nu\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(0)+\frac{(1-x^2)\omega_n'(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(x)-\frac{(1-x^2)}{2(1-x_\nu^2)}l_\nu(x)^2+$$

$$+\frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n(0)}l_\nu(0)^2+\frac{n(n+2\alpha+1)}{2}\cdot\frac{\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)\,dt,$$

$$(\nu=1,2,\ldots,n)$$

ahol az $a_\nu$ konstans a (2. 20) kifejezés.

Ezek után az elsőfajú $s_\nu(x)$ alappolinomokra vonatkozó becslést el tudjuk végezni.

VII. segédtétel. *A* $-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ *intervallumban, ahol* $0<\varepsilon<1$ *($\varepsilon$ egyébként tetszés szerinti), érvényes a következő egyenlőtlenség, ha* $\alpha>0$

$$\sum_{\nu=1}^{n} |s_\nu(x)| \leqq c_{23} n^{3/2}, \qquad (n=2,4,6,\ldots) \tag{5.10}$$

*ahol* $s_\nu(x)$ *a* (2.19) *alatti elsőfajú alappolinom.*

Bizonyítás: A segédtétel állításának igazolásánál a (2.19) alatti $s_\nu(x)$ elsőfajú alappolinomok (5.9) alatti kifejezését használjuk fel.

A következőkben mindig támaszkodunk arra a tényre, hogy $|x_\nu|<1$, $(\nu=1,2,\ldots,n)$; a $-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ intervallumban $(1-x^2) \geqq \varepsilon$ és $\alpha>0$. Ezeket a tényeket szem előtt tartva, igazak a következő egyenlőtlenségek:

Az (5.2) alatti egyenlőtlenség miatt

$$\sum_{\nu=1}^{n} l_\nu(x)^2 \leqq c_{11} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1-x^2}{1-x_\nu^2}\right)^{1+\alpha} l_\nu(x)^2 \leqq c_{11}. \tag{5.11}$$

Figyelemmel az $a_\nu$ konstans (2.20) alatti kifejezésére

$$|\omega_n(x)| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|a_\nu|}{|\omega_n'(x_\nu)|} \left| \int_0^x l_\nu(t)\,dt \right| \leqq c_{12} |\omega_n(x)| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(1-x_\nu^2)^2 |\omega_n'(x_\nu)|} \left| \int_0^x l_\nu(t)\,dt \right|.$$

Az egyenlőtlenség jobboldalán egy konstans szorzó tényezőtől eltekintve a (4.10) alatti kifejezés áll, s ezért a (4.9) egyenlőtlenség miatt

$$|\omega_n(x)| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|a_\nu|}{|\omega_n'(x_\nu)|} \left| \int_0^x l_\nu(t)\,dt \right| \leqq c_{13} \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{5.12}$$

A Cauchy-féle egyenlőtlenség alkalmazásával (2.7), (4.8) és (5.11) miatt

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{n} \frac{|x_\nu+(\alpha+1)x|\,|\omega_n(x)|}{(1-x_\nu^2)|\omega_n'(x_\nu)|} |l_\nu(x)| \leqq \\ &\leqq c_{14} |\omega_n(x)| \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(1-x_\nu^2)^2 \omega_n'(x_\nu)^2} \sum_{\nu=1}^{n} l_\nu^2(x) \right\}^{1/2} \leqq c_{15} \frac{1}{\sqrt{n}}, \end{aligned} \tag{5.13}$$

és ugyanígy

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{|x_\nu|\,|\omega_n(x)|}{(1-x_\nu^2)|\omega_n'(x_\nu)|} |l_\nu(0)| \leqq c_{15} \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{5.14}$$

Figyelemmel a (2.5) egyenlőségre, majd a Cauchy-féle egyenlőtlenség alkalmazása után (4.8), (5.11) és (2.7) miatt

$$\frac{(1-x^2)|\omega_n'(x)|}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(1-x_\nu^2)|\omega_n'(x_\nu)|}|l_\nu(x)|=\frac{|-nx\omega_n(x)+(n+\alpha)\omega_{n-1}(x)|}{2}.$$

(5.15)

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(1-x_\nu^2)|\omega_n'(x_\nu)|}|l_\nu(x)|\leqq c_{16}\sqrt{n}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(1-x_\nu^2)^2\omega_n'(x_\nu)^2}\sum_{\nu=1}^{n}l_\nu(x)^2\right\}^{1/2}\leqq c_{17}\sqrt{n}.$$

Mivel a feltétel szerint $\alpha>0$ ezért (5.2) miatt

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1-x^2}{1-x_\nu^2}l_\nu(x)^2\leqq c_{18}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1-x^2}{1-x_\nu^2}\right)^{1+\alpha}l_\nu(x)^2\leqq c_{18}. \tag{5.16}$$

A feltétel szerint $n=2k$ páros szám, ezért (lásd pl. SZEGŐ [15] 80. és 166. o.) (4.5) miatt

(5.17)
$$|\omega_n(0)|=|P_n^{(\alpha)}(0)|=$$

$$=\frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}\left|\binom{\frac{n}{2}+\alpha-\frac{1}{2}}{\frac{n}{2}}\right|>c_{19}n^{-\alpha}\left|\binom{\frac{n}{2}+\alpha-\frac{1}{2}}{\frac{n}{2}}\right|>c_{20}n^{-\frac{1}{2}}.$$

Az (5.17), (2.7), (5.2) és $\alpha>0$ miatt

$$\frac{|\omega_n(x)|}{2|\omega_n(0)|}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{1-x_\nu^2}l_\nu(0)^2\leqq c_{21}. \tag{5.18}$$

S végül (2.7), (4.10) és (4.9) miatt

$$\frac{n(n+2\alpha+1)}{2}|\omega_n(x)|\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(1-x_\nu^2)|\omega_n'(x_\nu)|}\left|\int_0^x l_\nu(t)\,dt\right|\leqq c_{22}n^{3/2}. \tag{5.19}$$

Tekintve az $s_\nu(x)$ elsőfajú alappolinomok (5.9) alatti kifejezését, az (5.11)—(5.19) egyenlőtlenségek igazolásával bebizonyítottuk a VII. segédtétel állítását. Ugyanis a

$$\sum_{\nu=1}^{n}|s_\nu(x)|\leqq\sum_{\nu=1}^{n}\left\{l_\nu(x)^2+\left|a_\nu\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)\,dt\right|+\left|\frac{[x_\nu+(\alpha+1)x]\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(x)\right|+\right.$$

$$+\left|\frac{x_\nu\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(0)\right|+\left|\frac{(1-x^2)\omega_n'(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}l_\nu(x)\right|+\frac{1-x^2}{2(1-x_\nu^2)}l_\nu(x)^2+$$

$$\left.+\left|\frac{\omega_n(x)}{2(1-x_\nu^2)\omega_n(0)}\right|l_\nu(0)^2+\frac{n(n+2\alpha+1)}{2}\left|\frac{\omega_n(x)}{(1-x_\nu^2)\omega_n'(x_\nu)}\int_0^x l_\nu(t)\,dt\right|\right\}$$

egyenlőtlenség jobb oldalán álló valamennyi tag felső becslését megkapjuk az (5.11)—(5.19) egyenlőtlenségekből.

## 6. §. A Jackson-féle közepekre vonatkozó segédtételek

A konvergencia tétel bizonyításához a Jackson-féle közepekre vonatkozó két segédtételre lesz szükség.

Legyen $\varphi(\vartheta)$ $2\pi$ szerint periódikus függvény, akkor a hozzá tartozó Jackson-féle közép (lásd JACKSON [24])

$$(6.1)\qquad J_n(\vartheta;\varphi)=\frac{3}{2\pi n(2n^2+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\left(\frac{\sin n\frac{t-\vartheta}{2}}{\sin\frac{t-\vartheta}{2}}\right)^4 dt,$$

vagy mint ismeretes a $J_n(\vartheta,\varphi)$ alternatív formája

$$(6.2)\qquad J_n(\vartheta;\varphi)=\frac{3}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\varphi(\vartheta+2t)+\varphi(\vartheta-2t)\}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt$$

és ismeretes az is, hogy

$$(6.3)\qquad 1=\frac{6}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt.$$

Az itt közölt segédtételek lényegében ismertek, bizonyításukat a teljesség kedvéért közöljük. A bizonyítás módja egyébként megtalálható TURÁN—BALÁZS [7] dolgozatában.

VIII. segédtétel. *Ha $\varphi(\vartheta)$ $2\pi$ periódusú differenciálható függvény és $\varphi'(\vartheta)\in \mathrm{Lip}_M\mu$, ahol $0<\mu\leqq 1$, akkor*

$$|\varphi(\vartheta)-J_n(\vartheta;\varphi)|\leqq\frac{K}{n^{1+\mu}},$$

*ahol a $K$ konstans az $n$ értékétől független.*

Bizonyítás: A (6.2) és (6.3) alapján

$$\Delta_n(\vartheta)=J_n(\vartheta;\varphi)-\varphi(\vartheta)=$$

$$=\frac{3}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\varphi(\vartheta+2t)+\varphi(\vartheta-2t)-2\varphi(\vartheta)\}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt,$$

és ebből a Lagrange-féle középérték tétel alapján

$$\Delta_n(\vartheta)=\frac{3}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\{\varphi'(t_1)-\varphi'(t_2)\}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt, \tag{6.4}$$

ahol

$$\vartheta\leqq t_1\leqq \vartheta+2t \quad \text{és} \quad \vartheta-2t\leqq t_2\leqq \vartheta. \tag{6.5}$$

A feltétel szerint $\varphi'(t)\in \mathrm{Lip}_M\,\mu$, ezért (6.5) miatt

$$|\varphi'(t_1)-\varphi'(t_2)|\leqq M|t_1-t_2|^\mu\leqq 4^\mu M t^\mu = M_1 t^\mu, \tag{6.6}$$

ezért

$$|\Delta_n(\vartheta)|\leqq \frac{6M_1}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{1+\mu}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt\leqq \frac{K_0}{n^3}\left\{\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\right\}, \tag{6.7}$$

ahol $K_0$ az $n$ értékétől független konstans.

Figyelembe véve, hogy $|\sin nt|\leqq 1$, $|\sin nt|\leqq n|\sin t|$ és a $0\leqq t\leqq \frac{\pi}{2}$ intervallumban $\sin t\geqq \frac{2}{\pi}t$, ezért a (6.7) egyenlőtlenségből

$$|\Delta_n(\vartheta)|\leqq \frac{K_0}{n^3}\left\{n^4\int_0^{\frac{1}{n}} t^{1+\mu}dt+\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\int_{\frac{1}{n}}^{\infty} t^{\mu-3}dt\right\}\leqq \frac{K}{n^{1+\mu}}.$$

A továbbiakban szükségünk lesz a következő ismert tényre: Ha az $f(x)$ függvény differenciálható a $-1\leqq x\leqq +1$ intervallumban és ebben az intervallumban $f'(x)\in \mathrm{Lip}_M\mu$, ahol $0<\mu\leqq 1$, akkor ha $x=\cos\vartheta$ és

$$\varphi(\vartheta)=f(\cos\vartheta), \tag{6.8}$$

akkor a

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta}=-f'(\cos\vartheta)\sin\vartheta \tag{6.9}$$

függvény is a Lip $\mu$ függvényosztályba tartozik, esetleg más $M$ együtthatóval. Ugyanis

$$\left|\left(\frac{d\varphi}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=\vartheta'}-\left(\frac{d\varphi}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=\vartheta''}\right|=|-f'(\cos\vartheta')\sin\vartheta'+f'(\cos\vartheta'')\sin\vartheta''|=$$

$$=|\sin\vartheta''\{f'(\cos\vartheta'')-f'(\cos\vartheta')\}+f'(\cos\vartheta')\{\sin\vartheta''-\sin\vartheta'\}|\leqq$$

$$\leqq|f'(\cos\vartheta'')-f'(\cos\vartheta')|+M_0|\sin\vartheta''-\sin\vartheta'|,$$

ahol $M_0=\max\limits_{-1\leqq x\leqq +1}|f'(x)|$.

Mivel pedig a feltétel szerint

$$|f'(\cos\vartheta'')-f'(\cos\vartheta')|\leqq M|\cos\vartheta''-\cos\vartheta'|^{\mu}\leqq M|\vartheta''-\vartheta'|^{\mu}$$

és

$$|\sin\vartheta''-\sin\vartheta'|\leqq|\vartheta''-\vartheta'|.$$

Ha $|\vartheta''-\vartheta'|<1$, akkor

$$|\sin\vartheta''-\sin\vartheta'|\leqq|\vartheta''-\vartheta'|^{\mu}<2|\vartheta''-\vartheta'|^{\mu},$$

ha pedig $|\vartheta''-\vartheta'|\geqq 1$, akkor

$$|\sin\vartheta''-\sin\vartheta'|\leqq 2|\vartheta''-\vartheta'|^{\mu}.$$

Ezek után nyilván

$$\left|\left(\frac{d\varphi}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=\vartheta'}-\left(\frac{d\varphi}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=\vartheta''}\right|\leqq M_1|\vartheta'-\vartheta''|^{\mu}, \tag{6.10}$$

ahol $M_1=\max\{M,2M_0\}$, azaz a $\frac{d\varphi}{d\vartheta}$ függvény valóban a $\operatorname{Lip}\mu$ függvényosztályhoz tartozik.

Mivel a (6.8) alatti $\varphi(\vartheta)$ függvény páros, ezért a hozzá tartozó $J_n(\vartheta;\varphi)$ Jackson-féle közép $(2n-2)$-edrendű tiszta cosinus polinom, azaz a

$$J_n(\arccos x;\varphi)\equiv\pi_{2n-2}(x)$$

egy $(2n-2)$-edfokú racionális polinom és

$$\pi_{2n-2}(x)=\frac{3}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\varphi(\arccos x+2t)+\varphi(\arccos x-2t)\}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt. \tag{6.11}$$

A VIII. segédtétel alapján az előzőek miatt a $-1\leqq x\leqq+1$ intervallumban

$$|\pi_{2n-2}(x)-f(x)|\leqq\frac{K}{n^{1+\mu}}. \tag{6.12}$$

A (6.11) kifejezést differerenciáljuk $x$ szerint

$$\pi'_{2n-2}(x)=-\frac{3}{\pi n(2n^2+1)}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(\frac{d\varphi}{du}\right)_{u=\arccos x+2t}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{d\varphi}{du}\right)_{u=\arccos x-2t}\right\}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt, \tag{6.13}$$

ebből, mivel (6.9) miatt

$$\max_{\vartheta}\left|\frac{d\varphi}{d\vartheta}\right| = \max_{\vartheta}\left|\frac{df(\cos\vartheta)}{d\vartheta}\right| \leqq \max_{-1\leqq x\leqq +1}|f'(x)| = M_0 \tag{6.14}$$

és (6.3) miatt a $-1<x<1$ intervallumban

$$|\pi'_{2n-2}(x)| \leqq \frac{M_0}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{6.15}$$

A (6.13) kifejezést írjuk át a (6.1) kifejezéshez hasonló alakban. Ezt megtehetjük megfelelő helyettesítések után, kihasználva a $2\pi$ szerinti periodicitást és a következő (6.13) kifejezéssel ekvivalens kifejezést kapjuk

$$\pi'_{2n-2}(x) = -\frac{3}{2\pi n(2n^2+1)}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt}\left(\frac{\sin n\dfrac{t-\arccos x}{2}}{\sin\dfrac{t-\arccos x}{2}}\right)^4 dt.$$

Differenciáljuk ezt ismét $x$ szerint, akkor

$$\pi''_{2n-2}(x) = \frac{-3}{2\pi n(2n^2+1)}\cdot\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt}\left(\frac{\sin n\dfrac{t-\vartheta}{2}}{\sin\dfrac{t-\vartheta}{2}}\right)^4 dt +$$

$$+\frac{3}{\pi n(2n^2+1)}\cdot\frac{1}{1-x^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt}\left(\frac{\sin n\dfrac{t-\vartheta}{2}}{\sin\dfrac{t-\vartheta}{2}}\right)^3\cdot$$

$$\cdot\frac{n\sin\dfrac{t-\vartheta}{2}\cos n\dfrac{t-\vartheta}{2} - \sin n\dfrac{t-\vartheta}{2}\cos\dfrac{t-\vartheta}{2}}{\sin^2\dfrac{t-\vartheta}{2}}\,dt.$$

Ezen kifejezésből megfelelő helyettesítések után, felhasználva a $2\pi$ szerinti periodicitást, a (6.2) kifejezéshez hasonlóan, a $\pi''_{2n-2}(x)$ kifejezésre a következő alternatív egyenlőséget kapjuk

$$\pi''_{2n-2}(x) =$$

$$= -\frac{3}{\pi n(2n^2+1)}\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)_{u=\vartheta+2t} + \left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)_{u=\vartheta-2t}\right\}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt +$$

$$+\frac{6}{\pi n(2n^2+1)}\cdot\frac{1}{1-x^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)_{u=\vartheta+2t}-\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)_{u=\vartheta-2t}\right\}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^3 n\frac{\cos nt}{\sin t}dt-$$

$$-\frac{6}{\pi n(2n^2+1)}\cdot\frac{1}{1-x^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)_{u=\vartheta+2t}-\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)_{u=\vartheta-2t}\right\}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4\operatorname{ctg} t\,dt\equiv$$

$$\equiv u_1(x)+u_2(x)+u_3(x). \tag{6.16}$$

A $\pi''_{2n-2}(x)$ (6.16) alatti kifejezésére támaszkodva a következő segédtételt bizonyítjuk be:

IX. segédtétel. *A* $-1<x<+1$ *intervallumban a* (6.11) *alatti* $\pi_{2n-2}(x)$ *polinomra vonatkozólag érvényes a következő egyenlőtlenség*

$$|\pi''_{2n-2}(x)|\leqq\frac{M_0}{(1-x^2)^{3/2}}+\frac{d_7}{(1-x^2)}n^{1-\mu}, \tag{6.17}$$

*ahol* $M_0=\max\limits_{-1\leqq x\leqq+1}|f'(x)|$, *és* $d_7$ *az* $n$ *értékétől független konstans.*

Bizonyítás: A (6.16), (6.14) és (6.3) miatt

$$|u_1(x)|\leqq M_0\frac{|x|}{(1-x^2)^{3/2}}\cdot\frac{6}{\pi n(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt=M_0\frac{|x|}{(1-x^2)^{3/2}}. \tag{6.18}$$

A (6.16) alatti $u_2(x)$ és $u_3(x)$ kifejezéseket a következő módon írjuk fel

$$u_2(x)=\frac{6}{\pi(2n^2+1)}\cdot\frac{1}{1-x^2}\left[\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)_{u=\vartheta+2t}-\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)_{u=\vartheta-2t}\right\}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\cos nt}{\sin t}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^3 dt\right]\equiv\frac{6}{\pi(2n^2+1)}\cdot\frac{1}{1-x^2}[I_1+I_2], \tag{6.19}$$

és

$$u_3(x)=-\frac{6}{\pi n(2n^2+1)}\frac{1}{1-x^2}\left[\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)_{u=\vartheta+2t}-\left(\frac{d\varphi(u)}{du}\right)_{u=\vartheta-2t}\right\}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4\operatorname{ctg} t\,dt\right]\equiv-\frac{6}{\pi n(2n^2+1)}\cdot\frac{1}{1-x^2}[I_3+I_4]. \tag{6.20}$$

A (6.10) alatti egyenlőtlenség miatt, mivel $|\cos nt| \leqq 1$, $|\sin nt| \leqq n|\sin t|$ és a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban $|\sin t| \geqq \frac{2}{\pi} t$, ezért

$$(6.21)\qquad \frac{6}{\pi(2n^2+1)}\cdot\frac{1}{1-x^2}|I_1| \leqq \frac{6}{\pi(2n^2+1)}\cdot\frac{d_1}{1-x^2}\int_0^{\frac{1}{n}} t^{\mu-1}\cdot n^3 dt \leqq d_2 n^{1-\mu}\cdot\frac{1}{1-x^2},$$

ahol $d_1$, illetve $d_2$ az $n$ értékétől független konstansok. Teljesen hasonló módon nyerhető a

$$(6.22)\qquad \frac{6}{\pi n(2n^2+1)}|I_3| \leqq d_3 n^{1-\mu}\cdot\frac{1}{1-x^2}$$

egyenlőtlenség, ahol $d_3$ ugyancsak független $n$ értékétől. Viszont (6.10) miatt és mivel $|\cos nt| \leqq 1$ és $|\sin nt| \leqq 1$, és a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban $|\sin t| \geqq \frac{2}{\pi} t$, ezért

$$(6.23)\qquad \frac{6}{\pi(2n^2+1)}\cdot\frac{1}{1-x^2}|I_2| \leqq \frac{6}{\pi(2n^2+1)}\cdot\frac{d_4}{1-x^2}\int_{\frac{1}{n}}^{\infty} t^{\mu-4} dt \leqq d_5 n^{1-\mu}\frac{1}{1-x^2}.$$

Ugyancsak teljesen hasonló módon nyerhető a

$$(6.24)\qquad \frac{6}{\pi n(2n^2+1)}\cdot\frac{1}{1-x^2}|I_4| \leqq d_6 n^{1-\mu}\cdot\frac{1}{1-x^2}$$

egyenlőtlenség. A $d_5$ és $d_6$ konstansok itt is függetlenek $n$ értékétől. A (6.18)—(6.24) kifejezések a IX. segédtétel igazolását adják. Ezek után rátérhetünk a IV. tétel bizonyítására.

## 7. §. A negyedik tétel bizonyítása

A (6.11) alatti $(2n-2)$-edfokú polinomot (3.24) miatt a következő módon írhatjuk fel

$$(7.1)\qquad \pi_{2n-2}(x) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \pi_{2n-2}(x_{\nu n}) s_{\nu n}(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \{\varrho(x)\pi_{2n-2}(x)\}''_{x=x_{\nu n}} \sigma_{\nu n}(x) + \gamma_n \omega_n(x),$$

ahol $\gamma_n$ konstans a következő

$$\gamma_n = \frac{1}{\omega_n(0)}\left\{\pi_{2n-2}(0) - \sum_{\nu=1}^{n} \pi_{2n-2}(x_{\nu n}) l_{\nu n}(0)^2\right\}.$$

A (2.18) alapján, ha $y_{\nu n} = f(x_{\nu n})$ és $y''_{\nu n} = o(\sqrt{n})(1-x_{\nu n}^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}$, $(\nu = 1, 2, \ldots, n;$

$n=2,4,6,\ldots$), továbbá (7. 1) miatt

$$|f(x)-S_n(x;f)|\leqq|f(x)-\pi_{2n-2}(x)|+\sum_{\nu=1}^{n}|\pi_{2n-2}(x_{\nu n})-f(x_{\nu n})|\,|s_{\nu n}(x)|+$$
$$+\sum_{\nu=1}^{n}\left|\{\varrho(x)\pi_{2n-2}(x)\}''_{x=x_{\nu n}}-\sigma(\sqrt{n})(1-x_{\nu n}^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}\right||\sigma_{\nu n}(x)|+|\gamma_n\omega_n(x)|.$$

Ebből (6. 12) és (5. 10) miatt a $-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon$ intervallumban

$$|f(x)-S_n(x;f)|\leqq\frac{K}{n^{1+\mu}}+\frac{K}{n^{1+\mu}}\cdot c_{23}n^{3/2}+ \tag{7.2}$$
$$+\sum_{\nu=1}^{n}\left|\{\varrho(x)\pi_{2n-2}(x)\}''_{x=x_{\nu n}}-\sigma(\sqrt{n})(1-x_{\nu n}^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}\right||\sigma_{\nu n}(x)|+|\gamma_n\omega_n(x)|.$$

Nyilván

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left|\{\varrho(x)\pi_{2n-2}(x)\}''_{x=x_{\nu n}}-\sigma(\sqrt{n})(1-x_{\nu n}^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}\right||\sigma_{\nu n}(x)|\leqq$$
$$\leqq\sum_{\nu=1}^{n}|\varrho''(x_{\nu n})\pi_{2n-2}(x_{\nu n})|\,|\sigma_{\nu n}(x)|+2\sum_{\nu=1}^{n}|\varrho'(x_{\nu n})\pi'_{2n-2}(x_{\nu n})|\,|\sigma_{\nu n}(x)|+ \tag{7.3}$$
$$+\sum_{\nu=1}^{n}|\varrho''(x_{\nu n})\pi''_{2n-2}(x_{\nu n})|\,|\sigma_{\nu n}(x)|+\sigma(\sqrt{n})\sum_{\nu=1}^{n}(1-x_{\nu n}^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}|\sigma_{\nu n}(x)|=$$
$$=U_1+U_2+U_3+U_4.$$

Mivel $\varrho(x)=(1-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}$, $\varrho''(x)=-(1-x^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}\{(1+\alpha)(1-x^2)+(1-\alpha^2)x^2\}$ és (6. 12) miatt a $-1\leqq x\leqq+1$ intervallumban $|\pi_{2n-2}(x)|\leqq K_1$, ahol $K_1$ az $n$ értékétől független konstans, ezért a $-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon$ intervallumban (4. 9) miatt, mivel $\alpha>0$,

$$U_1\leqq c_{24}\sum_{\nu=1}^{n}(1-x_{\nu n}^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}|\sigma_{\nu n}(x)|\leqq c_{25}\frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{7.4}$$

A $\varrho'(x)=-(1+\alpha)x(1-x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}$ és (6. 15) miatt (4. 9) alapján

$$U_2\leqq c_{26}\sum_{\nu=1}^{n}(1-x_{\nu n}^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}|\sigma_{\nu n}(x)|\leqq c_{27}\frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{7.5}$$

A (6. 17) alatti egyenlőtlenség figyelembevételével, mivel $1-x_{\nu n}^2<1$, ismét (4. 9) miatt a $-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon$ intervallumban

$$U_3\leqq\sum_{\nu=1}^{n}|\varrho(x_{\nu n})|\left[\frac{M_0}{(1-x_{\nu n}^2)^{3/2}}+\frac{d_7}{(1-x_{\nu n}^2}n^{1-\mu}\right]|\sigma_{\nu n}(x)|\leqq \tag{7.6}$$
$$\leqq c_{28}\sum_{\nu=1}^{n}(1-x_{\nu n}^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}|\sigma_{\nu n}(x)|+c_{29}n^{1-\mu}\sum_{\nu=1}^{n}(1-x_{\nu n}^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}|\sigma_{\nu n}(x)|\leqq c_{30}n^{\frac{1}{2}-\mu}.$$

Végül (4.9) miatt a $-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon$ intervallumban

$$U_4=\sigma(1). \tag{7.7}$$

A feltétel szerint $\frac{1}{2}<\mu\leqq 1$ ezért (7.2)—(7.7) egyenlőtlenségek alapján a $-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon$ intervallumban

$$|f(x)-S_n(x;f)|\leqq\sigma(1)+|\gamma_n\omega_n(x)|. \tag{7.8}$$

Mivel pedig $n=2k$, ezért (5.17) és (2.7) miatt

$$\begin{aligned}|\gamma_n\omega_n(x)|&=\left|\frac{\omega_n(x)}{\omega_n(0)}\right|\left|\pi_{2n-2}(0)-\sum_{\nu=1}^{n}\pi_{2n-2}(x_{\nu n})l_{\nu n_1}(0)^2\right|\leqq\\&\leqq c_{31}|\pi_{2n-2}(0)-\sum_{\nu=1}^{n}\pi_{2n-2}(x_{\nu n})l_{\nu n}(0)^2|=c_{31}U_5.\end{aligned} \tag{7.9}$$

Ezen kifejezés alapján

$$U_5=\left|\sum_{\nu=1}^{n}[\pi_{2n-2}(0)-\pi_{2n-2}(x_{\nu n})]l_{\nu n}(0)^2+\pi_{2n-2}(0)\left[1-\sum_{\nu=1}^{n}l_{\nu n}(0)^2\right]\right|.$$

Mivel pedig a $-1\leqq x\leqq +1$ intervallumban a $\pi_{2n-2}(x)$, $(n=2,4,6,\ldots)$ polinomok egy $n$ értékétől független korlát alatt maradnak, s ezért (5.3) miatt

$$\begin{aligned}U_5&\leqq\sum_{\nu=1}^{n}|\pi_{2n-2}(0)-\pi_{2n-2}(x_{\nu n})|l_{\nu n}(0)^2+c_{32}\frac{1}{\sqrt{n}}\leqq\\&\leqq\sum_{\nu=1}^{n}|x_{\nu n}||\pi'_{2n-2}(\xi_{\nu n})|l_{\nu n}(0)^2+c_{32}\frac{1}{\sqrt{n}},\end{aligned}$$

ahol $0\leqq|\xi_{\nu n}|\leqq|x_{\nu n}|$. Nyilván $1-x_{\nu n}^2\leqq 1-\xi_{\nu n}^2$, ezért (6.15) miatt

$$U_5\leqq M_0\sum_{\nu=1}^{n}\frac{|x_{\nu n}|}{\sqrt{1-x_{\nu n}^2}}l_{\nu n}(0)^2+c_{32}\frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{7.10}$$

Figyelembe véve az $l_{\nu n}(x)$ (3.2) alatti kifejezését, majd a Cauchy-féle egyenlőtlenség felhasználásával (2.7), (4.8) és (5.11) miatt

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{|x_{\nu n}|}{\sqrt{1-x_{\nu n}^2}}l_{\nu n}(0)^2&=|\omega_n(0)|\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{|\omega_n'(x_{\nu n})|}\frac{1}{\sqrt{1-x_{\nu n}^2}}|l_{\nu n}(0)|\leqq\\&\leqq|\omega_n(0)|\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(1-x_{\nu n}^2)\omega_n'(x_{\nu n})^2}\sum_{\nu=1}^{n}l_\nu(0)^2\right\}^{1/2}\leqq c_{33}\frac{1}{\sqrt{n}}.\end{aligned} \tag{7.11}$$

Ezek után (7.11), (7.10), (7.9) és (7.8) alapján a $-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon$ intervallumban

$$|f(x)-S_n(x;f)|=\sigma(1).$$

Ez pedig a IV. tétel állításának a bizonyítását adja.

## IRODALOM

[1] CH. HERMITE, Sur la formule d'interpolation de Lagrange, *Journ. für Math.*, **84** (1878) 70—79.
[2] L. FEJÉR, Über Interpolation *Gött. Nachr.*, (1916) 66—91.
[3] G. D. BIRKHOFF, General mean value and remainder theorems with applications to mechanical differentiation and quadrature, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **7** (1906) 107—136.
[4] G. PÓLYA, Bemerkung zur Interpolation und zur Näherungstheorie der Balkenbiegung, *Zeitschr. für angew. Math. und Mech.*, **11** (1931) 445 449.
[5] J. SURÁNYI—P. TURÁN, Notes on interpolation I, *Acta Math. Ac. Sci. Hung.*, **6** (1955) 66—79.
[6] J. BALÁZS—P. TURÁN, Notes on interpolation II, ibid, **8** (1957) 201—215.
[7] J. BALÁZS P. TURÁN, Notes on interpolation III, ibid, **9** (1958) 195—214.
[8] G. FREUD, Bemerkung über die Konvergenz eines Interpolationsverfahrens von P. Turán, ibid, **9** (1958) 337—341.
[9] R. B. SAXENA—A. SHARMA, On some interpolatory properties of Legendre polynomials, ibid, **9** (1958) 345 358.
[10] R. B. SAXENA—A. SHARMA, Convergence of interpolatory polynomials, ibid, **10** (1959) 157—175.
[11] R. B. SAXENA, *On some interpolatory properties of Legendre polynomials*, Ph. D. Thesis, Lucknow, University.
[12] K. K. MATHUR—A. SHARMA, Some interpolatory properties of Hermite polynomials, *Acta Math. Ac. Sci. Hung.*, **12** (1961) 193 207.
[13] О. Киш, Замечания об интерполировании, ibid, **11** (1960) 49—64.
[14] О. Киш, О тригонометрическом (0, 2) — интерполировании, ibid, **11** (1960) 255—276.
[15] G. SZEGŐ, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. New York, 1939.
[16] И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, Москва—Ленинград, 1949.
I. P. NATANSZON, *Konstruktiv függvénytan*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.
[17] J. BALÁZS, Megjegyzések a stabil interpolációról, *Mat. Lapok*, **11** (1960) 280—293.
[18] E. EGERVÁRY—P. TURÁN, Notes on interpolation V., *Acta Math. Ac. Sci. Hung.*, **9** (1958) 259—267.

(Beérkezett: 1961. V. 15.)

*A Magyar Tudományos Akadémia*
*Matematikai Kutató Intézete*

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1961. VI. 22. — Terjedelem: 9,75 (A/5) ív, 4 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 61-2640