A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

A SHANNON-FÉLE ALAPTÉTEL ÁLTALÁNOS MEGFOGALMAZÁSA AZ INFORMÁCIÓELMÉLETBEN*

Írta: R. L. DOBRUSIN

Tartalom

1. §. Bevezetés

1. 1. Történeti és bevezető jellegű megjegyzések

Az információelmélet alapfogalmait SHANNON és WEAVER tartalmas könyve [30] foglalta össze elsőnek; ugyanebben közölték először — a fizikában elfogadott szabatossággal — az információelmélet alaptételét. Ez után jelentek meg MAC-MILLAN [15] és HINCSIN [25], [26] munkái, amelyekben megadták Shannon tételének szabatos interpretációját diszkrét stacionárius forrás és csatorna esetére, azon követelmény mellett, hogy a felveendő közlemény pontosan egybeessék a leadandóval. Vizsgálataiban HINCSIN lényegesen támaszkodott FEINSTEIN [22] munkájának gondolataira. HINCSIN eredményeit továbbfejlesztette ROZENBLAT-ROT [20], [21] és részben PEREZ [17], [18], [19], alkalmazva azokat olyan folyamatokra, amelyeknél a lehetséges állapotok folytonos halmazt képeznek. ROZENBLAT-ROT rámutatott arra is, hogyan lehetne kiterjeszteni az elméletet nem-stacionárius folyamatokra. Érdekes eredmények találhatók WOLFOWITZ [2], [3], valamint BLACKWELL, BREIMAN és THOMASIAN [31] nemrég megjelent dolgozataiban is.

KOLMOGOROV [11] felvetette annak a lehetőségét, hogyan lehetne egészen általánosan és matematikailag szigorúan tárgyalni Shannon tételét. Jelen munkának az a célja, hogy Kolmogorov interpretációjában, eléggé általános feltételek mellett, bebizonyítsa Shannon tételét. Ezeknek az általános feltételeknek

* Uszpehi Matematicseszkih Nauk XIV (1959), vip. 6 (90), 3—104. — Jelen közlemény az eredeti tanulmány 1. §-ának a fordítását tartalmazza.

a megfogalmazásában felhasználásra kerül az információ-sűrűség fogalma, amelyet a matematikai irodalomba GELFAND és JAGLOM ([4] és [5]), valamint PEREZ [17] vezetett be. A későbbiekben állandóan használni fogjuk az információ-stabilitás általános fogalmát is; ez néhány gondolat kapcsán született meg, amelyet az első két említett szerző mondott ki speciális esetekben. Mindjárt itt megjegyezzük, hogy feltételeink ellenőrzése konkrét folyamatosztályok esetében nem triviális, és alapjában véve még meg sem oldott feladat.

A jelen cikkben a szerző arra törekedett, hogy a tárgyalás a legnagyobb reális általánosságban folyjék, emellett a bizonyítások matematikai szigorúsággal történjenek. Ezért — bár nem tételezzük fel, hogy olvasóinknak vannak előzetes ismeretei az információelméletből (mértékelméletből azonban komolyabb előismereteket tételezünk fel: például annyit, amennyi a [24] könyvben található) — cikkünket nem ajánljuk olyan olvasónak, aki most ismerkedik meg a témával, minthogy ilyen olvasó számára tárgyalásmódunk rendkívül fáradságosnak és absztraktnak tűnne. A kezdő számára alkalmas cikkek és könyvek közül [25], [7], [30], [3]-on kívül különösen kiemeljük KOLMOGOROV előadását [11], amelynek gondolatait a jelen cikkben fejtjük ki részletesen, valamint FEINSTEIN kitűnően megírt könyvét [23]. Munkánkról egy rövid előzetes közlemény megjelent már 1958-ban [32], alapvető eredményeit a [33] megjegyzésben fogalmaztuk meg részletesebben.

1. 2. Információ.

Emlékeztetünk néhány általános definícióra, hogy pontosan megfogalmazhassuk az általunk használt terminológiát. (X, S_X) *mérhető térnek* fogjuk nevezni az X halmaz és az X halmaz részhalmazaiból alkotott S_X σ-algebra együttesét. Néha — amennyiben ez nem vezethet félreértésre — a mérhető teret egyetlen X betűvel fogjuk jelölni. $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ *valószínűségi térnek* fogjuk nevezni az $(\Omega, \mathfrak{B})$ mérhető tér és a $\mathfrak{B}$ σ-algebrán megadott $P\{\ \}$ valószínűségi mérték együttesét. *Az X térbe tartozó értékekkel bíró valószínűségi változónak* fogunk nevezni egy $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ mérhető függvényt, melynek értékei az X térbe tartoznak. A ξ valószínűségi változó $p_\xi(\cdot)$ *valószínűség-eloszlásának* azt az (X, S_X)-en definiált $p_\xi(\cdot)$ valószínűségi mértéket fogjuk nevezni, amelyet a

$$p_\xi(A) = P\{\xi(\omega) \in A\}, \quad A \in S_X \tag{1.2.1}$$

egyenlőség definiál. Az X mérhető tér *felbontásának* fogjuk nevezni közös elemmel nem bíró oly halmazok tetszőleges véges rendszerét, amelyek S_X-be tartoznak és összegük kiadja az egész X teret.

Ha (X, S_X) és (Y, S_Y) két mérhető tér, *e terek szorzatának* fogjuk nevezni az $(X \times Y, S_X \times S_Y)$ mérhető teret, amelyet az (x, y), $x \in S_X$, $y \in S_Y$ párok

$X\times Y$ halmaza és azon $S_X\times S_Y$ σ-algebra alkot, amelyet az $x\in A$, $y\in B$ feltételek által meghatározott (x, y) párok $A\times B$ halmazai generálnak, ahol $A\in S_X$, $B\in S_Y$. A ξ és η *valószínűségi változókból álló párt* kézenfekvően interpretálhatjuk, mint egyetlen valószínűségi változót, melynek értékei az $X\times Y$ szorzat-térbe tartoznak. Ezt az új valószínűségi változót (ξ, η)-val fogjuk jelölni. E pár $p_{(\xi,\eta)}(\cdot)$ eloszlását, amely mérték az $X\times Y$-on, a ξ *és* η *változók együttes eloszlásának* fogjuk nevezni és — a zárójel elhagyásával — $p_{\xi\eta}(\cdot)$-val fogjuk jelölni. Ha az X, illetve Y mérhető térben adva van a $p_1(\cdot)$, illetve $p_2(\cdot)$ valószínűségi mérték, *szorzatuknak* fogjuk nevezni azt az $S_X\times S_Y$-on értelmezett $p_1\times p_2(\cdot)$ mértéket, amelyre fennáll, hogy egy $A\times B$ típusú halmazra, ahol $A\in S_X$, $B\in S_Y$,

$$p_1\times p_2(A\times B)=p_1(A)p_2(B), \tag{1.2.2}$$

az $S_X\times S_Y$-ba tartozó egyéb halmazokra pedig a szokásos módon van kiterjesztve (e kiterjesztés egzisztenciájának és unicitásának bizonyítását l. [24], 35. §-ban). Ha a ξ és η valószínűségi változók együttes eloszlása $p_{\xi\eta}(\cdot)$ egybeesik a $p_\xi\times p_\eta$ szorzattal, a ξ és η változókat *függetleneknek* nevezzük.

Legyen adva mármost két valószínűségi változó, ξ és η, amelyek értékei az (X, S_X), ill. (Y, S_Y) mérhető terekbe tartoznak. E valószínűségi változók *információjának* — [30][1] és [4]-gyel egyetértésben — a következő számot nevezzük[2]

$$\begin{aligned} I(\xi, \eta) &= \sup \sum_{i,j} P(\xi\in A_i, \eta\in B_j)\log\frac{P\{\xi\in A_i, \eta\in B_j\}}{P\{\xi\in A_i\}P\{\eta\in B_j\}} = \\ &= \sup\sum_{i,j} p_{\xi\eta}(A_i\times B_j)\log\frac{p_{\xi\eta}(A_i\times B_j)}{p_\xi(A_i)p_\eta(B_j)}, \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

ahol a felső határ az X tér összes lehetséges $\{A_i\}$ felbontásai és az Y tér összes lehetséges $\{B_j\}$ felbontásai mellett veendő. Az $I(\xi, \xi)$ számot a ξ valószínűségi változó *entrópiájának* nevezik.

Könnyen bebizonyítható (l. a 2.1. pontot), hogy az információ nemnegatív, felveheti azonban a $+\infty$ értéket is. Tekintettel arra, hogy mindeddig nem közölték az információ alaptulajdonságainak teljes összefoglalását, a 2. §-ban elmondjuk a megfelelő tételeket és bizonyításokat.

Itt utalunk a következő tényre, amely közvetlen folyománya az (1.2.3) definíciónak. Ha a ξ és η változók függetlenek, akkor

$$I(\xi, \eta)=0. \tag{1.2.4}$$

[1] Az orosz fordításban ez a definíció nem szerepel.

[2] Itt és a továbbiakban 2-es alapú logaritmus szerepel. Mindenütt úgy vesszük, hogy $0\log\frac{0}{a}=0$, ha $a\geq 0$, $a\log\frac{a}{0}=+\infty$, ha $a>0$ és hogy $+\infty+a=+\infty$.

Most megfogalmazunk egy, a továbbiak szempontjából igen fontos eredményt, amelyet egymástól függetlenül nyert GELFAND és JAGLOM [5], [4], illetve PEREZ [17]. Tekintsünk az $(X\times Y, S_X\times S_Y)$ mérhető térben két valószínűségi mértéket: a $p_{\xi\eta}(\cdot)$ együttes eloszlást és a $p_\xi\times p_\eta(\cdot)$ eloszlás-szorzatot. Ismeretes, hogy fennáll a következő alternatíva (l. [24], 30—31. §):

I. *A nem abszolút folytonosság esete.* Ebben az esetben létezik olyan $B\in S_X\times S_Y$ halmaz, hogy $p_\xi\times p_\eta(B)=0$, de $p_{\xi\eta}(B)>0$.

II. *Az abszolút folytonosság esete.* Ebben az esetben tetszőleges olyan $B\in S_X\times S_Y$-ra, amelyre $p_\xi\times p_\eta(B)=0$, $p_{\xi\eta}(B)=0$ is fennáll. Ekkor (Radon—Nikodym tétel) létezik olyan $a_{\xi\eta}(x, y)$ $((x,y)\in X\times Y)$ véges, nem-negatív értékeket felvevő és a $S_X\times S_Y$ σ-algebrára vonatkozólag mérhető függvény, hogy tetszőleges $B\in S_X\times S_Y$-ra a $p_{\xi\eta}(B)$ valószínűséget a

$$p_{\xi\eta}(B)=\int_B a_{\xi\eta}(x,y)p_\xi\times p_\eta(dx,dy) \tag{1.2.5}$$

B-n vett és $p_\xi\times p_\eta(\cdot)$ mérték szerinti integrál adja meg. Az $a_{\xi\eta}(x, y)$ mennyiséget a $p_{\xi\eta}(\cdot)$ mérték $p_\xi\times p_\eta(\cdot)$ mértékre vonatkoztatott *sűrűségének* fogjuk nevezni és megállapodásszerűen

$$a_{\xi\eta}(.,.)=\frac{dp_{\xi\eta}(\cdot)}{dp_\xi\times p_\eta(\cdot)} \tag{1.2.5'}$$

-vel fogjuk jelölni. Az (I) esetben az információ végtelen, a (II) esetben azonban az információt az

$$I(\xi,\eta)=\int_{X\times Y}\log a_{\xi\eta}(x,y)p_{\xi\eta}(dx,dy)= \tag{1.2.6}$$
$$\int_{X\times Y} a_{\xi\eta}(x,y)\log a_{\xi\eta}(x,y)p_\xi\times p_\eta(dx,dy)$$

képlet szolgáltatja; az (1.2.6)-beli integrálok oly értelemben léteznek, hogy az integrandusok negatív részeinek integráljai konvergensek. Az (1.2.6) képlet levezetése (ezt a képletet az *információ integrálképletének* fogjuk nevezni) a 2.4 pontban található meg. A fent mondottaknak megfelelően az

$$i_{\xi\eta}(x,y)=\log a_{\xi\eta}(x,y) \tag{1.2.7}$$

függvényt a ξ és η valószínűségi változók *információ-sűrűségének* fogjuk nevezni. Mármost az (1.2.6) összefüggés a következő alakra írható át:

$$I(\xi,\eta)=Mi_{\xi\eta}\{\xi,\eta\}.\text{[1]} \tag{1.2.8}$$

Ha $p_{\xi\eta}$ nem-abszolút folytonos $p_\xi\times p_\eta$-ra vonatkozólag, akkor azt fogjuk mondani, hogy a ξ és η valószínűségi változóknak nincs információ-sűrűsége.

[1] Itt és a továbbiakban $M\{\ \}$ várható értéket jelöl.

A legegyszerűbb esetekben megadhatók $i_{\xi\eta}(x, y)$-ra oly kifejezések is, amelyek nem alapulnak a Radon—Nikodym tételen. Például, tegyük fel, hogy S_X, ill. S_Y-on adva van a $\mu_X\{\cdot\}$, ill. $\mu_Y\{\cdot\}$ σ-véges mérték. Ha X és Y végesdimenziós euklideszi terek, akkor $\mu_X\{\cdot\}$, ill. $\mu_Y\{\cdot\}$-ként kézenfekvő közönséges Lebesgue-mértékeket venni. Tegyük fel továbbá, hogy a ξ és η változók egydimenziós $p_\xi(\cdot)$ és $p_\eta(\cdot)$ eloszlásainak, valamint ezen változók $p_{\xi\eta}(\cdot)$ együttes eloszlásának van sűrűsége, azaz léteznek olyan, az S_X, S_Y, illetve $S_X\times S_Y$-ra vonatkozólag mérhető $\pi_\xi(x), \pi_\eta(y)$, ill. $\pi_{\xi\eta}(x, y)$ függvények, amelyekre

$$
(1.2.9)\qquad \begin{cases} p_\xi(A) = \int\limits_A \pi_\xi(x)\mu_X\{dx\}, & A \in S_X, \\ p_\eta(B) = \int\limits_B \pi_\eta(y)\mu_Y\{dy\}, & B \in S_Y, \\ p_{\xi\eta}(C) = \int\limits_C \pi_{\xi\eta}(x, y)\mu_X\times\mu_Y\{dx, dy\}, & C \in S_X\times S_Y. \end{cases}
$$

Ekkor könnyen belátható, hogy az $i_{\xi\eta}(x, y)$ információ-sűrűségre $X\times Y$-on (a $p_\xi\times p_\eta(\cdot)$ eloszlás szerint) majdnem mindenütt fennáll

$$
(1.2.10)\qquad i_{\xi\eta}(x, y) = \log\frac{\pi_{\xi\eta}(x, y)}{\pi_\xi(x)\pi_\eta(y)}.
$$

Ez például [24] 32. §-a 1. tételéből is következik. Analóg módon, ha X a megszámlálhatóan sok $E_1, E_2, \ldots$ pontból áll, Y pedig a megszámlálhatóan sok $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \ldots$, pontból, S_X, illetve S_Y pedig az X, illetve Y halmazok összes részhalmazainak a halmaza, akkor kézenfekvő a $p_\xi, p_\eta, p_{\xi\eta}$ eloszlásokat a következő valószínűségek megválasztásával megadni:

$$
p_\xi^{(i)} = p_\xi(E_i),\quad p_\eta^{(j)} = p_\eta(\bar{E}_j),\quad p_{\xi\eta}^{(i,j)} = p_{\xi\eta}(E_i, \bar{E}_j).
$$

Ekkor

$$
(1.2.11)\qquad i_{\xi\eta}(E_i, \bar{E}_j) = \log\frac{p_{\xi\eta}^{(i,j)}}{p_\xi^{(i)}p_\eta^{(j)}},
$$

és az (1.2.6) definíció SHANNON jól ismert

$$
(1.2.12)\qquad I(\xi, \eta) = \sum_{i,j} p_{\xi\eta}^{(i,j)} \log\frac{p_{\xi\eta}^{(i,j)}}{p_\xi^{(i)}p_\eta^{(j)}}
$$

képletére redukálódik.

Feltételes valószínűségeket és feltételes sűrűségeket használva, az (1.2.10) és (1.2.11) információ-sűrűség kifejezések így írhatók:

$$
i_{\xi\eta}(x, y) = \log\frac{\pi_{\xi/\eta}(x, y)}{\pi_\xi(x)},\quad i_{\xi\eta}(E_i, \bar{E}_j) = \log\frac{p_{\xi/\eta}(E_i/\bar{E}_j)}{p_\xi(E_i)}.
$$

Ebben az alakban GOLDMAN használta az információ-sűrűséget [7]; s ennek segítségével definiálta az információ fogalmát.

1.3. Információ-stabilitás

Az információelméletnek lényegénél fogva aszimptotikus jellege van. Éppen ezért a következőkben a változó t indextől függő (ξ^t, η^t) valószínűségi változó-pár aszimptotikus tulajdonságait kell vizsgálnunk. Jelen munka minden megállapítása igaz lesz tetszőleges természetű t indexekre és tetszőleges, az analízisben használt határátmeneti mód mellett, amelynél a határértékek megszokott tulajdonságai megvannak. Mindazonáltal a terminológia egyszerűsége kedvéért fel fogjuk tenni, hogy a t index egész értékeket vesz csak fel, vagyis a (ξ^t, η^t) változó-párok sorozataival fogunk dolgozni.

Így tehát tekintsük valószínűségi változó-párok valamely $(\xi^1, \eta^1), \ldots, (\xi^t, \eta^t), \ldots$ sorozatát. Legyenek a (ξ^t, η^t) változók az $(\Omega^t, \mathfrak{B}^t, P^t)$ valószínűségi téren definiálva, s felvett értékeik tartozzanak az (X^t, S_X^t), (Y^t, S_Y^t) mérhető terekbe. Egyszerűség kedvéért a (ξ^t, η^t) párral kapcsolatos bármely jellemzőt stb. ugyancsak t felső indexszel fogunk ellátni, emellett tetszőleges, egy egységet képező kifejezésben ezt az indexet csak egyszer fogjuk feltüntetni. Például

$$p_{\xi^t\eta^t}(A^t) = p^t_{\xi\eta}(A),$$
$$I(\xi^t, \eta^t) = I^t(\xi, \eta),$$
$$i_{\xi^t\eta^t}(x^t, y^t) = i^t_{\xi\eta}(x, y),$$

é. í. t. Egy olyan (ξ^t, η^t) változó-párokból álló sorozatot, amelyek $i^t_{\xi\eta}(x, y)$ információ-sűrűséggel rendelkeznek, *információ-stabilisnek* fogunk nevezni, ha minden elég nagy t érték esetén $0 < I^t(\xi, \eta) < \infty$ és ha a kérdéses valószínűségi változó-sorozatra fennáll:

$$\frac{i^t_{\xi\eta}(\xi, \eta)}{I^t(\xi, \eta)} \to 1, \tag{1.3.1}$$

ha $t \to \infty$, a valószínűségi mértékben való konvergencia értelmében, azaz, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra

$$\lim_{t\to\infty} P^t\left\{\left|\frac{i_{\xi\eta}(\xi, \eta)}{I(\xi, \eta)} - 1\right| > \varepsilon\right\} = 0. \tag{1.3.2}$$

Egy olyan (ξ^t, η^t) változó-párokból álló sorozatot, amely nem rendelkezik információ-sűrűséggel, *információ-stabilisnek* fogunk nevezni, ha minden t-re, bizonyos eloszlástól kezdve, $p^t_{\xi\eta}(\cdot)$ szinguláris a $p^t_\xi \times p^t_\eta(\cdot)$ eloszlásra nézve, — azaz, ha létezik egy olyan $B^t \in S^t_X \times S^t_Y$ halmaz, hogy $p^t_{\xi\eta}(B) = 1$, de $p^t_\xi \times p^t_\eta(B) = 0$. Végül, a (ξ^t, η^t) párok tetszőleges sorozatát *információ-stabilisnek* fogjuk nevezni, ha felbontva ezt a sorozatot két olyan részsorozatra, amelyek információ-sűrűséggel rendelkező, illetve nem rendelkező párokból állanak, mindkét említett részsorozat információ-stabilis lesz (esetleg csak egyik, ha a másik csupán végesszámú tagból áll).

Megjegyezzük, hogy a következő pontokban csupán változó-párok információ-stabilis sorozataival kell majd foglalkoznunk, úgy hogy a fentebb bevezetett definíciót elfogadva, eltekinthetünk majd olyan átmeneti esetek vizsgálatától, mint az információ-sűrűséggel rendelkező, de végtelen információértékű párok, vagy információ-sűrűséggel nem rendelkező, de nem szinguláris eloszlású párok esete. A következőkben bemutatandó módszerek lehetővé teszik számos tétel megfogalmazását ezekre az esetekre is, mindazonáltal nem tudtunk találni olyan elég általános és ugyanakkor elég egyszerűnek is tekinthető megfogalmazást, amely átfogja az összes ilyen eseteket, — tekintve, hogy a végtelen információ esetének gyakorlati jelentősége nincs, egyszerűen nem fogunk foglalkozni ezekkel az átmeneti esetekkel.

Megjegyezzük, hogy

$$I^t(\xi, \eta) = M i^t_{\xi\eta}(\xi, \eta)$$

és hogy ennek következtében az információ-stabilitás (1. 3. 1) definíciója igen hasonlít a nagy számok törvényének állításához, — ezt ti. $MS_n \neq 0$ esetén (ahol $S_n = \zeta_1 + \cdots + \zeta_n$ n számú független ζ_i valószínűségi változó összege) meg lehet fogalmazni úgy, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{MS_n} = 1,$$

a valószínűségi mértékben való konvergencia értelmében. Minden alapunk megvan azt remélni, hogy az információ-stabilitás ugyanolyan általános aszimptotikus törvénye a természetnek, mint a nagy számok jól ismert törvénye, — jóllehet ez a tény, mint bebizonyított matematikai tétel, manapság még csak elég kisszámú esetben igazolt.

Nevezetesen, legyen $\{\alpha_k, k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ és $\{\beta_k, k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ két stacionárius és stacionáriusan összefüggő sztochasztikus folyamat. Jelöljük ξ^t, illetve η^t-vel az első t változó összességét, vagyis legyen $\xi^t = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$, $\eta^t = (\beta_1, \ldots, \beta_t)$. MAC-MILLAN tételéből [15] (l. még [26]-ot is) rögtön következik, hogy ha az összes α_i és β_i változók végesszámú értéket vehetnek csak fel és ha az a stacionárius folyamat, amelyet az $\{(\alpha_i, \beta_i), \ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ változó-párok alkotnak, ergodikus, akkor a (ξ^t, η^t) párok sorozata információ-stabilis. Ezt az eredményt tetszőleges értékeket felvevő α_i, β_i változók esetére PEREZ általánosította [18].

Információ-stabilis sorozatokra példák egy másik osztályát úgy kaphatjuk meg, ha felhasználunk egy megjegyzést, amelyet analóg gondolatmenet kapcsán ROZENBLAT-ROT tett [20], [21]. Nevezetesen, tekintsünk olyan $\{\alpha_k, k = 1, 2, \ldots\}$, ill. $\{\beta_k, k = 1, 2, \ldots\}$ valószínűségi változó-sorozatokat, ahol a változók értékei tetszőleges mérhető terekből valók, amellett feltesszük, hogy az (α_1, β_1) $(\alpha_2, \beta_2), \ldots$ párok egymástól függetlenek. Legyen ismét

$\xi^t = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ és $\eta^t = (\beta_1, \ldots, \beta_t)$. Ekkor

$$i^t_{\xi\eta}(x_1, \ldots, x_t, y_1, \ldots, y_t) = \sum_{k=1}^{t} i_{\alpha_k\beta_k}(x_k, y_k). \tag{1.3.3}$$

Diszkrét esetben, vagy akkor, amikor sűrűségek léteznek, az (1.3.3) egyenlőség közvetlenül folyik (1.2.11)-ből, illetve (1.2.10)-ből, valamint a független változók általános tulajdonságaiból. Az általános esetre ezt a 2.9 pontban fogjuk bebizonyítani. (1.3.3)-ból látható, hogy

$$i^t_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{t} i_{\alpha_k\beta_k}(\alpha_k, \beta_k). \tag{1.3.4}$$

Az (1.3.4) képletben szereplő összeadandók független valószínűségi változók. Az információ-stabilitásról szóló állítás — persze, ha $I(\alpha_k, \beta_k) < \infty$, az $i_{\alpha_k\beta_k}(\alpha_k, \beta_k)$ független változók összege relatív stabilitásáról szóló állításra redukálódik (l. [6], 28. §; a nem nagyon lényeges különbség abban áll, hogy ott csak nem-negatív összeadandók esetét vizsgálják). A független változók összegéről szóló elmélet néhány általános tételéből kiindulva (l. [6]) megkaphatók annak a szükséges és elegendő feltételei, hogy a (ξ^t, η^t) sorozat információ-stabilis legyen. Ezek a feltételek természetesen igen általánosak lesznek. Amint azt ROZENBLAT-ROT is megjegyezte [20], [21], hasonló megállapítások tehetők Markov-láncot alkotó változók sorozata esetében is.

Végül említsünk meg még egy esetet, amely matematikai szempontból triviális, de az alkalmazások szempontjából fontos. Legyen a ξ^t változó azonos az η^t változóval és vegyen fel véges $n^t > 1$ számú $E_1, \ldots, E_{n^t}$ értékeket, mindegyiket $\frac{1}{n^t}$ valószínűséggel. Akkor (1.2.11)-nek megfelelően

$$i^t_{\xi\eta}(E_i, E_j) = \begin{cases} \log n^t, & i = j, \\ -\infty, & i \neq j. \end{cases}$$

Következésképp

$$P^t\{i_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \log n\} = 1,$$

és nyilvánvaló, hogy teljesül az (1.3.1) információ-stabilitási tulajdonság.

Nem stacionárius információ-stabilis sorozatok bizonyos új osztályait a nemrég megjelent [34] munka vezette be.

1.4. Közlemény. Fel fogjuk tenni, hogy a *bemeneti közlemények* (X, S_X) *mérhető tere,* valamint a *kimeneti közlemények* $(\tilde{X}, S_{\tilde{X}})$ *mérhető tere* adott és rögzített. Számos alkalmazásban ez a két tér azonos. Továbbá, *adottnak* fogjuk tekinteni az $X \times \tilde{X}$ szorzattérben értelmezett olyan $p_{\xi\tilde{\xi}}(C)$, $(C \in S_X \times S_{\tilde{X}})$ eloszlások W halmazát, amelyekre teljesül, hogy a ξ komponens ezen együttes eloszlásokkal indukált

$$p_\xi(A) = p_{\xi\tilde{\xi}}(A \times \tilde{X}) \tag{1.4.1}$$

eloszlásai azonosak az összes $p_{\xi\tilde{\xi}} \in W$ eloszlásokra. Ezt a halmazt *közleménynek* ($\{W\}$) fogjuk nevezni. A $p_\xi(\cdot)$ eloszlást *a bemeneti közlemény eloszlásának* fogjuk nevezni; tetszőleges olyan ξ és $\tilde{\xi}$ változópárról pedig, amelynek együttes eloszlása beletartozik W-be, azt fogjuk mondani, hogy ez a pár *kielégíti W reprodukálásának pontossági feltételét.*

Hangsúlyozzuk, hogy a mi egyetlen $\{W\}$ közlemény-fogalmunkban két, empirikus szempontból különböző objektum van egyesítve: a $\{W\}$ reprodukálása pontosságának a feltétele megadja mind a bemeneti közlemény $p_\xi(\cdot)$ eloszlását, amely az átvitelre kerülő anyag statisztikai szerkezetét tükrözi vissza, mind pedig a ξ és $\tilde{\xi}$ együttes eloszlására vonatkozó korlátozást, amely megadja az átvitel kívánt minőségét.

A következőkben csak azzal a speciális esettel fogunk foglalkozni, amidőn W reprodukálása pontosságának feltételei bizonyos specifikus, bár az alkalmazások jó része szempontjából még mindig eléggé általános formában vannak megadva. Nevezetesen feltesszük, hogy adva van bizonyos N számú $\varrho_i(x, \tilde{x})$ $(i = 1, \ldots, N)$ valós függvény, amelyek az $S_X \times S_{\tilde{X}}$ σ-algebra szorzatra vonatkozólag mérhetők, valamint egy $\overline{W}$ N-dimenziós halmaz. A W eloszlás-összesség álljon a $(\xi, \tilde{\xi})$ változó-pár olyan eloszlásaiból, hogy a várható értékkel képezett alábbi N-dimenziós vektorra

$$(1.4.2) \qquad (M\varrho_1(\xi, \tilde{\xi}), M\varrho_2(\xi, \tilde{\xi}), \ldots, M\varrho_N(\xi, \tilde{\xi})) \in \overline{W},$$

fennálljon, ξ pedig adott p_ξ eloszlással rendelkezzék.

Mindjárt megjegyezzük, hogy e definíció sok fontos speciális esetet felölel. Valóban, például legyenek az X és $\tilde{X}$ terek azonosak és X-ben legyen adva egy $\bar{\varrho}(x, \tilde{x})$ metrika, amely mérhető függvény a $X \times \tilde{X}$ téren. Legyen $\overline{W} = [0, a], a \geqq 0$. Legyen mármost $N = 1$ és

$$\varrho_1(x, \tilde{x}) = \bar{\varrho}(x, \tilde{x}).$$

(1.4.2)-ből a következő feltételt kapjuk

$$(1.4.3) \qquad M\bar{\varrho}(\xi, \tilde{\xi}) \leqq a.$$

Az (1.4.3) feltétel egyszerű szemléletes jelentése nyilvánvaló: ez azt jelenti, hogy a kimeneti jelnek a bemeneti jeltől való átlagos eltérése nem lépi túl a-t. Legyen most

$$\varrho_1(x, \tilde{x}) = [\bar{\varrho}(x, \tilde{x})]^2;$$

ekkor a következő feltételt kapjuk:

$$(1.4.4) \qquad M[\bar{\varrho}(\xi, \tilde{\xi})]^2 \leqq a,$$

amely azt fejezi ki, hogy a bemeneti jelnek a kimeneti jeltől négyzetes középben való eltérése nem lépi túl a-t.

Azt is írhatjuk továbbá, hogy

$$\varrho_1(x, \tilde{x}) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \bar{\varrho}(x, \tilde{x}) \leqq b, \\ 1, & \text{ha} \quad \bar{\varrho}(x, \tilde{x}) > b. \end{cases}$$

Ekkor a W követelmény a következő feltételre redukálódik:

(1.4.5) $$P\{\bar{\varrho}(\xi, \tilde{\xi}) > b\} \leqq a,$$

amelynek ugyancsak világos a szemléletes jelentése. Végül $a = 0$-t írva és

$$\varrho_1(x, \tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \neq \tilde{x}, \\ 0, & \text{ha} \quad x = \tilde{x}, \end{cases}$$

mellett a következő feltételt kapjuk:

(1.4.6) $$P\{\xi \neq \tilde{\xi}\} = 0.$$

A következőkben majd látni fogjuk, hogy épp ez a feltétel, a bemeneti közlemények teljes egybeesése a kimeneti közleményekkel (itt a W eloszláshalmaz egyetlen elemből áll), vezet majd tételeinkben olyan eredményekre, amelyeket korábban már HINCSIN [26] és ROZENBLAT [20], [25] is kapott, valamint PEREZ [18] egyes eredményeire.

Most bemutatunk egy példát, amelyben $\varrho_i(x, \tilde{x})$ bizonyos becsléseire van szükség. Az X tér elemei legyenek az $x = (z_1, \ldots, z_n)$ sorozatok, ahol a z_i-k csak két értéket, 0 és 1-et vehetnek fel, S_X pedig legyen az X halmaz öszszes részhalmazainak összessége. Tegyük fel, hogy az $(\tilde{X}, S_{\tilde{X}})$ tér egybeesik (X, S_X)-szel. Végül $x = (z_1, \ldots, z_n)$ és $\tilde{x} = (\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n)$ megválasztása mellett legyen $\varrho_i(x, \tilde{x}) = |z_i - \tilde{z}_i|$. $\overline{W}$-nek a $0 \leqq \varrho_i \leqq a$ $(i = 1, \ldots, n)$ parallelepipedont választva, látjuk, hogy ha a bemeneti közlemény $\xi = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, a kimeneti közlemény pedig $\tilde{\xi} = (\tilde{\zeta}_1, \ldots, \tilde{\zeta}_n)$, akkor a W feltétel a következő követelményre redukálódik:

(1.4.7) $$P\{\zeta_i \neq \tilde{\zeta}_i\} \leqq a \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Szemléletesen a most tekintett eset a következő: a közleményt egy két jelből álló ábécében egy n-betűs szó írja le, a követelmény pedig az, hogy mindegyik betű átvitelénél a hiba elkövetésének valószínűsége ne lépje túl az a állandót. Pontosan ugyanígy a tekintett típusú feltételre redukálódnak azon különféle feltételek, amelyeket a ξ és $\tilde{\xi}$ változók szórásnégyzetére és kovarianciájára tesznek, amidőn ezek a változók többdimenziós vektorok.

Egy *W-reprodukálási pontosságú közlemény entrópiájának* fogjuk nevezni a

(1.4.8) $$H(W) = \inf I(\xi, \tilde{\xi})$$

számot,[1] ahol az alsó határ az összes lehetséges olyan valószínűségi változó-

[1] Ha a W halmaz üres, alkalmas lesz $H(W) = +\infty$-t vennünk.

párokra veendő, amelyek eleget tesznek a közlemény-átvitel W-pontossági feltételeinek. Abban a már fentebb is megemlített speciális esetben (l. (1. 4. 6)), amidőn W egyetlen oly elemből áll, hogy ξ és $\tilde{\xi}$ 1 valószínűséggel egybeesnek, azaz, amidőn a pontossági követelmény abból áll, hogy az átvitt és a vett közlemények teljesen essenek egybe, az entrópiára fennáll $H(W)=I(\xi, \tilde{\xi})$ és ez az entrópia azonos lesz a ξ valószínűségi változó közönséges entrópiájával.

A következőkben közlemények sorozatait fogjuk tekinteni. A fentebb mondottaknak megfelelően a bemeneti, illetve kimeneti közleményeket ξ^t, illetve $\tilde{\xi}^t$-vel fogjuk jelölni, a pontossági feltételeket pedig W^t-vel. A W^t feltételt ismét a $\varrho_i^t(x, \tilde{x})$ függvények, valamint a W^t halmaz határozzák meg. Most definiálni fogunk egy számunkra igen fontos fogalmat: *közlemények információ-stabilis sorozatát.* A $\{W^t\}$ közlemény-sorozatot információ-stabilisnek fogjuk nevezni, ha létezik oly $(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ valószínűségi változópárok információ-stabilis sorozata, melyeknél a t-edik pár eleget tesz a közleménytovábbítás W^t pontossági feltételeinek, és[1]

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I^t(\xi, \tilde{\xi})}{H^t(W)} = 1. \tag{1.4.9}$$

(Persze, itt tulajdonképp a párok sorozatának információ-stabilitása a lényeges, minthogy annak a lehetősége, hogy a W^t pontossági feltételnek és az (1. 4. 9) feltételnek eleget tegyünk, közvetlen következménye az (1. 4. 8) definíciónak.) Amint majd a továbbiakban látni fogjuk, összes eredményeink információ-stabilis közleményekre fognak vonatkozni. Az elméletet ezzel a sajátsággal nem rendelkező közleményekre alkalmazni csak az (1. 4. 8) alapvető definíció megváltoztatásával lehetséges.

Igen egyszerű példa gyanánt tekintsük azt az esetet, amidőn a W^t halmazok mindegyike egyetlen elemből áll, úgy, hogy a $(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ közlemény-pár sorozat (amelyek eleget tesznek a W^t pontossági feltételeknek) egyértelműen meghatározott eloszlással rendelkezik. Itt a közlemény akkor és csak akkor lesz információ-stabilis, hogyha maga a $(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ párok sorozata is információ-stabilis. Rendkívül fontos a már vizsgált $\xi^t=\tilde{\xi}^t$ eset. Ha ξ^t egy stacionárius ergodikus folyamat szakasza, akkor MAC-MILLAN tétele (l. [15] és [26]) egyúttal azt is jelenti, hogy a közlemény információ-stabilis. HINCSIN [26] munkájában épp ilyen közleményt tanulmányozott.

Munkánk 6. §-ában információ-stabilis közleményekre még egy fontos példát fogunk látni: a független komponensű közleményeket. Nevezetesen,

[1] A $\frac{+\infty}{+\infty}$ hányadost itt 1-nek tekintjük, a $\frac{+\infty}{I}$ hányadost pedig, ahol $I<\infty$, $+\infty$-nek.

tegyük fel, hogy adva vannak a (Z, S_Z) és $(\tilde{Z}, S_{\tilde{Z}})$ terek, a (Z, S_Z) térben a $p_\zeta(\cdot)$ valószínűség-eloszlás, a $\varrho(z, \tilde{z})$ $(z \in Z, \tilde{z} \in \tilde{Z})$ mérhető függvény és a W_Z egydimenziós halmaz. Tegyük fel továbbá, hogy az (X^t, S_X^t) és $(\tilde{X}^t, S_{\tilde{X}}^t)$ terek t darab (Z, S_Z), illetve $(\tilde{Z}, S_{\tilde{Z}})$ tér szorzatai, azaz:

$$(X^t, S_X^t) = (Z \times \cdots \times Z, S_Z \times \cdots \times S_Z),$$

$$(\tilde{X}^t, S_{\tilde{X}}^t) = (Z \times \cdots \times \tilde{Z}, S_{\tilde{Z}} \times \cdots \times S_{\tilde{Z}}).$$

Tegyük fel továbbá, hogy a ξ^t bemeneti közlemény p_ξ^t eloszlása a $p_\zeta \times \cdots \times p_\zeta$ t-szeres eloszlás-szorzat, úgy, hogy a bemeneti közlemény: $\xi^t = (\zeta_1, \ldots, \zeta_t)$, ahol a ζ_i-k független valószínűségi változók, mindegyik $p_\zeta(\cdot)$ eloszlással. Továbbá tegyük fel, hogy adva van t számú $\varrho_k^{(t)}(x, \tilde{x})$ függvény (ahol $x^t = (z_1, \ldots, z_t)$, $\tilde{x}^t = (\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_t)$) a következő egyenlőséggel

(1.4.10) $$\varrho_k^t(x, \tilde{x}) = \varrho(z_k, \tilde{z}_k).$$

Végül tegyük fel, hogy a t-dimenziós W^t halmaz, amely a reprodukálás pontossága feltételének definíciójában szerepel, t darab W_Z halmaz szorzata. Ekkor azt fogjuk mondani, hogy adva van *független komponensű közlemények szorzata*. A $(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ változó-párt, ahol $\xi^t = (\zeta_1^t, \ldots, \zeta_t^t)$, $\tilde{\xi}^t = (\tilde{\zeta}_1^t, \ldots, \tilde{\zeta}_t^t)$, független komponensű közleményünk reprodukálása pontosságának feltétele, akkor és csak akkor kapcsolja össze, ha a ζ_i^t változók függetlenek, mindegyiküknek ugyanaz a $p_\zeta(\cdot)$ eloszlása van és bármely k-ra az $M\varrho(\zeta_k^t, \tilde{\zeta}_k^t)$ várható értékre fennáll: $M\varrho(\zeta_k^t, \tilde{\zeta}_k^t) \in W_Z$. A 6. §-ban megmutatjuk, hogy ha a $H^1(W)$ entrópia véges, akkor a $H^t(W)$ entrópiára fennáll, hogy

(1.4.11) $$H^t(W) = tH^1(W),$$

és a $\{W^t\}$ közleménysorozat információ-stabilis. Még sok más konkrét példát is lehetne adni független komponensű közleményekre.

Mindmáig megoldatlan az a probléma, hogy hogyan kaphatók általános elégséges feltételek egy közleménysorozat információ-stabilitására (ez szorosan összefügg azzal a problémával, hogyan kaphatunk elég általános feltételeket változó párok sorozata információ-stabilitására; vö. 1. 3. pont).

1. 5. Átviteli berendezés. Egy átviteli berendezés megadásához mindenekelőtt meg kell adni két mérhető teret, (Y, S_Y) és $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}})$-t, amelyeket az *átviteli berendezés bemenetére belépő jelek terének*, illetve az *átviteli berendezés kimenetén kilépő jelek terének* nevezünk. Sok alkalmazásban kézenfekvő ezt a két teret azonosnak venni. Továbbá, adottnak kell lennie egy olyan $Q(y, \tilde{A})$, $(y \in Y,\ \tilde{A} \in S_{\tilde{Y}})$ átmenet-függvénynek, amelyre fennáll:

1) rögzített $y \in Y$ mellett a $Q(y, .)$ függvény valószínűségi mérték $S_{\tilde{Y}}$-on,
2) rögzített $\tilde{A} \in S_{\tilde{Y}}$ mellett $Q(., \tilde{A})$ mérhető a S_Y σ-algebrára vonatkozólag.

Mint ismeretes, ez a két feltétel azt fejezi ki, hogy $Q(.,.)$-t úgy tekinthetjük, mint egy Markov-lánc átmenet-valószínűségi függvényét. Szemléletesen szólva, a $Q(y,.)$ valószínűség-eloszlás rögzített y mellett nem más, mint az átviteli berendezés kimenetén kilépő jel valószínűség-eloszlása, ha ugyanezen berendezés bemenetére az y jelet vitték rá. Ezenfelül adottnak kell lennie a bemeneti jelek, illetve kimeneti jelek $(Y\times\tilde{Y}, S_Y\times S_{\tilde{Y}})$ szorzattéren értelmezett valószínűség-eloszlásokból álló halmaz valamilyen V részhalmazának. Ez a halmaz bizonyos korlátozást képvisel a bemenő, ill. kimenő jelek együttes eloszlására vonatkozólag. A fentebb leírt $Y, \tilde{Y}$ terek, $Q(.,.)$ függvény és V halmaz összességét *átviteli berendezésnek* fogjuk nevezni; ezt így a következőképpen fogjuk jelölni: „a $\{Q, V\}$ átviteli berendezés".

Két valószínűségi változóról, η-ról és $\tilde{\eta}$-ról, amelynek értékei az Y, illetve $\tilde{Y}$ terekbe tartoznak, akkor mondjuk, hogy a $\{Q, V\}$ átviteli berendezés kapcsolja őket össze, ha az $(\eta, \tilde{\eta})$ pár eloszlása a V halmazba tartozik és tetszőleges $\tilde{A}\in S_{\tilde{y}}$-re a $P\{\tilde{\eta}\in\tilde{A}/\eta\}$ feltételes valószínűségre fennáll úgy, hogy majdnem mindenütt[1]

$$(1.5.1)\qquad P\{\tilde{\eta}\in\tilde{A}/\eta\}=Q(\eta,\tilde{A}).$$

A következőkben csak azt az esetet fogjuk tekinteni, amikor a V korlátozást specifikus módon adjuk meg, — annak az analógiájára, amelyet egy közlemény reprodukálási pontossága feltételeinek megadásakor használtunk. Nevezetesen feltesszük, hogy az $Y\times\tilde{Y}$ térben adva van N számú $\pi_i(y, \tilde{y})$ $(i=1,\ldots,N)$ valós, mérhető függvény. Ezen felül feltesszük, hogy adva van egy $\bar{V}$ N-dimenziós halmaz. A V eloszlás-összesség azon $(\eta, \tilde{\eta})$ változók eloszlásaiból áll, amelyekre fennáll, hogy

$$(1.5.2)\qquad (M\pi_1(\eta,\tilde{\eta}),\ldots,M\pi_N(\eta,\tilde{\eta}))\in\bar{V}.$$

Nem nehéz példákat adni a fent leírt típusú korlátozásokra; ezek a példák analogonjai a reprodukálás pontossága feltételeire az előző pontban adott példáknak. Az alkalmazások szempontjából különösen fontosnak tekintendő az a speciális eset, amikor a π_i függvények csak y-tól függenek, úgy hogy a korlátozás csak a bemenő jel eloszlására szól. Például gyakran feltesszük, hogy a bemeneti jel átlagos teljesítménye felülről korlátos.

A $\{Q, V\}$ *átviteli berendezés kapacitásának* a következő számot fogjuk nevezni:

$$(1.5.3)\qquad C(Q, V)=\sup I(\eta,\tilde{\eta}),$$

ahol a felső határ azon összes lehetséges $\eta, \tilde{\eta}$ valószínűségi változó-párokra veendő, amelyeket a $\{Q, V\}$ átviteli berendezés kapcsol össze.

[1] A feltételes valószínűségnek a cikkben sokszor használt általánosított fogalmát illetőleg l. például: [24] 48. §, vagy [9], 1. fej. 8. §.

A következőkben átviteli berendezések $\{Q^t, V^t\}$ sorozataival foglalkozunk. Mint magától értetődik, a t-edik átviteli berendezéshez rendelt objektumokat t felső indexszel fogjuk egyebektől megkülönböztetni. Egy $\{Q^t, V^t\}$ *átviteli berendezés-sorozatot információ-stabilisnek* fogunk nevezni, ha létezik az $(\eta^t, \tilde{\eta}^t)$ változó-párok olyan információ-stabilis sorozata, hogy a t-edik párt a $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezés kapcsolja össze, továbbá[1]

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I^t(\eta, \tilde{\eta})}{C^t(Q, V)} = 1. \tag{1.5.4}$$

Minden további eredmény csak átviteli berendezések információ-stabilis sorozataira fog vonatkozni.

Átviteli berendezések információ-stabilis sorozataira legegyszerűbb példa egy zajmentes diszkrét átviteli berendezés. Nevezetesen, legyen Y^t $n^t < \infty$ pontból álló véges halmaz, S^t_Y álljon az Y^t tér összes részhalmazaiból, és tegyük fel, hogy a kimeneti jelek $(\tilde{Y}^t, S^t_{\tilde{Y}})$ tere azonos a bemeneti jelek (Y^t, S^t_Y) terével. Tegyük fel továbbá, hogy a $Q^t(.,.)$ átmenet-függvények olyanok, hogy tetszőleges $y^t \in Y^t$-re a $Q^t(y,.)$ eloszlás teljesen az y^t pontba van összpontosítva. Ebben az esetben tetszőleges olyan $\eta^t, \tilde{\eta}^t$ változó-párra, amelyeket az átviteli berendezés összekapcsol, $\eta^t = \tilde{\eta}^t$ 1 valószínűséggel. Végezetül tegyük fel, hogy a bemeneti jel megengedhető eloszlásainak V halmaza az $Y \times \tilde{Y}$ tér összes eloszlásaiból áll. (Ilyen V halmaz megadható π_i becsléseink segítségével, $\bar{V}$-nek az egész teret választva) A leírt átviteli berendezés-sorozat információ-stabilis lesz. Valóban, itt a kapacitás egybeesik Y^t-be eső értékű valószínűségi változók entrópiájának felső határával. Mint ismeretes, ez a felső határ (amely $\log n^t$-vel egyenlő) olyan valószínűségi változókkal érhető el, amelyek az n^t érték közül mindegyiket egy és ugyanazon $\frac{1}{n^t}$ valószínűséggel veszik fel. Ahogy már az 1.3 pontban megjegyeztük, ez a valószínűségi változó-sorozat információ-stabilis és ennek folytán segítségével megfelelhetünk az átviteli berendezések információ-stabilis sorozata definíciójának.

Átviteli berendezések információ-stabilis sorozatára fontos példát kaphatunk, ha (l. az 1.8 pontot) a Hincsin-féle értelemben véges memóriájú diszkrét stacionárius csatorna fogalmából indulunk ki (l. [26]). E sorozat információ-stabilitása CAREGRADSZKIJ egy bizonyításából következik (l. [27]), amelyben arról van szó, hogy e csatorna ergodikus és közönséges kapacitása azonos (a terminológiát illetőleg l. [26]-ot).

Munkánk 6. §-ában információ-stabilis átviteli berendezéseknek egy fontos speciális osztályát fogjuk vizsgálni, nevezetesen a memória nélküli átvi-

[1] Itt és a továbbiakban úgy vesszük hogy $\frac{+\infty}{+\infty} = 1$, $\frac{C}{+\infty} = 0$ és $\frac{+\infty}{C} = +\infty$, ahol $C < \infty$.

teli berendezéseket. Ennél (l. a [29], [16], [23] munkákat) feltesszük, hogy az állapotok tere tetszőleges és bevezetünk egy V kiegészítő korlátozást az átviteli berendezés meghatározásánál.

Nevezetesen, fel fogjuk tenni, hogy adva vannak a (Z, S_Z), $(\tilde{Z}, S_{\tilde{Z}})$ terek és a $Q_Z(z, \tilde{B})$ átmenet-függvény $(z \in Z,\ \tilde{B} \in S_{\tilde{Z}})$, amely rögzített z-re valószínűségi mérték és rögzített $\tilde{B}$ mellett mérhető függvény, — ezenkívül a $\pi(z, \tilde{z})$ mérhető függvény, $(z \in Z,\ \tilde{z} \in \tilde{Z})$ és végül az egydimenziós $\overline{V}_Z$ halmaz. Továbbá tegyük fel, hogy az (Y^t, S_Y^t), illetve $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}}^t)$ terek a (Z, S_Z), illetve $(\tilde{Z}, S_{\tilde{Z}})$ terekből úgy keletkeztek, hogy azokat t-szer önmagukkal szoroztuk, azaz

$$(Y^t, S_Y^t) = (Z \times \cdots \times Z,\ S_Z \times \cdots \times S_Z),$$

$$(\tilde{Y}^t, S_{\tilde{Y}}^t) = (\tilde{Z} \times \cdots \times \tilde{Z},\ S_{\tilde{Z}} \times \cdots \times S_{\tilde{Z}}).$$

Legyen adva továbbá a $Q^t(y, A)$ átmenet-függvény, éspedig úgy, hogy

$$\text{(1.5.5)} \qquad \begin{cases} y^t = (z_1^t, \ldots, z_t^t),\ \tilde{A}^t = \tilde{B}_1 \times \cdots \times \tilde{B}^t, \text{ ahol } \tilde{B}_k \in S_{\tilde{Z}} \text{ esetén} \\ Q^t(y, \tilde{A}) = Q_Z(z_1, \tilde{B}_1) Q_Z(z_2, \tilde{B}_2) \ldots Q_Z(z_t, \tilde{B}_t) \end{cases}$$

fennálljon, majd a $Q^t(y, \tilde{A})$ függvényt kiterjesztjük tetszőleges $\tilde{A}^t \in S_{\tilde{Y}}^t$ halmazokra az additivitás megőrzésével. Definiáljuk ezután a $\pi_k^t(y, \tilde{y})$ függvényeket, midőn $y^t = (z_1^t, \ldots, z_t^t)$, $\tilde{y}^t = (\tilde{z}_1^t, \ldots, \tilde{z}_t^t)$, a következőképpen:

$$\text{(1.5.6)} \qquad \pi_k^t(y, \tilde{y}) = \pi(z_k^t, \tilde{z}_k^t).$$

Végül tegyük fel, hogy a $\overline{V}$ t-dimenziós halmaz, amely az átviteli berendezések definíciójában szerepel, t darab $\overline{V}_Z$ halmaz sorozata. A most leírt módon megadott átviteli berendezésekről azt fogjuk mondani, hogy az *memória nélküli átviteli berendezés.* Kicsit szabadon azt mondhatjuk, hogy az $(\eta^t, \tilde{\eta}^t)$ változó-párt, ahol $\eta^t = (\zeta_1^t, \ldots, \zeta_t^t)$, $\tilde{\eta}^t = (\tilde{\zeta}_1^t, \ldots, \tilde{\zeta}_t^t)$, memória nélküli átviteli berendezés kapcsolja össze, ha minden k-ra és minden $\tilde{B} \in S_{\tilde{Z}}$, $z \in Z$-re

$$P^t\{\tilde{\zeta}_k \in \tilde{B} / \zeta_k = z\} = Q_Z(z, \tilde{B}),$$

akármilyenek is legyenek azok a kiegészítő feltételek, amelyeket a $\zeta_l^t, \tilde{\zeta}_l^t$, $l \neq k$ változókra tettünk, továbbá ha minden k-ra a $M\pi(\zeta_k^t, \tilde{\zeta}_k^t)$ várható értékre fennáll, hogy $M\pi(\zeta_k^t, \tilde{\zeta}_k^t) \in V_Z$. A 6. §-ban bebizonyítjuk majd, hogy ha a $C^1(Q, V)$ kapacitás véges, akkor tetszőleges t esetén a $C^t(Q, V)$ kapacitásra fennáll:

$$\text{(1.5.7)} \qquad C^t(Q, V) = tC^1(Q, V)$$

és a memória nélküli $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezések sorozata információ-stabilis lesz. Memória nélküli átviteli berendezések gyakran kerülnek felhasználásra konkrét információelméleti munkákban.

Az a probléma, hogy miként lehet eléggé általános feltételeket kapni arra, hogy átviteli berendezések egy sorozata információ-stabilis legyen, épp úgy, mint a közleményekre vonatkozó analóg probléma, egyelőre megoldatlan maradt.

1.6. Közlemény-átvitel. Emlékeztetünk a következő jól ismert definícióra. Valószínűségi változók $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ sorozata, ahol a változók értékei sorra a (Z_i, S_{Z_i}) mérhető terekbe tartoznak, *Markov-láncot alkot*, ha tetszőleges i-re és tetszőleges $A \in S_{Z_i}$ halmazra 1 valószínűséggel

$$P\{\zeta_i \in A/\zeta_{i-1}\} = P\{\zeta_i \in A/\zeta_{i-1}, \ldots, \zeta_1\}. \tag{1.6.1}$$

Tegyük fel, hogy adva vannak reprodukálási pontossággal $\{W\}$ közlemények és egy $\{Q, V\}$ átviteli berendezés. Azt fogjuk mondani, hogy a $\{W\}$ *közlemény* átvihető a $\{Q, V\}$ *átviteli berendezés segítségével*, ha létezik négy olyan valószínűségi változó, ξ, η, $\tilde{\eta}$ és $\tilde{\xi}$, hogy

1) a négy ξ, η, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}$ változóból álló sorozat Markov-láncot alkot,

2) a $\xi, \tilde{\xi}$ változó-pár eleget tesz $\{W\}$ reprodukálási pontossági feltételeinek,

3) az $\eta, \tilde{\eta}$ változó-párt a $\{Q, V\}$ átviteli berendezés kapcsolja össze.

A most adott alapvető definíció bizonyos kommentárokra szorul. Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy — a távközlési csatornával összekapcsolt változó-párok definíciójának megfelelően — 1 valószínűséggel fennáll, hogy

$$P\{\tilde{\eta} \in A/\eta\} = Q(\eta, A),$$

úgy hogy az η-ról $\tilde{\eta}$-ra való átmenet valószínűségeit egyértelműen meghatározza az átviteli berendezés. Szemléletes fogalmakat használva $P\{\eta \in A/\xi = x\}$ feltételes valószínűség-eloszlás úgy interpretálható, mint azon bemeneti jel valószínűség-eloszlása, amibe a kódolás műveleteinek eredményeként az x közlemény megy át. Analóg módon $P\{\tilde{\xi} \in \tilde{A}/\tilde{\eta} = \tilde{y}\}$ úgy interpretálható, mint azon kimeneti közlemény valószínűség-eloszlása, amely az $\tilde{y}$ jelből keletkezik a visszakódolás műveletének eredményeként. A fentebb használt általános tárgyalásmódban a kódolás és visszakódolás műveletei nem okvetlenül meghatározott műveletek, hanem magukban foglalják a véletlenszerűség lehetőségét is. Az a követelmény, hogy a ξ, η, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}$ változók alkossanak Markov-láncot, azt fejezi ki, hogy rögzített bemeneti jel mellett az átviteli berendezés kimenetén mutatkozó jel valószínűség-eloszlása nem függ attól, hogy melyik közleményt kódolták ezzel a jellel, továbbá azt, hogy az átviteli berendezés rögzített kimeneti jele mellett azon közlemény valószínűség-eloszlása, amelybe ez a jel a visszakódoláskor átmegy, nem függ attól, milyen volt a bemeneti jel és milyen volt az átkódolt közlemény.

Ismeretes (l. [11]), hogy *ha a* $\{W\}$ *közlemény átvihető a* $\{Q, V\}$ *átviteli berendezés segítségével, akkor*

$$H(W) \leqq C(Q, V). \tag{1.6.2}$$

E tény bizonyítását (ami különben nem nehéz) a teljesség kedvéért majd a 2. 10 pontban közöljük.

A Shannon-féle alaptétel — KOLMOGOROV interpretációjában — azt mondja ki, hogy bizonyos aszimptotikus értelemben és bizonyos regularitási feltevések mellett ez az (1. 6. 2) feltétel elegendő is lesz ahhoz, hogy egy közlemény átvihető legyen egy átviteli berendezés segítségével.

E cikk célja bizonyos hasonló típusú, a következő pontban megfogalmazandó állítások bizonyítása.

1. 7. Alapvető tételek. Tegyük fel, hogy adva van egy $\{W^t\}$ közleménysorozat és egy $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezés-sorozat, olyan módon, ahogy ez az 1. 4 és 1. 5 pontokban van leírva. Az e pontokban bevezetett jelöléseket is használni fogjuk.

Vezessünk még be bizonyos kiegészítő definíciókat és jelöléseket.

Legyen $U \in R^n$, ahol R^n n-dimenziós euklideszi tér, amelynek pontjai $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. A $\bar{x}' = (x_1', \ldots, x_n')$ és $\bar{x}'' = (x_1'', \ldots, x_n'')$ pontok közti $r(\bar{x}', \bar{x}'')$ távolságként célszerű lesz az

$$(r\bar{x}', \bar{x}'') = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i' - x_i''| \tag{1.7.1}$$

számot venni. Ha $\varepsilon \geqq 0$, jelöljük $[U]_\varepsilon$-nal az olyan $\bar{x} \in R^n$ pontok összességét, amelyekre valamilyen $x \in U$ mellett fennáll, hogy

$$r(\bar{x}, x) \leqq \varepsilon.$$

Ha $\varepsilon < 0$, jelöljük $[U]_\varepsilon$-nal az olyan $\bar{x} \in R^n$ pontok összességét, amelyekre tetszőleges x pont, melyre $r(\bar{x}, x) \leqq -\varepsilon$, beletartozik U-ba. Nyilvánvaló, hogy $[U]_0 = U$ és hogy $\gamma < \delta$ esetében $[U]_\gamma \subset [U]_\delta$.

Mármost $\{W_\varepsilon\}$ *közleménynek* fogunk nevezni egy olyan közleményt, amelyet az (1. 4. 2) egyenlőség segítségével adtunk meg, a $\bar{W}$ halmazt $[\bar{W}]_\varepsilon$-nal helyettesítve. Analóg módon $\{Q, V_\varepsilon\}$ *átviteli berendezésnek* fogjuk nevezni azt az átviteli berendezést, amelyet úgy definiálhatunk, hogy az (1. 5. 2) egyenlőségben a $\bar{V}$ halmazt a $[\bar{V}]_\varepsilon$ halmazzal helyettesítjük.

Az 1. 6 pontban adott definíciót módosítva, vezessük be ezenkívül az „ε valószínűségű eseménytől eltekintve pontosan átvitt közlemény" fogalmát is. Nevezetesen azt fogjuk mondani, hogy a $\{W\}$ *közlemény a* $\{Q, V\}$ *átviteli berendezés segítségével* ε *pontossággal átvihető,* ha létezik olyan négy valószínűségi változó, ξ, η, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}$, valamint egy $\tilde{\xi}'$ ötödik valószínűségi változó, utóbbi az $(\tilde{X}, S_{\tilde{X}})$ térbe tartozó értékekkel, amelyekre fennállnak a következők:

1) a négy valószínűségi változó, ξ, η, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}$ sorozata Markov-láncot alkot,

2) a ξ, ξ' változó-pár eleget tesz $\{W\}$ reprodukálása pontossága feltételeinek,

3) az η, $\tilde{\eta}$ változó-párt a $\{Q, V\}$ távközlési csatorna kapcsolja össze,

4) a $P\{\tilde{\xi} \neq \tilde{\xi}'\}$ valószínűségre fennáll, hogy

$$P\{\tilde{\xi} \neq \tilde{\xi}'\} \leqq \varepsilon. \tag{1.7.2}$$

Az 1)—4) feltételek szemléletes jelentése a következő: ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor a kimeneti közleményt ε valószínűséggel változtatva meg, el lehet érni, hogy a bemeneti közleményből és a kimeneti közleményből álló pár eleget tegyen a reprodukálás pontossági feltételnek.

Most megfogalmazunk egy tételt, amely a legáltalánosabb feltételek mellett igaz.

1. TÉTEL. *Legyen adva egy $\{W^t\}$ közleménysorozat és egy $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezéssorozat, melyekre fennállnak a következők:*

I.

$$\lim_{t\to\infty} H^t(W) = \infty. \tag{1.7.3}$$

II.

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{H^t(W)}{C^t(Q, W)} < 1. \tag{1.7.4}$$

III. *A közlemény definíciójában szereplő $\varrho_i^t(x, \tilde{x})$ függvények M^t száma, valamint az átviteli berendezés meghatározásában szereplő $\pi_i^t(y, \tilde{y})$ függvények N^t száma tegyen eleget tetszőleges $a > 0$-ra a következő feltételeknek:*

$$M^t = o(2^{aH^t(w)}), \tag{1.7.5}$$

$$N^t = o(2^{aC^t(Q,V)}). \tag{1.7.6}$$

IV. *Az átviteli berendezések sorozata információ-stabilis, emellett létezik a $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezéssel összekapcsolt, a*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{I^t(\eta, \tilde{\eta})}{C^t(Q, V)} = 1 \tag{1.7.7}$$

feltételnek eleget tevő (vö. (1.5.4)) *η^t, $\tilde{\eta}^t$ valószínűségi változó-pároknak olyan információ-stabilis sorozata, hogy valamilyen $\bar{b} > 0$-ra és*

$$\bar{c}^t = \max_{k=1,\dots,N^t} M\{|\pi_k^t(\eta, \tilde{\eta}) - M\pi_k^t(\eta, \tilde{\eta})|^{1+\bar{b}}\} \tag{1.7.8}$$

bevezetése mellett tetszőleges $a > 0$ esetén

$$\bar{c}^t = o(2^{aC^t(Q,V)}). \tag{1.7.9}$$

V. *A közlemények sorozata információ-stabilis; emellett létezik a* $\{W^t\}$ *reprodukálása pontossága feltételeinek, valamint a*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{I^t(\xi,\tilde{\xi})}{H^t(W)}=1 \tag{1.7.10}$$

(vö. (1.4.9)) *feltételnek eleget tevő* $\xi, \tilde{\xi}^t$ *valószínűségi változó-párok olyan információ-stabilis sorozata, hogy valamilyen* $b>0$*-ra és*

$$c^t=\max_{k=1,\dots,M^t} M\{|\varrho_k^t(\xi,\tilde{\xi})-M\varrho_k^t(\xi,\tilde{\xi})|^{1+b}\} \tag{1.7.11}$$

bevezetése mellett tetszőleges $a>0$ *esetén*

$$c^t=o(2^{aH^t(W)}). \tag{1.7.12}$$

Ekkor tetszőleges $\varepsilon>0$*-ra található olyan nagy* T *szám, hogy minden* $t\geqq T$*-re a* $\{W_\varepsilon^t\}$ *közlemény a* $\{Q^t, V_\varepsilon^t\}$ *átviteli berendezés segítségével* ε *pontossággal átvihető.*

Gondoljuk most át kissé az előbbi tétel megfogalmazását. Az I. és II. feltételek tartalma világos a fentebbi meggondolásból. A III. feltétel felső korlátot szab a ϱ_k és a π_k függvények számára. Ez persze nyilvánvalóan teljesül, ha — ahogy ez az alkalmazások többségében fenn is áll — az M^t és N^t számok nem függnek t-től (hanem gyakran egyszerűen 1-gyel egyenlők). Mindazonáltal nem nehéz megadni olyan fontos speciális eseteket, amelyekben M^t és N^t korlátlanul növekednek. Például az 1.4 pont végén leírt független komponensű közlemény esetében $M^t=t$. Az (1.4.11) entrópiaképlet azonban azt mutatja, hogy a független komponensű közlemény esetében a tétel (1.7.5) feltétele teljesül (persze ha $H^1(W)\neq 0$). Figyelmet érdemel a közleményeknek az az általánosabb esete is, amidőn a vizsgált közlemény t számú, de már nem feltétlenül független komponensből áll. Itt ugyancsak azt kapjuk, hogy — általában kézenfekvő kiegészítő homogeneitási feltételek mellett — a $H^t(W)$ entrópia t nagyságrendű. Az M^t függvény-szám általában ugyancsak legfeljebb t nagyságrendű, és ezért az (1.7.5) feltétel általában teljesül. Analóg a helyzet az (1.7.6) feltétellel; speciálisan, az (1.5.7) képlet azt fejezi ki, hogy ez a feltétel teljesül memória nélküli átviteli berendezésre (persze ha $C^1(Q, V)\neq 0$). Nem nehéz konstruálni olyan példákat, amelyek azt mutatják, hogy az (1.7.5) és az (1.7.6) feltételek nem okvetlenül szükségesek. Mindazonáltal ezek láthatólag teljesülnek az összes reálisan előadódó példákban, úgy hogy az 1. tétel III. feltétele nem jelenti a tétel általánosságának lényeges korlátozását.

Tekintsük most az 1. tétel IV. feltételét. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy ha — ahogy ez gyakran elő is adódik a konkrét példákban — a

$\pi_k^t(y, \tilde{y})$ függvények egyenletesen korlátosak k és t szerint, azaz

(1. 7. 13) $$|\pi_k^t(y, \tilde{y})| \leqq \bar{C} < \infty,$$

akkor $|\bar{c}^t| < \bar{C}$, úgy hogy az (1. 7. 9) feltétel nyilvánvalóan teljesül az $(\eta^t, \tilde{\eta}^t)$ párok tetszőleges sorozatára, és a tétel IV. feltétele ekvivalens lesz az átviteli berendezések sorozata információ-stabilitásának feltételével, amelyet részletesen vizsgáltunk az 1. 4 pontban. Az általános esetben, amidőn a $\pi_k^t(y, \tilde{y})$ függvények nem egyenletesen korlátosak, a IV. feltétel valamivel erősebb, mint a $\{Q^t, V^t\}$ sorozat információ-stabilitásának feltétele. Például a 6. §-ban be fogjuk bizonyítani, hogy memória nélküli átviteli berendezések esetében (l. az 1. 5 pontot) a IV. feltétel teljesüléséhez elegendő, hogy valamilyen $\bar{b} > 0$ esetén tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra létezzék egy $\zeta, \tilde{\zeta}$ változó-pár, amelyeket a $\{Q^1, V^1\}$ átviteli berendezés kapcsol össze, azaz

(1. 7. 14) $$\begin{cases} P\{\tilde{\zeta} \in \tilde{A}/\zeta\} = Q_Z(\zeta, \tilde{A}), \\ M\pi(\zeta, \tilde{\zeta}) \in V_Z, \end{cases}$$

amelyre

(1. 7. 15) $$M\{|\pi(\zeta; \tilde{\zeta}) - M\pi(\zeta, \tilde{\zeta})|^{1+b}\} < \infty, \quad I(\zeta, \tilde{\zeta}) > C^1(Q, V) - \varepsilon.$$

Az (1. 7. 14), (1. 7. 15) feltételeknek eleget tevő változók létezése $\bar{b} = 0$ esetében közvetlenül következik a $C^1(Q, V)$ kapacitás definíciójából, és ezért a megfogalmazott követelmények, amelyek a tétel IV. feltételének teljesülését biztosítják, eléggé gyenge kiegészítő korlátozásokat jelentenek csak. Látjuk, hogy a IV. feltétel teljesül átviteli berendezések sorozataira adott konkrét példák olyan jelentékeny többségében, melyek a Shannon-tétel alkalmazásaival kapcsolatban adódnak elő. Arról van szó, hogy általában a $C^t(Q, V)$ kapacitás lineárisan nő t növekedésével, az (1. 7. 8)-ban szereplő momentumok azonban, ha növekednek is, akkor is úgy, mint bizonyos hatványfüggvény. Mindazonáltal eddig még nem mondtak ki olyan elég általános tételeket, melyek igazolnák ezt a feltevést. A IV. feltétel, amely valószínűségi változók momentumaira vonatkozó megállapítást tartalmaz, helyettesíthető volna egy olyan általánosabb feltétellel, amelyet a „csonkított momentumok" segítségével fogalmaztunk meg (annak analógiájára, ahogy a centrális határeloszlástétel tárgyalásában Ljapunov feltételeit helyettesíteni lehet a Lindeberg-féle feltételekkel). Mindamellett nem vezetjük be a mondott általánosítást, minthogy nem ismerünk olyan reális, konkrét példákat, amelyekben hasznosnak mutatkozna egy ilyen általánosítás.

Az V. feltétellel kapcsolatban ugyanazokat a megjegyzéseket tehetjük, amelyeket a IV. feltétellel kapcsolatban kimondottunk. Speciálisan, ha a $\varrho_k^t(y, \tilde{y})$ függvények k és t szerint egyenletesen korlátosak, azaz, ha

(1. 7. 16) $$|\varrho_k^t(y, \tilde{y})| \leqq C < \infty,$$

akkor az V. feltétel ekvivalens azzal a követelménnyel, hogy a közlemény információ-stabilis legyen. A memória nélküli átviteli berendezések analogonjai a független komponensű közlemények. A 6. §-ban meg fogjuk jegyezni, hogy ilyen közlemények sorozatára teljesül az V. feltétel, amennyiben tetszőleges $\varepsilon>0$-ra létezik olyan $(\zeta, \tilde{\zeta})$ változó-pár, hogy

$$\left\{\begin{array}{l} M\varrho(\zeta, \tilde{\zeta}) \in W_{\mathcal{Z}}; \quad I(\zeta, \tilde{\zeta}) \leqq H^1(W)+\varepsilon, \\ M|\varrho(\zeta, \tilde{\zeta})-M\varrho(\zeta, \tilde{\zeta})|^{1+b}<\infty. \end{array}\right. \tag{1.7.17}$$

Lássuk most a tétel állítását. Rögtön szemünkbe tűnik, hogy ugyanakkor, amikor az 1.6 pontban a $\{W\}$ közlemény $\{Q, V\}$ átviteli berendezések segítségével való átviteléről volt szó, az 1. tétel állításában egy $\{W_\varepsilon\}$ közlemény $\{Q, V_\varepsilon\}$ átviteli berendezés segítségével ε pontossággal való átviteléről volt szó. Az 1. tétel állításának megfelelően elég nagy t esetén az ε szám tetszőleges kicsire vehető, úgy hogy — szemléletesen nézve a dolgot — az 1. tétel úgy fogható fel, mint az 1.6. pont állításának fordítottja. Mégis felmerül az a kérdés, lehet-e a tétel állításában az ε számot $\varepsilon=0$-nak venni. Lentebb látni fogjuk, hogy ez csak bizonyos kiegészítő feltevések mellett lehetséges.

Nézzük most, milyen alakot ölt a W_ε feltétel az 1.4 pontban vizsgált egyes igen egyszerű példák esetében. Ha a W feltételt az (1.4.3) egyenlőtlenség fejezi ki, akkor a W_ε feltétel azt fogja jelenti, hogy

$$M\tilde{\varrho}(\xi, \tilde{\xi}) \leqq a+\varepsilon. \tag{1.7.18}$$

Ha a W feltételt az (1.4.5) egyenlőtlenség fejezi ki, akkor a W_ε feltétel azt jelenti, hogy

$$P\{\tilde{\varrho}(\xi, \tilde{\xi})>b\} \leqq a+\varepsilon. \tag{1.7.19}$$

Végül, ha a W feltétel az (1.4.6) egyenlőségre redukálódik, akkor a W_ε feltétel azt jelenti, hogy

$$P\{\xi \neq \tilde{\xi}\} \leqq \varepsilon. \tag{1.7.20}$$

Ezen utolsó esetben tételünk azt állítja, hogy elegendő nagy t esetén az átvitel megszervezhető úgy, hogy annak a valószínűsége, hogy a bemeneti és a kimeneti közlemények nem esnek egybe, ne legyen nagyobb, mint egy előre megadott tetszőlegesen kis ε. Már említést tettünk olyan közlemény információ-stabilitásáról, amelyet egy diszkrét stacionárius ergodikus folyamat egy szakasza ad meg, az (1.4.6) reprodukálás-pontossági feltétel mellett, valamint egy olyan átviteli berendezés információ-stabilitásáról, amely egy diszkrét stacionárius, Hincsin-féle értelemben véges dimenziójú csatorna egy szakaszával van megadva. Így egy ilyen szituációban alkalmazható az 1. tétel, amely a HINCSIN által kapott [26] eredményre vezet. Mindazonáltal hangsúlyozzuk, hogy SHANNON tételének ebben a munkában való tárgyalása nem teszi lehetővé, hogy HINCSIN összes eredményeit levezessük, minthogy HINCSIN nemcsak egy folyamat véges szakasza kódolásának feladatával foglalkozik, hanem az egész — időben végtelen — folyamat kódolásának feladatával is.

Az 1. tétel folyományaként könnyen kapható a következő 2. tétel, amely arról szól, hogy bizonyos gyenge kiegészítő korlátozási feltételek mellett az 1. tétel megfogalmazásában $\{W_\varepsilon\}$-t $\{W\}$-vel és $\{Q, V_\varepsilon\}$-t $\{Q, V\}$-vel helyettesíthetjük.

2. TÉTEL. A) *Tegyük fel, hogy teljesülnek az 1. tétel I—IV. feltételei. Tegyük fel továbbá, hogy*

V') *létezik olyan tetszőlegesen kicsi δ, hogy tetszőleges $\varepsilon \leqq \delta$ esetén az V. feltétel teljesül, ha benne a $\{W^t\}$ reprodukálása pontosságának feltételét a $\{W^t_{-\varepsilon}\}$ feltétellel helyettesítjük.*

Teljesüljön ezenkívül a következő feltétel:

VI. *A $H^t(W_\varepsilon)$ entrópiára fennáll, hogy*

$$\lim_{\varepsilon \to 0-0} \frac{H^t(W_\varepsilon)}{H^t(W)} = 1, \tag{1.7.21}$$

és itt a konvergencia egyenletes $t \geqq \bar{t}$-ben, valamilyen $\bar{t} < \infty$ mellett.

Akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz található egy olyan elég nagy T érték, hogy minden $t \geqq T$-re a $\{W^t\}$ közlemény a $\{Q^t, V^t_\varepsilon\}$ átviteli berendezés segítségével ε pontossággal átvihető.

B) *Tegyük fel, hogy teljesülnek az 1. tétel I—III. és V. feltételei. Továbbá tegyük fel, hogy*

IV'. *létezik oly kis δ, hogy tetszőleges $\varepsilon \leqq \delta$-nál a IV. feltétel teljesül, ha benne a $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezést $\{Q^t, V^t_{-\varepsilon}\}$-vel helyettesítjük.*

Tegyük fel, hogy ezenfelül teljesül a következő feltétel:

VII. *A $C^t(Q, V_\varepsilon)$ kapacitásra fennáll, hogy*

$$\lim_{\varepsilon \to 0-0} \frac{C^t(Q, V)}{C^t(Q, V_\varepsilon)} = 1, \tag{1.7.22}$$

és a konvergencia egyenletes $t \geqq \bar{t}$-ben, valamilyen $\bar{t} < \infty$ mellett.

Akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz található oly nagy T, hogy minden $t \geqq T$-re a $\{W^t_\varepsilon\}$ közlemény a $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezés segítségével ε pontossággal átvihető.

C) *Tegyük fel, hogy az 1. tétel I—III. feltételein kívül teljesülnek a fentebb megfogalmazott IV'., V'., VI. és VII. feltételek is.*

Akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz található oly nagy T, hogy minden $t \geqq T$-re a $\{W^t\}$ közlemény a $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezés segítségével ε pontossággal átvihető.

A IV'. és V'. feltételek szemléletes tartalmukat tekintve teljesen analógok a IV. és V. feltételekkel. Éppen ezért nem fűzünk hozzájuk újabb kommentárokat.

Hogy egy kissé megvilágítsuk a VI. feltétel jelentését, megjegyezzük, hogy ha a W_ε feltételt az (1. 7. 18) vagy az (1. 7. 19) egyenlőtlenség fejezi ki, akkor $a>0$ esetében kézenfekvő azt várni, hogy $H\{W_\varepsilon\}$ folytonos függvénye lesz ε-nak, úgy hogy a határátmenet egyenletességének követelménye, amely benne van a VI. feltételben, általában szólva a regularitás követelményével lesz ekvivalens, amely az alkalmazások java részében teljesül. Másrészt az (1. 7. 20) példában a $[W_\varepsilon]$ halmaz negatív ε esetén üres lesz, vagyis (l. az 1. lábjegyzetet a 436. o.-on) $H(W_\varepsilon)=+\infty$, ha $\varepsilon<0$. Itt, ha $I(\xi,\tilde{\xi})<\infty$, a VI. feltétel nem fog teljesülni. Mindazonáltal világos, hogy — általában véve — nem lehet elérni azt, hogy a bemeneti közleményben ne adódhassanak elő — bár kis valószínűséggel — (jel)eltűnések és ezért a tekintett esetben nem érhető el magának a W feltételnek a teljesülése sem. Analóg a helyzet a VII. feltétellel. Végül megjegyezzük, hogy bizonyos speciális esetekben, melyekben nem teljesül eredetileg a VI. (ill. VII.) feltétel, hasznosnak mutatkozik a $\varrho_k^t(x,\tilde{x})$ (illetve $\pi_k^t(y,\tilde{y})$) függvényt a $\beta_k^t\varrho_k^t(x,\tilde{x})$ (illetve $\bar{\beta}_k^t\pi_k^t(y,\tilde{y})$) függvénnyel helyettesíteni, ahol β_k^t (és analóg módon $\bar{\beta}_k^t$) — alkalmasan megválasztott konstansok —, és oly megfelelő átalakításokat végezni a W^t (és analóg módon a V^t) halmazon, hogy annak eredményeként a $\{W^t\}$ feltétel (és analóg módon a $\{V^t\}$) változatlan maradjon. Ha a β_k^t (illetve $\bar{\beta}_k^t$) konstansok t növekedtével ugyancsak növekszenek, akkor egy ilyen említett helyettesítés eredményeként a VI. (illetve VII.) feltétel már teljesülhet. Itt persze gondoskodni kell arról, hogy egy ilyen változó-megváltoztatás eredményeként továbbra is érvényben maradjon az 1. tétel IV. (illetve V.) feltétele.

Most megfogalmazunk egy tételt, amely azt mondja ki, hogy bizonyos kiegészítő korlátozások mellett elhagyható az 1. és 2. tételek megfogalmazásában szereplő azon kitétel, hogy a közlemény csupán ε pontossággal vihető át egy távközlési csatorna segítségével.

3. TÉTEL. A) *Tegyük fel, hogy az 1. tétel I—V. feltételein kívül még a következő feltételek is teljesülnek:*

VIII. *Léteznek oly* $(\xi^t,\tilde{\xi}^t)$ *és* $(\eta^t,\tilde{\eta}^t)$ *változó-pár sorozatok, melyek a IV. és V. feltételekben felsorolt tulajdonságokon kívül még a következő a), b), c) és d) tulajdonságokkal is rendelkeznek:*

a) *Valamilyen* $\hat{b}>0$ *és*

$$\hat{c}^t=\max_{k=1,\dots,M^t}\int_{X^t}\int_{\tilde{X}^t}|\varrho_k^t(x,\tilde{x})-M\varrho_k^t(\xi,\tilde{\xi})|^{1+\hat{b}}p_\xi^t x p_{\tilde{\xi}}^t(dx,d\tilde{x}) \tag{1.7.23}$$

mellett tetszőleges $a>0$*-ra*

$$\lim_{t\to\infty}\hat{c}^t 2^{-aH^t(W)}=0. \tag{1.7.24}$$

b) *Tetszőleges* $\varepsilon>0$, *tetszőleges* $a>0$, *és tetszőleges* $\delta>0$ *esetén az* (1.7.11) *egyenlőséggel definiált* c^t *konstansra fennáll*[1]:

$$\lim_{t\to\infty}(c^t)^a p^t_{\xi\tilde{\xi}}\left(\left|\frac{i_{\xi\tilde{\xi}}(x,\tilde{x})}{I(\xi,\tilde{\xi})}-1\right|>\delta\right)=0. \tag{1.7.25}$$

c) *Létezik olyan* $\tilde{x}^t_+$ *pont, hogy ha*

$$v^t=\max_{k=1,\dots,M^t}\int_{X^t}|\varrho^t_k(x,\tilde{x}_+)-M\varrho^t_k(\xi,\tilde{\xi})|^{1+\hat{b}}p^t_\xi(dx), \tag{1.7.26}$$

tetszőleges $\delta>0$, $a>0$*-ra*[2]

$$\lim_{t\to\infty}\left[2^{-aH^t(W)}+p^t_{\xi\tilde{\xi}}\left(\left|\frac{i_{\xi\tilde{\xi}}(x,\tilde{x})}{I(\xi,\tilde{\xi})}-1\right|>\delta\right)+\right. \tag{1.7.27}$$

$$\left.+p^t_{\eta\tilde{\eta}}\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y,\tilde{y})}{I(\eta,\tilde{\eta})}-1\right|>\delta\right)\right](v^t)^a=0.$$

A c) *feltétel nyilván teljesül*,[3] *ha teljesül az* a) *feltétel, és ha tetszőleges* $a>0$ *és* $\delta>0$*-ra*

$$\lim_{t\to\infty}[(\hat{c}^t)^a+(M^t)^a]\left[p^t_{\xi\tilde{\xi}}\left(\left|\frac{i_{\xi\tilde{\xi}}(x,\tilde{x})}{I(\xi,\tilde{\xi})}-1\right|>\delta\right)+p^t_{\eta\tilde{\eta}}\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y,\tilde{y})}{I(\eta,\tilde{\eta})}-1\right|>\delta\right)\right]=0. \tag{1.7.28}$$

d) *Tetszőleges* $\delta>0$*-ra léteznek olyan* $B^t_\delta\in S^t_X\times S^t_{\tilde{X}}$ *halmazsorozatok és* J^t_δ *konstansok, hogy*

1) $(x^t,\tilde{x}^t)\in B^t_\delta$ *mellett és minden* $k=1,\dots,M^t$*-re*

$$|\varrho^t_k(x,\tilde{x})-M\varrho^t_k(\xi,\tilde{\xi})|\leqq J^t_\delta, \tag{1.7.29}$$

2) *fennáll a következő limes-reláció:*

$$\lim_{t\to\infty}J^t_\delta\left[p^t_{\eta\tilde{\eta}}\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y,\tilde{y})}{I(\eta,\tilde{\eta})}-1\right|>\delta\right)+2^{-\delta H^t(W)}\right]=0, \tag{1.7.30}$$

3) *tetszőleges* $a>0$*-ra*

$$\lim_{t\to\infty}[1-p^t_{\xi\tilde{\xi}}(B_\delta)][(c^t)^a+(M^t)^a+(v^t)^a+1]=0. \tag{1.7.31}$$

A d) *feltétel nyilván teljesül*[4], *ha tetszőleges* $a>0$*-ra*[5]

$$\lim_{t\to\infty}[(c^t)^a+(M^t)^a]p^t_{\eta\tilde{\eta}}\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y,\tilde{y})}{I(\eta,\tilde{\eta})}-1\right|>\delta\right)=0. \tag{1.7.32}$$

[1] Ha az információ-sűrűségek valamelyike nem létezik, a megfelelő kifejezést 0-val egyenlőnek vesszük.
[2] L. a megelőző lábjegyzetet.
[3] E tények bizonyítását l. az 5.5. pontban.
[4] E tények bizonyítását l. az 5.5. pontban.
[5] L. az [1] lábjegyzetet a 440. oldalon.

Akkor tetszőleges $\varepsilon>0$-ra létezik oly nagy T, hogy minden $t \geqq T$-re a $\{W_\varepsilon^t\}$ közlemény átvihető a $\{Q^t, V_\varepsilon^t\}$ átviteli berendezés segítségével[1].

B) *Tegyük fel, hogy az 1. tétel I—III. feltételei, valamint a 2. tétel IV.', V'., VI., VII. feltételei teljesülnek. Tegyük fel továbbá, hogy teljesül a következő feltétel.*

VIII'. *Létezik oly kis δ, hogy tetszőleges $\varepsilon \leqq \delta$-ra a VIII. feltétel teljesül, ha benne a $\{W^t\}$ közleményt $\{W_{-\varepsilon}^t\}$-nal és a $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezést a $\{Q^t, V_{-\varepsilon}^t\}$ átviteli berendezéssel helyettesítjük.*

Akkor létezik oly nagy T, hogy minden $t \geqq T$-re a $\{W^t\}$ közlemény átvihető a $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezés segítségével.

Nézzük meg a most megfogalmazott tételben szereplő VIII. feltétel szemléletes jelentését. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy hasonló rendeltetésű kiegészítő feltétel szükségessége amiatt merül fel, hogy ha a $\varrho_k^t(x, \tilde{x})$ függvények nem korlátosak, akkor — bár a ξ^t és $\tilde{\xi}^t$ változók, amelyek az ε pontosságú átvitel definíciójában szerepelnek, csak ezen kis ε valószínűséggel különböznek, — az $M\varrho_k^t(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ és $M\varrho_k^t(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ várható értékek még igen erősen eltérhetnek egymástól. A VIII. a), VIII. b), VIII. c), valamint a VIII. d) feltételek úgy tekinthetők, mint a ϱ_k^t függvények egyenletes korlátossága követelményeinek bizonyos enyhített alakjai. Ezek mind nyilvánvalóan teljesülnek, ha teljesültek az (1.7.16) egyenletes korlátossági feltételek.

Másrészt abban az esetben is, amidőn a függvények nem korlátosak, teljesül általában a VIII. feltétel. Ugyanis az információ-stabilis átviteli berendezések és közleményekre reális határok közt megadható példák javarészében tetszőleges $\delta>0$-ra létezik olyan $a>0$, hogy

$$\lim_{t\to\infty} p_{\eta\tilde{\eta}}^t\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y,\tilde{y})}{I(\eta,\tilde{\eta})}-1\right|>\delta\right)2^{aC^t(Q,V)}=0, \tag{1.7.33}$$

és

$$\lim_{t\to\infty} p_{\xi\tilde{\xi}}^t\left(\left|\frac{i_{\xi\tilde{\xi}}(x,\tilde{x})}{I(\xi,\tilde{\xi})}-1\right|>\delta\right)2^{aH^t(W)}=0. \tag{1.7.34}$$

Például memória nélküli átviteli berendezések és független komponensű közlemények esetére az (1.7.33), (1.7.34) állítások — mint azt a 6. §-ban látni fogjuk — megkaphatók, mint független valószínűségi változók összegei nagy ingadozásainak valószínűségeire vonatkozó jól ismert becslések következményei (vö. [1] III. rész, 2. fej.). Mindazonáltal, ha az (1.7.33) és (1.7.34) feltételek

[1] Ez az állítás kiegészíti a 2. tétel C) állítását, amely tétel A) és B) állításainak analóg módon megfogalmazott kiegészítései szintén igazak.

teljesülnek, akkor a tétel (1. 7. 5) és (1. 7. 12) feltételeiből következik, hogy teljesülni fognak VIII. b), VIII. c), VIII. d) feltételeink is (a VIII. c) feltételt az (1. 7. 28) alakban kell venni, a VIII. d) feltételt pedig az (1. 7. 32) alakban).

A VIII. d) feltétel (1. 7. 32) alakjának és a VIII. b) feltételnek a szemléletes jelentése az, hogy $t \to \infty$ esetén a $\varrho_k^t(x, \tilde{x})$ függvényt átlagban korlátozó c^t konstans és az M^t szám növekedése nem lehet nagyon gyors az információ-stabilitás beállásának sebességéhez viszonyítva (a VIII. d) feltétel általános megfogalmazása szükséges, mert az $M^t \to \infty$ esetben, és egyenletesen korlátos $\varrho_k^t(x, \tilde{x})$ függvények mellett az (1. 7. 32) feltétel esetleg nem teljesül).

A VIII. a) feltétel részletesebb kommentárokat kíván. Az összes többi feltételektől abban különbözik ez lényegesen, hogy ennél $\varrho_k^t(x, \tilde{x})$-nak nem a $p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x})$ mérték szerinti, hanem a $p_\xi^t \times p_{\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x})$ mérték szerinti várható értékeit vizsgáljuk. Hogy rávilágítsunk arra, miért szükséges hasonló típusú feltétel, tekintsünk egy egyszerű közleménypéldát. Nevezetesen tegyük fel, hogy az X^t és $\tilde{X}^t$ terek végesek és azonosak egymással, és hogy adva van az egyetlen

$$\varrho_1^t(x, \tilde{x}) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = \tilde{x}, \\ D^t, & \text{ha } x \neq \tilde{x} \end{cases}$$

függvény, ahol a konstans $D^t \to \infty$, a W feltétel pedig abból áll, hogy $M\varrho_1^t(\xi, \tilde{\xi}) = 0$. Az átvitelkor fellépő hibák is arra redukálódnak, hogy — bár kis valószínűséggel — $\xi^t \neq \tilde{\xi}^t$, ahol $\tilde{\xi}^t$ a kimeneti közlemény. De ha $D^t \to \infty$ elég gyorsan, akkor $M\varrho^t(\xi, \tilde{\xi})$ nem lesz közel zérushoz. Másrészről $\varrho_1^t(x, \tilde{x}) = 0$ a $p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x})$ mérték szerint és ezért itt teljesülni fognak az összes korlátozások, a VIII. a) feltételen kívül, amely általában véve nem fog teljesülni, minthogy $\hat{c}^t \approx (D^t)^{1+\hat{b}}$, ha nagyszámú pont van az X halmazban. A VIII. c) feltétel szemléletes jelentése közel áll a VIII. a) feltétel szemléletes jelentéséhez.

Befejezésül megmutatjuk, hogy a helyzet lényegesen egyszerűsödik, ha feltesszük, hogy a $\varrho_k^t(x, \tilde{x})$, $\pi_k^t(x, \tilde{x})$ függvények, valamint ezen függvények M^t, ill. N^t mennyiségei egyenletesen korlátosak. Minthogy ez a speciális eset mutatkozik a legfontosabbnak, kimondjuk a következő tételt, amely a 3. tétel következménye:

4. TÉTEL. *Legyenek adva a $\{W^t\}$ közlemények és a $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezések olyan információ-stabilis sorozatai, melyekre fennáll:*

(1. 7. 3′) 1) $$\lim_{t \to \infty} H^t(W) = \infty,$$

(1. 7. 4′) 2) $$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{H^t(W)}{C^t(Q, V)} < 1.$$

Tegyük fel továbbá, hogy bizonyos $\bar{M}$, $\bar{N}$, C konstansokra és minden k és t-re fennáll:

$$(1.7.35) \qquad M^t \leqq \bar{M}, \quad N^t \leqq \bar{N}, \quad |\varrho_k^t(x, \tilde{x})| \leqq C, \quad |\pi_k^t(y, \tilde{y})| \leqq C.$$

Akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra létezik oly nagy T, hogy minden $t \geqq T$-re a $\{W_\varepsilon^t\}$ közlemény átvihető a $\{Q^t, V_\varepsilon^t\}$ átviteli berendezések segítségével.

1.8. Közleményforrás és távközlési csatorna.

Korábbi szerzők munkáiban a közlemény és az átviteli berendezés általunk használt fogalmai helyett a közleményforrás, ill. a távközlési csatorna fogalma szerepel. A különbség durván szólva abban áll, hogy a jelen cikkben bevezetett tárgyalásmód olyan információ tényleges átvitelét juttatja kifejezésre, amely mindig bizonyos korlátos — bár esetleg igen nagy — időszakasz folyamán halad át. A közleményforrás és a távközlési csatorna fentebb említett fogalmai azon alapulnak, hogy az információ tartós átvitelét idealizálva, azt végtelen időtartamon keresztül folyó átvitelként tekintik. Mindkét tárgyalásmód lényegében egy és ugyanazon reális szituáció egy matematikai modellje, s ezért egyformán jogos. A jelen munkában követett tárgyalásmód előnye az, hogy a tételek megfogalmazása, valamint a bizonyítások igen egyszerűek; ugyanakkor az a tárgyalásmód, amely az átvitel végtelen tartamára épít, sokkal alkalmasabb olyan reális jelentéssel bíró fogalmak bevezetésére, mint az információ létesülésének sebessége, időegység alatti átlagos (csatorna) kapacitás, a kódolással kapcsolatos késleltetés időbeli stacionárius jellege, é. í. t. (ezeket a fogalmakat a véges modell alapján is be lehet vezetni, csak kissé kevésbé kézenfekvő módon). Shannon tétele közleményforrás és távközlési csatorna esetére levezethető a Shannon-féle tételnek közlemények és átviteli berendezések esetére szóló alakjából, viszonylag nem nehéz kiegészítő meggondolások segítségével. Ennek a részletes tárgyalását azonban más munkában adjuk majd meg. Itt összehasonlítás céljára csak az alapvető fogalmak megfogalmazását közöljük, abban az általános alakban, amelyet a jelen munka egész stílusa diktál.

Nevezetesen azt fogjuk mondani, hogy adva van a $\mathfrak{W}$ *közleményforrás*, ha a valós tengely minden $\Delta = (s, t]$ intervallumához hozzá van rendelve a bemeneti és kimeneti közlemények (X^Δ, S_X^Δ); $(\tilde{X}^\Delta, S_{\tilde{X}}^\Delta)$ tereivel és a ξ^Δ és $\tilde{\xi}^\Delta$ közlemények együttes eloszlására tett W^Δ korlátozásokkal megadott $\{W^\Delta\}$ közlemény. Emellett teljesülnie kell a következő megegyezési feltételeknek: ha $\Delta_1 = (s, t]$, $\Delta_2 = (t, u]$ és $\Delta = (s, u)$, akkor

1°. Az (X^Δ, S_X^Δ) és $(\tilde{X}^\Delta, S_{\tilde{X}}^\Delta)$ tereknek egybe kell esniök az $(X^{\Delta_1} \times X^{\Delta_2}, S_X^{\Delta_1} \times S_X^{\Delta_2})$, $(\tilde{X}^{\Delta_1} \times \tilde{X}^{\Delta_2}, S_{\tilde{X}}^{\Delta_1} \times S_{\tilde{X}}^{\Delta_2})$ szorzat-terekkel.

2°. A $\{W^{\Delta}\}$ közlemény P_{ξ} eloszlása a bemeneten olyan, hogy ha $\xi=(\xi^1,\xi^2)$, ahol ξ^1 és ξ^2 értékeiket az $(X^{\Delta_1}, S_X^{\Delta_1})$, illetve $(X^{\Delta_2}, S_X^{\Delta_2})$-ből veszik, akkor ξ^1 a $\{W^{\Delta_1}\}$ közlemény eloszlásával fog bírni a bemeneten, a ξ^2 pedig a $\{W^{\Delta_2}\}$ közlemény eloszlásával a kimeneten.

3° W^{Δ} reprodukálás pontossági feltételnek azok és csak azok a $\xi=(\xi^1,\xi^2)$, $\tilde{\xi}=(\tilde{\xi}^1,\tilde{\xi}^2)$ változó-párok tesznek eleget, amelyekre ξ a bemeneti közlemény adott P_{ξ} eloszlásával rendelkezik, a (ξ^1,ξ^2), $(\tilde{\xi}^1,\tilde{\xi}^2)$ párok pedig eleget tesznek a W^{Δ_1}, illetve W^{Δ_2} pontossági feltételeknek.

Azt fogjuk mondani, hogy $\Xi=\{\xi_{st}, -\infty<s<t<\infty\}$ és $\tilde{\Xi}=\{\tilde{\xi}_{st}, -\infty<s<t<\infty\}$ valószínűségi változó-rendszerek eleget tesznek a $\mathfrak{W}$ közleményforrás reprodukálása pontossága feltételeinek, ha 1) $s<t<u$ esetén $\xi_{su}=(\xi_{st},\xi_{tu})$, $\tilde{\xi}_{su}=(\tilde{\xi}_{st},\tilde{\xi}_{tu})$ és 2) tetszőleges $s<t$-re a $(\xi_{st},\tilde{\xi}_{st})$ pár eleget tesz a $W_{(s,t]}$ közlemények reprodukálása pontossága feltételeinek.

A közlemény létesülésének sebességén a következő számot fogjuk érteni:

$$H(\mathfrak{W})=\lim_{t-s\to\infty}\frac{1}{t-s}H(W_{(s,t]}), \tag{1.8.1}$$

amennyiben ez a határérték létezik. Egy kissé bonyolultabb a $\mathfrak{Q}$ *távközlési csatorna* fogalma. Mindenekelőtt tegyük fel, hogy minden $t\in(-\infty,\infty)$-nek megfeleltettük a csatorna t időpontbeli állapotainak (F^t, S_F^t) mérhető terét. Tegyük fel továbbá, hogy minden $\Delta=(s,t]$ intervallumnak megfeleltetjük a csatorna bemeneti és kimeneti állapotainak $(Y^{\Delta}, S_Y^{\Delta})$, $(\tilde{Y}^{\Delta}, S_{\tilde{Y}}^{\Delta})$ tereit (a Δ intervallumon). Továbbá minden Δ intervallumnak megfeleltetünk egy V_{Δ} korlátozást, amelyet az $(Y^{\Delta}, S_Y^{\Delta})$, illetve $(\tilde{Y}^{\Delta}, S_{\tilde{Y}}^{\Delta})$-ba tartozó értékekkel bíró $(\eta^{\Delta},\tilde{\eta}^{\Delta})$ változók együttes eloszlására tettünk. Végül minden $\Delta=(s,t]$-nek feleltessünk meg egy olyan $Q^{\Delta}(f^s, y^{\Delta}, \tilde{A}^{\Delta})$ átmenet-függvényt — ahol $y^{\Delta}\in Y^{\Delta}$, $f^s\in F^s$, — hogy rögzített $\tilde{A}^{\Delta}$ mellett az mérhető legyen az (f^s, y^s) változó-pár szerint, rögzített f^s, y^{Δ} mellett pedig legyen mérték $S_{\tilde{Y}}^{\Delta}$-n. Ha $\mathfrak{S}^s$-valószínűség-eloszlás az (F^s, S_F^s) téren, akkor kézenfekvő módon a $(Q_{\mathfrak{S}^s}^{\Delta}, V^{\Delta})$ átviteli berendezést a következő függvény segítségével határozzuk meg:

$$Q_{\mathfrak{S}^s}^{\Delta}(y^{\Delta},\tilde{A}^{\Delta})=\int_{F^s}Q^{\Delta}(f^s,y^{\Delta},\tilde{A}^{\Delta})\mathfrak{S}^s(df). \tag{1.8.2}$$

Továbbá, adva vannak a csatorna állapotaira vonatkozó olyan

$$R^{\Delta}(f^s, y^{\Delta}, B^t),\ f^s\in F^s,\ y^{\Delta}\in Y^{\Delta},\ B^t\in S_F^t$$

átmenet-függvények, hogy ezek rögzített B^t mellett a változó-pár mérhető függvényei, rögzített (f^s, y^{Δ}) mellett pedig mértékek az S_F^t téren.

Az előbb bevezetett objektumok $\Delta_1=(s,t]$, $\Delta_2=(t,u]$, $\Delta=(s,u]$ esetén tegyenek eleget a következő megegyezési feltételeknek:

1°. Az (Y^s, S_Y^Δ), illetve $(\tilde{Y}_\Delta, S_{\tilde{Y}}^\Delta)$ terek essenek egybe az $(Y^{\Delta_1}\times Y^{\Delta_2}$, $S_Y^{\Delta_1}\times S_Y^{\Delta_2})$, illetve $(\tilde{Y}^{\Delta_1}\times\tilde{Y}^{\Delta_2}$, $S_{\tilde{Y}}^{\Delta_1}\times S_{\tilde{Y}}^{\Delta_2})$ szorzat-terekkel.

2°. Tetszőleges rögzített $f^s\in F^s$, $y^{\Delta_1}\in Y^{\Delta_1}$, $y^{\Delta_2}\in Y^{\Delta_2}$, $y^\Delta=(y^{\Delta_1}, y^{\Delta_2})$, $\tilde{A}^\Delta=\tilde{A}^{\Delta_1}\times\tilde{A}^{\Delta_2}$, $\tilde{A}^{\Delta_i}\in S_{\tilde{Y}}^{\Delta_i}$-re

$$Q^\Delta(f^s, y^\Delta, \tilde{A}^\Delta)=\int_{F^t} Q^{\Delta_1}(f^s, y^{\Delta_1}, \tilde{A}^{\Delta_1})Q^{\Delta_2}(f^t, y^{\Delta_2}, \tilde{A}^{\Delta_2})R^{\Delta_1}(f^s, y^{\Delta_1}, df^t). \tag{1.8.3}$$

3°. Tetszőleges rögzített $f^s\in F^s$, $B''\in S_F^u$, $y^\Delta=(y^{\Delta_1}, y^{\Delta_2})$-re

$$R^\Delta(f^s, y^\Delta, B'')=\int_{F^t} R^{\Delta_2}(f^t, y^{\Delta_2}, B'')R^{\Delta_1}(f^s, y^{\Delta_1}, df^t). \tag{1.8.4}$$

Szemléletes szempontból nézve, (1.8.4)-et megvilágíthatjuk azzal, hogy azt mondjuk: adott bemeneti jel mellett a csatorna állapotai Markov-folyamatot képeznek, (1.8.3) pedig azt jelenti, hogy a kimeneti jel a csatorna adott állapota mellett valamilyen időpontban nem függ az ezen időpontig szerepelt bemeneti jelektől.

A bevezetett definíció nemcsak azon nemrég megjelent [31] munka gondolatait foglalja magában, amelyben analóg definíciót adtak meg a diszkrét esetre, hanem egy csatorna Feinstein—Hincsin-féle meghatározását is (l. [23], [26]). Ez utóbbi esetben a csatorna állapotaiként a bemenetén és kimenetén levő jeleket kell venni, bizonyos időszakra, amelyet a csatorna memóriájának tartama ad meg,

Azt fogjuk mondani, hogy a

$$H=\{\eta_{st}, -\infty<s<t<\infty\},\qquad \tilde{H}=\{\tilde{\eta}_{st}, -\infty<s<t<\infty\}$$

valószínűségi változó-rendszereket a Ω csatorna kapcsolja össze, ha megadhatók olyan $\{\varphi^t, -\infty<t<\infty\}$ valószínűségi változók, hogy — tetszőleges t-re bevezetve a $H_-^t=\{\eta_{su}, u\leq t\}$, $\tilde{H}_-^t=\{\tilde{\eta}_{su}, u\leq t\}$, $H_+^t=\{\eta_{su}, s>t\}$, $\tilde{H}_+^t=\{\tilde{\eta}_{su}, s>t\}$, $\Phi_-^t=\{\varphi_u, u<t\}$ jelöléseket, a következőket kapjuk:

1°. Tetszőleges $s<t<u$-ra $\eta_{su}=(\eta_{st}, \eta_{tu})$, $\tilde{\eta}_{su}=(\tilde{\eta}_{st}, \eta_{tu})$.

2°. Tetszőleges $\Delta=(s, t]$ és $\tilde{A}\in S_Y^\Delta$ mellett a következő feltételes valószínűségre 1 valószínűséggel fennáll:

$$P\{\tilde{\eta}_{st}\in\tilde{A}\,|\,\eta_{st}, \varphi_s, H_-^s, \tilde{H}_-^s, \Phi_-^s\}=Q^\Delta(\varphi_s, \eta_{st}, \tilde{A}). \tag{1.8.5}$$

3°. Tetszőleges $\Delta=(s, t]$, $B\in S_F^t$ mellett a következő feltételes valószínűségre fennáll:

$$P\{\varphi_t\in B\,|\,\eta_{st}, \varphi_s, H_-^s, \tilde{H}_-^s, \Phi_-^s\}=R^\Delta(\varphi_s, \eta_{st}, B). \tag{1.8.6}$$

4°. Az $\eta_{st}, \tilde{\eta}_{st}$ pár eleget tesz a $V_{(s,t]}$ korlátozásnak.

A $\mathfrak{Q}$ távközlési csatorna *időegységre vonatkozó átlagos kapacitásának* a következő mennyiséget nevezzük:

$$C(\mathfrak{Q}) = \lim_{t-s\to\infty} \frac{1}{t-s} \sup_{\mathfrak{S}^s} C(Q^{\Delta}_{\mathfrak{S}^s}, V^{\Delta}),$$

amennyiben ez a határérték létezik. Azt fogjuk mondani, hogy a $\mathfrak{W}$ *közleményforrás $T>0$-t meg nem haladó késleltetéssel átvihető a $\mathfrak{Q}$ távközlési csatornán*, ha létezik a $H, \tilde{H}, \Xi, \tilde{\Xi}$ változók olyan megválasztása, hogy:

1°. A $\Xi, \tilde{\Xi}$ mennyiségek eleget tesznek a $\mathfrak{W}$ közleményforrás reprodukálása pontossága feltételeinek.

2°. A $H, \tilde{H}$ mennyiségeket a $\mathfrak{Q}$ csatorna kapcsolja össze; ha bevezetjük a következő változókat:

$$\Xi^t_- = \{\xi_\Delta, \Delta\subset(-\infty, t]\}, \qquad \Xi^t_+ = \{\xi_\Delta, \Delta\subset(t, \infty)\},$$

$$H^t_- = \{\eta_\Delta, \Delta\subset(-\infty, t]\}, \qquad H^t_+ = \{\eta_\Delta, \Delta\subset(t, \infty)\},$$

és analóg módon $\tilde{\Xi}^t_-$, $\tilde{\Xi}^t_+$, $\tilde{H}^t_-$, $\tilde{H}^t_+$-t, akkor

3°. Tetszőleges t mellett a Ξ^t_+, Ξ^t_-, H^t_- változók Markóv-láncot képeznek (ez a feltétel azt fejezi ki, hogy a kódolás műveletében nincs megelőzés).

4°. Tetszőleges t mellett a (Ξ, H^t_+), H^t_-, $\tilde{H}^t_-$ változók Markov-láncot alkotnak (ez a feltétel azt jelenti, hogy a csatornán keresztül folyó átvitelben nincs megelőzés, valamint azt, hogy a kimeneti jel csupán a bemeneti jeltől függ, nem pedig a bemeneti közleménytől).

5°. Tetszőleges t mellett a következő három változó $(\Xi, H, \tilde{H}^{t+T}_+)$, H^{t+T}_-, $\tilde{\Xi}^t_-$ Markov-láncot képez (ez a feltétel azt jelenti, hogy a kimeneti közlemény kimeneti jel szerint folyó reprodukálásának a késése nem lépi túl T-t, és hogy a kimeneti közlemény adott kimeneti jelnél nem függ a bemeneti jelektől és közleménytől).

SHANNON tételének az a tartalma, hogy ha $H(\mathfrak{W}) < C(\mathfrak{Q})$, akkor a $\mathfrak{W}$ közleményforrás átvihető a $\mathfrak{Q}$ csatornán bizonyos késleltetéssel, ha pedig az ellenkező egyenlőtlenség áll fenn, akkor semmilyen késleltetéssel nem vihető át. Itt persze lehetségesek e megfogalmazás „ε-élesítései", hasonlóan az 1. 7 pont tételeihez. Ezekkel az élesítésekkel itt nem fogunk részletesebben foglalkozni, valamint nem fogjuk vizsgálni azon korlátozásokat sem, melyek mellett ez a tétel igaz.

Fordította: *Medgyessy Pál,*
Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete