A TELJESEN REDUCIBILIS OPERÁTORMODULUSOKRÓL

Írta: SZÁSZ FERENC

1. §. Bevezetés

Az A asszociatív gyűrű felett vett M A-jobbmodulusoknak, továbbá M operátorendomorfizmusainak a fogalmát, valamint az ezekkel kapcsolatos alapvető tényeket ismertnek tételezzük fel. (Lásd pl. a [4], [7], [15] és [18] könyveket, illetve a [10] cikksorozatnak és a [17] cikknek az előkészítő részeit.)

A jelen dolgozatban három operátormodulus-elméleti probléma kerül tárgyalásra, éspedig ezek közül az első két probléma a teljesen reducibilis operátormodulusok teljes operátorendomorfizmus-gyűrűjével foglalkozik. A harmadik probléma pedig az Artin-féle féligegyszerű gyűrűknek a főjobbideálokra nézve minimum-feltételű egységelemes gyűrűk osztályán belül való operátormodulus-elméleti jellemzésére vonatkozik.

A dolgozat 2. §-ában megmutattuk azt, hogy egy M teljesen reducibilis A-jobbmodulus $E(M)$ teljes operátorendomorfizmus-gyűrűje mindig reguláris Neumann-féle értelemben*. Tudvalevőleg I. SCHUR egyik fontos lemmája szerint egy M egyszerű (irreducibilis) A-jobbmodulus $E(M)$ teljes operátorendomorfizmus-gyűrűje ferdetest. Továbbá KERTÉSZ A. megmutatta azt (vö. [10] III. részével, valamint a [11] és [12] dolgozatokkal), hogy ha M teljesen reducibilis A-jobbmodulus (azaz M tetszőlegesen sok egyszerű A-jobbmodulusnak a diszkrét direkt összege), akkor M operátorendomorfizmusainak az $E(M)$ teljes gyűrűjében a J Jacobson-féle radikálra $J=0$ teljesül, azaz $E(M)$ Jacobson-féle értelemben féligegyszerű. Minthogy minden Neumann-reguláris gyűrű Jacobson-féle értelemben féligegyszerű, és minthogy léteznek Jacobson-féle értelemben féligegyszerű, de nem Neumann-reguláris gyűrűk, ezért $E(M)$ Neumann-regularitásának igazolása valódi módon élesíti KERTÉSZ A. eredményét. Pontosabban még az is kimondható, bármely Neumann-reguláris gyűrűre nézve, hogy minden $\gamma \in E(M)$ elemhez létezik olyan $\delta \in E(M)$, hogy egyidejűleg érvényes $\gamma = \gamma\delta\gamma$ és $\delta = \delta\gamma\delta$.[1]

A dolgozat 3. §-ában megmutatjuk azt, hogy ha M olyan teljesen reducibilis és végtelen rangú A-jobbmodulus, amely *homogén* abban az értelem-

* Itt és a továbbiakban A mindig asszociatív gyűrűt jelent.

[1] Ha ugyanis $\gamma = \gamma\eta\gamma$ és $\delta = \eta\gamma\eta$, akkor $(\gamma\eta)^2 = \gamma\eta$ és $(\eta\gamma)^2 = \eta\gamma$ miatt nyilván $\gamma = \gamma\delta\gamma$ és $\delta = \delta\gamma\delta$.

ben, hogy M-nek bármely két egyszerű A-részmodulusa egymással A-izomorf, akkor az $E(M)$ teljes endomorfizmus-gyűrű összes kétoldali ideáljai számossági paraméterekkel kanonikus alakban előállíthatók. Ez hasonlít a bizonyos nagyon fontos típusú primitív gyűrűk összes kétoldali ideáljainak a leírását jelentő Jacobson-féle tárgyaláshoz. (Lásd [7], IV. fejezet végét.)

A 4. §-ban felhasznált alaptényeket illetően utalunk KERTÉSZ ANDOR [10] cikksorozatának függelékére és a szerző [16] cikkére, és ezekre támaszkodva operátormodulus-elméleti jellemzést adunk a féligegyszerű Artin-féle gyűrűkre a főjobbideálokra nézve minimum-feltételű egységelemes gyűrűk osztályán belül. A vizsgálat közben a Kertész-féle radikálnak és a teljes reducibilis operátormodulusoknak néhány alapvető tulajdonságára lesz szükség.

STEINFELD OTTÓnak ezúton mondok köszönetet hasznos megjegyzéseiért.

2. §. Az $E(M)$ endomorfizmus-gyűrű Neumann-regularitásának igazolása teljesen reducibilis jobbmodulusok esetében

Érvényes a következő:

1. TÉTEL. *Ha A asszociatív gyűrű és M teljesen reducibilis A-jobbmodulus, akkor az $E(M)$ teljes operátorendomorfizmus-gyűrű bármely γ eleméhez van olyan $\delta(\in E(M))$ elem, hogy $\gamma=\gamma\delta\gamma$ (és egyszersmind $\delta=\delta\gamma\delta$ is teljesül).*

A *bizonyítás* lényegileg a vektorterek standard vizsgálati módszereivel végezhető el, miközben meg fogjuk különböztetni az alábbi két esetet.

Legyen előbb M homogén, azaz M bármely két egyszerű A-részmodulusa legyen egymással A-izomorf. Többször hivatkozunk majd arra is, hogy tetszőleges teljesen reducibilis M A-jobbmodulusnak bármely A-részmodulusa M-ben direkt összeadandó [7], [10].

Legyen mármost $\gamma\in E(M)$ tetszőleges elem, amelyhez meg fogunk konstruálni egy olyan $\delta\in E(M)$ elemet, amelyre az 1. tétel állításai teljesülnek. Írjuk $E(M)$ elemeit az M baloperátoraiként. Minthogy ekkor a γM képtér nyilván A-részmodulus, kell léteznie M-ben olyan K A-részmodulusnak, hogy érvényes a következő direkt felbontás:

$$M=\gamma M\oplus K. \tag{1}$$

Ha pedig L_γ jelenti az összes olyan $m\in M$ elem halmazát, amelyekre $\gamma m=0$ teljesül, akkor könnyen belátható az, hogy L_γ is A-részmodulus M-ben. Ezért létezik M-ben olyan további N A-részmodulus, hogy a következő direkt felbontás is érvényben lesz:

$$M=L_\gamma\oplus N. \tag{2}$$

Minthogy N az M-nek A-részmodulusa, ezért N tudvalevőleg ([7]) szintén teljesen reducibilis A-jobbmodulus, amely felbomlik

$$N=\sum_{\alpha}\oplus\{n_\alpha\}\qquad(\alpha\in\Gamma)$$

alakban, ahol az összeg direkt, és mindegyik $\{n_\alpha\}$ egyszerű A-részmodulus M-ben. Ekkor (2) miatt γM nyilván generálható az összes γn_α $(\alpha\in\Gamma)$ elemmel. Ha most bizonyos $a_i\in A$ elemekkel fennáll egy

$$\gamma n_{\alpha_1}a_1+\cdots+\gamma n_{\alpha_k}a_k=0 \tag{3}$$

lineáris összefüggés A felett a γn_α elemekre vonatkozólag, akkor az

$$n^*=n_{\alpha_1}a_1+\cdots+n_{\alpha_k}a_k\qquad(\in N)$$

jelölés mellett (3) miatt nyilván $\gamma n^*=0$. Tehát $n^*\in L_\gamma$, ahonnan $m^*\in N$ és (2) miatt $n^*=0$. Minthogy pedig létezik az $\{n_{\alpha_1}\}\oplus\cdots\oplus\{n_{\alpha_k}\}$ direkt összeg, csak $n_{\alpha_1}a_1=\cdots=n_{\alpha_k}a_k=0$ esetén lehet $n^*=0$. Ezért $\gamma n_{\alpha_1}a_1=\cdots=\gamma n_{\alpha_k}a_k=0$, ami éppen azt jelenti, hogy érvényes az alábbi direkt felbontás:

$$\gamma M=\sum_{\alpha\in\Gamma}{}'\{\gamma n_\alpha\}.$$

Léteznek továbbá olyan k_β $(\beta\in\Gamma')$ egyszerű A-részmodulusok, hogy

$$K=\sum_{\beta\in\Gamma'}\oplus\{k_\beta\},$$

hiszen K, mint M egy A-részmodulusa, szintén teljesen reducibilis. Ennélfogva (1) miatt adódik:

$$M=\sum_{\alpha\in\Gamma}\oplus\{\gamma n_\alpha\}\oplus\sum_{\beta\in\Gamma'}\oplus\{k_\beta\}.$$

Ilyen módon elértük azt is, hogy γM-nek a

$$\gamma n_1,\ldots,\gamma n_\alpha,\ldots$$

A-bázisát kiterjesztettük M-nek egy

$$\gamma n_1,\ldots,\gamma n_\alpha,\ldots,\ k_1,\ldots,k_\beta,\ldots$$

A-bázisává. Tudvalevőleg $E(M)$ bármely η elemét egyértelműen meghatározza η-nak az M egy adott A-bázisára kifejtett hatása. Definiáljunk a feltételezett homogenitás alapján egy $\delta\in E(M)$ elemet az alábbi

$$\delta(\gamma n_\alpha)=n_\alpha,\ \delta k_\beta=0\ \ (\alpha\in\Gamma,\beta\in\Gamma') \tag{4}$$

összefüggésekkel.

Ekkor (4) miatt a $\vartheta=\gamma\delta\gamma-\gamma$ operátorendomorfizmusra nyilván $\vartheta n_\alpha=0$ $(\alpha\in\Gamma)$, tehát $\vartheta N=0$ teljesül, továbbá $\gamma L_\gamma=0$ miatt fennáll

$\vartheta L_\gamma = 0$ is. Ezért (2) miatt $\vartheta M = 0$, ahonnan $\vartheta = 0$ és $\gamma = \gamma\delta\gamma$ adódik. Tehát $E(M)$ valóban Neumann-reguláris gyűrű.[2]

Legyen most az M teljesen reducibilis A-jobbmodulus nem-homogén, azaz M-ben létezzék két olyan egyszerű A-részmodulus, amelyek egymással nem A-izomorfok. Ekkor M olyan H_α részmodulusainak (más szóval homogén komponenseinek ([7])) a direkt összege, hogy bármelyik H_α már homogén, azaz mindegyik H_α-ban már bármely két egyszerű A-részmodulus izomorf és $\alpha_1 \neq \alpha_2$ esetén H_{α_1}-nek egy egyszerű A-részmodulusa nem A-izomorf H_{α_2}-nek egy egyszerű A-részmodulusával. Jelölje mármost $E(H_\alpha)$ az említett H_α részmodulus operátorendomorfizmusainak a teljes gyűrűjét. Minthogy H_α homogén, ezért az előbb letárgyalt eset szerint $E(H_\alpha)$ Neumann-reguláris gyűrű. Továbbá $\alpha_1 \neq \alpha_2$ esetén nyilván

$$\mathrm{Hom}\,(H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2}) = 0,$$

ahonnan következik, hogy $E(M)$ az összes előforduló (Neumann-reguláris) $E(H_\alpha)$ gyűrűnek a komplett direkt összege. (Lásd L. FUCHS [4] könyvét, különösen az 55. 1 tételt.)

De Neumann-reguláris gyűrűknek a komplett direkt összege ugyancsak Neumann-reguláris gyűrű, amiből folyik, hogy $E(M)$ Neumann-reguláris gyűrű az általános esetben is.

3. §. Az $E(M)$ gyűrű ideáljai homogén teljesen reducibilis M A-jobbmodulus esetén

Legyen M homogén teljesen reducibilis A-jobbmodulus. Egy N A-részmodulus rangján értjük az $\mathfrak{m}$ számosságot akkor, ha N pontosan $\mathfrak{m}$ számú egyszerű A-részmodulus direkt összege. Igazolható, hogy $\mathrm{rang}\, N = \mathfrak{m}$ az N részmodulusnak invariánsa, tehát nem függ N speciális direkt felbontásaitól. (Lásd pl. KERTÉSZ A. [10], [11] cikkeit.) Érvényes a következő

2. TÉTEL. *Legyen A asszociatív gyűrű, M teljesen reducibilis, végtelenrangú és homogén A-jobbmodulus és $E(M)$ az M összes operátorendomorfizmusainak a gyűrűje. Ekkor megadható $E(M)$ bármely nullától különböző I ideáljához olyan $\mathfrak{m}$ végtelen számosság, hogy I éppen az összes olyan $\gamma(\in E(M))$ endomorfizmus halmaza; amelyekre* $\mathrm{rang}\,(\gamma M) < \mathfrak{m}$.

MEGJEGYZÉS. $E(M)$ leírása $\mathrm{rang}\, M < \aleph_0$ esetén igen egyszerű, és megtalálható pl. VAN DER WAERDEN [18] könyvében is. Ebben a speciális eset-

[2] Legyen most $\vartheta' = \delta\gamma\delta - \delta$. Ekkor (4) miatt $\delta\gamma\delta\gamma n_\alpha = \delta\gamma n_\alpha$ és így $\vartheta'\gamma n_\alpha = 0$. Továbbá $\delta k_\beta = 0$ $(\beta \in \Gamma')$ miatt $\vartheta' K = 0$, ahonnan (1) alapján $\vartheta' M = 0$ és $\vartheta' = 0$ folyik. Tehát $\delta = \delta\gamma\delta$.

ben maga az $E(M)$ gyűrű is egyszerű (tehát ideálmentes) gyűrű, mert ekkor $E(M)$ izomorf egy ferdetest felett vett teljes mátrixgyűrűvel.

A *bizonyítás* újra több lépésben történik.

I. Mindenekelőtt azt igazoljuk, hogy ha $\gamma_1, \gamma_2 \in E(M)$, $\gamma_2 \in I$ és ha $\operatorname{rang}(\gamma_1 M) \leqq \operatorname{rang}(\gamma_2 M)$, ahol $I \neq 0$ az $E(M)$ kétoldali ideálja, akkor $\gamma_1 \in I$.

Legyen ugyanis N_i $(i=1,2)$ az összes olyan $m \in M$ halmaza, hogy $\gamma_i m = 0$. Minthogy N_i A-részmodulus M-ben, létezik olyan K_i A-részmodulus, hogy teljesül

$$M = N_i \oplus K_i \qquad (i=1,2).$$

Legyen most

$$K_i = \sum_{(i)} \oplus \{k_{\alpha_j}\} \qquad (i=1,2),$$

ahol az összeg direkt és $\{k_{\underset{(i)}{\alpha_j}}\}$ egyszerű A-részmodulus. Ekkor a K_i A-részmodulust a γ_i A-endomorfizmus izomorf módon képezi le a $\gamma_i M$ A-részmodulusra, ahonnan $\operatorname{rang}(\gamma_1 M) \leqq \operatorname{rang}(\gamma_2 M)$ miatt egyszersmind

$$\operatorname{rang} K_1 \leqq \operatorname{rang} K_2 \tag{5}$$

is adódik. Minthogy pedig M homogén operátormodulus, létezik (5) alapján olyan δ_1 endomorfizmus $(\in E(M))$, hogy

$$\delta_1 k_{\underset{(1)}{\alpha_1}} = k_{\underset{(2)}{\alpha_1'}} \quad \text{és} \quad \delta_1 N_1 = 0, \tag{6}$$

ahol α_1' bizonyos egyértelműen meghatározott α_2 indexet jelent Γ_2-ből, és $\alpha_1 \neq \beta_1$ esetén $\alpha_1' \neq \beta_1'$ $(\alpha_1, \beta_1 \in \Gamma_1)$. Ezért nyilván létezik a $\delta_1 K_1$ A-részmoduluson δ_1-nek a δ_1^{-1} inverze, amelyre később szükségünk lesz.

Ha fennállana a $\gamma_2 \delta_1 k_{\underset{(1)}{\alpha_1}}$ $(\alpha_1 \in \Gamma_1)$ elemekre A felett bizonyos $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n (\in A)$ elemekkel egy

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_2 \delta_1 k_{\underset{(1)}{\alpha_j}} a_j = 0 \qquad (a_j \in A)$$

lineáris összefüggés, akkor a

$$k^* = \sum_{j=1}^{n} \delta_1 k_{\underset{(1)}{\alpha_j}} a_j \ (\in K_2)$$

jelölés mellett $\gamma_2 k^* = 0$ teljesül, ahonnan $k^* \in N_2$. Ezért $k^* \in N_2 \cap K_2$ miatt $k^* = 0$. Minthogy $k^* \in \delta_1 K_1$ és $\delta_1 K_1$ részmoduluson létezik δ_1^{-1}, ezért

$$0 = \delta_1^{-1} k^* = \sum_{j=1}^{n} k_{\underset{(1)}{\alpha_j}} a_j = 0$$

érvényes. De a $\sum_j \oplus \{k_{\underset{(i)}{\alpha_j}}\}$ direkt összeg létezik, tehát $k_{\underset{(1)}{\alpha_j}} a_j = 0$ $(j=1,2,\ldots,n)$. Innen tüstént adódik, hogy $\gamma_2 \delta_1 k_{\underset{(1)}{\alpha_j}} a_j = 0$, ami pedig pontosan azt mutatja, hogy A felett a $\gamma_2\delta_1 \underset{(1)}{k_\alpha}$ elemek $(\alpha \in \Gamma_1)$ lineárisan függetlenek. Minthogy M homogén, létezik olyan $\delta_2(\in E(M))$ endomorfizmus, hogy

$$\delta_2(\gamma_2\delta_1 \underset{(1)}{k_\alpha}) = \gamma_1 \underset{(1)}{k_\alpha} \qquad (\alpha \in \Gamma_1). \tag{7}$$

Legyen ármost $\gamma_0 = \delta_2\gamma_2\delta_1 - \gamma_1$. Ekkor $\delta_1 N_1 = 0$ és $\gamma_1 N_1 = 0$ miatt $\gamma_0 N_1 = 0$, továbbá (7) miatt $\gamma_0 \underset{(1)}{k_\alpha} = 0$ $(\alpha \in \Gamma_1)$, tehát $\gamma_0 K_1 = 0$. Ennélfogva $M = K_1 \oplus N_1$ miatt $\gamma_0 M = 0$, tehát $\gamma_0 = 0$. Ez pedig azt jelenti, hogy $\gamma_1 = \delta_2\gamma_2\delta_1 \in I$.

II. Most megmutatjuk, hogy $\operatorname{rang} M \geqq \aleph_0$ esetén $E(M)$ bármely $I \neq 0$ ideálja tartalmazza az összes olyan γ endomorfizmust, amelyekre $\operatorname{rang}(\gamma M) < \aleph_0$ teljesül. Ez utóbbi γ A-endomorfizmusok egy V ideált alkotnak.

Legyen ugyanis $M = \sum_\alpha \oplus \{m_\alpha\}$ $(\alpha \in \Gamma)$, ahol az összeg direkt, és mindegyik $\{m_\alpha\}$ egyszerű A-részmodulus. Legyen továbbá $\varepsilon_\beta \in E(M)$ olyan endomorfizmus, amelyet az alábbi összefüggésekkel értelmezünk:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\beta m_\alpha &= \delta_{\alpha\beta} m_\beta \\ \varepsilon_\beta m_\alpha a &= \delta_{\alpha\beta} m_\beta a \end{aligned}\right\} (\alpha, \beta \in \Gamma),$$

ahol $\delta_{\alpha\beta}$ a Kronecker-féle szimbólum. Világos, hogy $\operatorname{rang}(\varepsilon_\alpha M) = \operatorname{rang}\{m_\alpha\} = 1$, és így I. miatt $\varepsilon_\alpha \in I (\neq 0)$. Ha most $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tetszőleges és egymástól különböző indexek Γ-ból, akkor $\varepsilon_{\alpha_1} + \cdots + \varepsilon_{\alpha_n} \in I$ mutatja, hogy az I ideálban tetszőlegesen nagy n természetes számhoz létezik olyan γ_n endomorfizmus, hogy

$$\operatorname{rang} \gamma_n M = n.$$

Jelölje V az $E(M)$ gyűrű összes olyan γ elemének a halmazát, amelyekre $\operatorname{rang} \gamma M < \aleph_0$. Ekkor V nyilván ideál $E(M)$-ben, továbbá a legutóbbi megállapítás és I. alapján szükségképpen $V \subseteq I$ $(\neq 0)$ teljesül. Ezzel valóban igazoltuk a II. alatti állítást.

III. Most megmutatjuk azt, hogy az I $(\neq 0)$ ideálhoz létezik olyan $\mathfrak{m}$ végtelen számosság, hogy I éppen az összes olyan γ endomorfizmusból áll, amelyekre:

$$\operatorname{rang}(\gamma M) < \mathfrak{m}.$$

Legyen ugyanis $\mathfrak{m}$ a legkisebb olyan számosság, amelyre teljesül $\operatorname{rang}(\gamma M) < \mathfrak{m}$ bármely $\gamma \in I$ endomorfizmus mellett. Láttuk II.-nél azt, hogy $V \subseteq I$. Ezért szükségképpen $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$. Ha $\operatorname{rang} M < \mathfrak{m}$, akkor $\mathfrak{m}$ definíciója alapján evidens módon belátható, hogy létezik olyan $\gamma \in I$, hogy $\operatorname{rang}(\gamma M) = \operatorname{rang} M$.

Ekkor azonban I. miatt $I = E(M)$. A továbbiakban feltesszük, hogy $I \neq E(M)$ (és természetesen azt is, hogy $I \neq 0$, tehát hogy $0 \neq V \subseteq I$.).

Ha $\mathfrak{m} = \aleph_0$, akkor $I \subseteq V$. Minthogy pedig II. szerint $V \subseteq I$, ezért ekkor I V.

Legyen ezután $\mathfrak{m} > \aleph_0$ és $\mathfrak{m} \leqq \operatorname{rang} M$. Ha továbbá η tetszőleges olyan endomorfizmus az $E(M)$ gyűrűből, hogy $\operatorname{rang}(\eta M) < \mathfrak{m}$ teljesül, akkor $\mathfrak{m}$ definíciója alapján indirekt módon belátható olyan $\vartheta \in I$ endomorfizmus létezése, amelyre $\operatorname{rang}(\vartheta M) \geqq \operatorname{rang}(\eta M)$ érvényes. Ekkor pedig I. alapján fennáll $\eta \in I$, amivel a 2. tételt igazoltuk.[3]

4. §. Az Artin-féle féligegyszerű gyűrűk egy jellemzése az operátormodulusok Kertész-féle radikáljával a főjobbideálokra nézve minimum-feltételű egységelemes gyűrűk osztályában

Tudvalevőleg Artin-félének nevezik az összes jobbideáljára nézve minimum-feltételű gyűrűket. Ennél a gyűrűosztálynál valódi módon bővebb a főjobbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrűknek, azaz röviden az *MHR*-gyűrűknek az osztálya [17].

Ebben a §-ban gyűrűk radikálján és féligegyszerűségén a Jacobson-félét értjük [7]. Ha A féligegyszerű *MHR*-gyűrű és M olyan A-jobbmodulus, hogy $MA = M$ érvényes, akkor M teljesen reducibilis A-jobbmodulus [17]. Minthogy ekkor az A gyűrűre [17] miatt $A^2 = A$ teljesül, így ismét látható az a tény, hogy bármely A féligegyszerű *MHR*-gyűrű, mint önmagának A-jobbmodulusa, teljesen reducibilis operátormodulus. Speciálisan, ha A Artin-féle féligegyszerű gyűrű, akkor A mint önmagának A-jobbmodulusa, végesrangú teljesen reducibilis modulus.

Mármost a 4. § címében említett jellemzéshez emlékeztetünk egy M egészen tetszőleges A asszociatív gyűrű felett vett tetszőleges A-jobbmodulus $R_A(M)$ Kertész-féle radikáljának a fogalmára. ([10], III. rész, függelék.) M Kertész-féle $R_A(M)$ radikálja az összes olyan $m(\in M)$ elem halmaza, amelyekre az mA részmodulus része M minden maximális A-részmodulusának, míg abban az esetben, ha M-ben nem léteznek maximális (valódi) részmodulusok, akkor $R_A(M) = M$. A részleteket illetően lásd a [10] és [16] cikkeket.

Kiemelendő az $R_A(M)$ Kertész-féle modulusradikálnak az a tulajdonsága, hogy olyan M teljesen reducibilis A-jobbmodulusokban, amelyekre

[3] Ezek szerint $E(M)$ ideálhálója a 2. tétel feltételei mellett lánc. Elegendő nagy végtelen $\mathfrak{m}$ számossághoz tehát megadhatók olyan $E(M)$ általánosabb típusú egységelemes Neumann-reguláris gyűrűk, amelyekben mind a Brown—McCoy-féle radikál, mind pedig a Fuchs-féle radikál zérustól különbözik [1], [5], és amelyekben az utóbbi radikáltípus különbözik bizonyos általánosításaitól is. (Pl. minden $\mathfrak{m} \geqq \aleph_1$ esetén.) Vö. még a szerző cikkével: *Archiv der Math.*, 12 (1961) 282—289.

fennáll $MA = M$, szükségképpen $R_A(M) = 0$ teljesül. Ezért bármely A féligegyszerű MHR-gyűrűnek, mint önmaga A-jobbmodulusának a Kertész-féle modulusradikálja 0.

Ezekkel kapcsolatban megemlítjük a következő problémát, amely KERTÉSZ ANDORtól származik:

Meghatározandók az összes olyan A asszociatív gyűrűk, amelyeknek megvan az a T tulajdonságuk, hogy bármely M A-jobbmodulusnak (az előbb definiált) $R_A(M)$ modulusradikáljára $R_A(M) \cdot A = 0$ teljesül!

Ennek az érdekes problémának a teljes megoldása mindeddig — tudtommal — még nincs elintézve. A megoldás felé haladva azonban kimondható az alábbi

3. TÉTEL. *Egy A egységelemes MHR-gyűrű akkor és csak akkor T-tulajdonságú, ha A Artin-féle féligegyszerű gyűrű.*

Bizonyítás.

Legyen előbb A olyan egységelemes MHR-gyűrű, amely egyszersmind T-tulajdonságú is. Minthogy ekkor bármely M A-jobbmodulus esetén $R_A(M) \cdot A = 0$, ezért speciálisan $R_A(A) \cdot A = 0$, ahol az A gyűrű önmaga A-jobbmodulusának tekinthető. Ámde az A gyűrűben létezik egységelem, amelyet az 1 szimbólummal jelölünk. Ezért [10] szerint A-ban az $R_A(A)$ modulusradikál éppen az A gyűrű $J(A)$ Jacobson-féle radikálja. Ennélfogva $J(A) \cdot A = 0$, és minthogy $1 \in A$, szükségképpen $J(A) = 0$. Tehát A féligegyszerű MHR-gyűrű, amely egységelemes. Ezért a [17] cikk alapján A szükségképpen Artin-féle féligegyszerű gyűrű.

Legyen most A féligegyszerű Artin-féle gyűrű. (Ekkor A nyilván még inkább egységelemes MHR-gyűrű is.) Legyen továbbá M tetszőleges A-jobbmodulus. M felbomlik a Goldmann—Kertész-féle kritériumok [6], [10] alapján $M = M_0 \oplus M_1$ direkt összegre, ahol $M_0 \cdot A = 0$ és $m' \in M_1$ esetén $m' \cdot 1 = m' (1 \in A)$, továbbá M_1 teljesen reducibilis A-jobbmodulus. Ekkor még inkább teljesül $M_1 A = M_1$ és [10] függeléke alapján $R_A(M_1) = 0$, továbbá $R_A(M) = R_A(M_1) = 0$, amivel a 3. tétel igazolást nyert.

IRODALOM

[1] B. BROWN—N. H. McCOY, Radicals and subdirect sums, *Amer. Jour. Math.* **69** (1947) 46—58.
[2] C. J. EVERETT, Vector spaces over rings, *Bull. Amer. Math. Soc.* **48** (1942) 312—316.
[3] C. J. EVERETT, The basis theorem for vector spaces over rings, *Bull. Amer. Math. Soc.* **51** (1945) 531—532.
[4] L. FUCHS, *Abelian groups*, (Budapest, 1958).
[5] L. FUCHS, On a new type of radical, *Acta Sci. Math.* **16** (1955) 43—53.

[6] O. Goldman, A characterization of semi-simple rings with the descending chain condition, *Bull. Amer. Math. Soc.* **52** (1946) 1021—1027.
[7] N. Jacobson, *Structure of rings*, (Providence, 1956).
[8] R. E. Johnson—F. Kiokemeister, The endomorphisms of the total operator domain of an infinite modul, *Trans. Amer. Math. Soc.* **62** (1947) 404—430.
[9] I. Kaplansky, Infinite abelian groups (Ann Arbor, 1954).
[10] Kertész A., Vizsgálatok az operátormodulusok elméletében, I., *MTA III. Oszt. Közl.* **8** (1958) 411—436; II., *MTA III. Oszt. Közl.* **9** (1959) 15—50; III., *MTA III. Oszt. Közl.* **9** (1959) 105—120.
[11] A. Kertész, Beiträge zur Theorie der Operatormoduln, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957) 235—257.
[12] A. Kertész, On radical-free rings of endomorphisms, *Acta Univ. Debrecen de Ludovico Kossuth Nominatae* **5** (1958) 159—161.
[13] N. H. McCoy, Subdirect sums of rings, *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947) 856—877.
[14] J. von Neumann, On regular rings, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **22** (1936) 707—713.
[15] L. Rédei, *Algebra*, I., (Leipzig, 1959).
[16] Szász F., Az operátormodulusok Kertész-féle radikáljáról, *MTA III. Oszt. Közl.* **10** (1960) 36—38.
[17] Szász F., A főjobbideálokra nézve minimumfeltételű gyűrűk, *MTA III. Oszt. Közl.* **11** (1961) 135—177.
[18] B. L. van der Waerden, Algebra II. (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1959).

(Beérkezett: 1961. VI. 5.)

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete