TENZORVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLÁSA

Írta: MOLNÁR FERENC*

1. A másodrendű tenzorok tulajdonságainak vizsgálata során a vektoranalízis jól ismert skalár-, ill. vektorváltozós függvényein túlmenően fellépnek újfajta, tenzorváltozós függvények: az $y=f(\mathbf{X})$ *skalár-tenzor* és az $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{X})$ *vektor-tenzor függvény*. Ilyenek például a változó $\mathbf{X}$ másodrendű tenzor skalárinvariánsai, vektorinvariánsa, abszolút értéke. Az alábbiakban a másodrendű és harmadrendű tenzorok tulajdonságaira[1] támaszkodva az említett tenzorváltozós függvények differenciálásának direkt tárgyalásával foglalkozunk.

A tenzorváltozós függvények deriváltjának a skalár- és vektorváltozós függvények deriváltjának mintájára történő értelmezéséhez szükségünk van a homogén lineáris skalár-tenzor és vektor-tenzor függvény fogalmára.

Az $y=f(\mathbf{X})$, ill. $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{X})$ függvényt *homogén lineárisnak* mondjuk, ha

$$f(c_1\mathbf{X}_1+c_2\mathbf{X}_2)=c_1 f(\mathbf{X}_1)+c_2 f(\mathbf{X}_2), \tag{1}$$

ill.

$$\mathbf{f}(c_1\mathbf{X}_1+c_2\mathbf{X}_2)=c_1\mathbf{f}(\mathbf{X}_1)+c_2\mathbf{f}(\mathbf{X}_2), \tag{2}$$

ahol $\mathbf{X}_1$ és $\mathbf{X}_2$ és az $\mathbf{X}$ tenzorváltozó tetszőleges értékei, c_1 és c_2 tetszőleges skalárok.

A fenti definíciókból egyszerűen adódik a következő tétel:

1. TÉTEL. *Az* $y=f(\mathbf{X})$, *ill.* $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{X})$ *függvény akkor és csak akkor homogén lineáris, ha* $y=\mathbf{A}\bullet\mathbf{X}$, *ill.* $\mathbf{y}=\mathcal{A}\bullet\mathbf{X}$, *ahol* $\mathbf{A}$, *ill.* $\mathcal{A}$ *rögzített másodrendű, ill. harmadrendű tenzor.*[2]

BIZONYÍTÁS. Az $\mathbf{A}\bullet\mathbf{X}$ és $\mathcal{A}\bullet\mathbf{X}$ szorzatok $\mathbf{X}$-nek nyilván homogén lineáris függvényei. Ha viszont $y=f(\mathbf{X})$, ill. $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{X})$ homogén lineáris, akkor (1), ill. (2) alapján az $\mathbf{X}$ tenzor $\mathbf{x}_k(x_{ik})$ $(i, k=1, 2, 3)$ vektorkomponenseire és a derékszögű koordinátarendszert meghatározó $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ egységvektorra

$$f(\mathbf{X})=f\left(\sum_{k=1}^{3}\mathbf{x}_k\circ\mathbf{e}_k\right)=\sum_{i,k=1}^{3}x_{ik}f(\mathbf{e}_i\circ\mathbf{e}_k),$$

ill.

$$\mathbf{f}(\mathbf{X})=\mathbf{f}\left(\sum_{k=1}^{3}\mathbf{x}_k\circ\mathbf{e}_k\right)=\sum_{i,k=1}^{3}x_{ik}\mathbf{f}(\mathbf{e}_i\circ\mathbf{e}_k).$$

* A szerző 1962. jan. 18-án 29 éves korában elhunyt. Korai eltávoztával a tudomány reményteljes kutatót vesztett. *Szerkesztőség.*

[1] L. pl. [1].

[2] $\mathbf{A}\bullet\mathbf{X}=s_1(\mathbf{A}^*\mathbf{X})$ az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{X}$ tenzorok *belső* vagy *skaláris szorzata,* $\mathcal{A}\bullet\mathbf{X}=\mathbf{v}_1(\mathcal{A}^*\odot\mathbf{X})$ az $\mathcal{A}$ és $\mathbf{X}$ tenzorok (elsőrendű) *belső szorzata.* L. [1], (1.38), ill. (5.50).

Innen, felhasználva az

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{X} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_{ik}, \quad \text{ill.} \quad \mathcal{A} \bullet \mathbf{X} = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{a}_{ik} x_{ik}$$

formulákat (ahol a_{ik} $(i, k=1, 2, 3)$ az $\mathbf{A}$ másodrendű tenzor skalárkomponensei, $\mathbf{a}_{ik}$ $(i, k=1, 2, 3)$ az $\mathcal{A}$ harmadrendű tenzor vektorkomponensei)[3], kapjuk, hogy az

$$a_{ik} = f(\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_k), \quad \text{ill.} \quad \mathbf{a}_{ik} = \mathbf{f}(\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_k) \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

komponensekkel meghatározott $\mathbf{A}$, ill. $\mathcal{A}$ tenzorral állításunk teljesül.

2. A következőkben — a most bizonyított tételre támaszkodva — a skalár- és vektorváltozós függvények mintájára[4] értelmezzük a tárgyalt tenzorváltozós függvények deriváltját.

Az $y = f(\mathbf{X})$, ill. $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{X})$ függvényt *differenciálhatónak* mondjuk az $\mathbf{X}_0$ helyen, ha — $\Delta\mathbf{X}$-szel jelölve $\mathbf{X}$-nek $\mathbf{X}_0$-ból kiinduló tetszőleges megváltozását — van olyan $\mathbf{D}$ és $\mathbf{E}$ másodrendű, ill. $\mathfrak{D}$ és $\mathfrak{E}$ harmadrendű tenzor, hogy $f(\mathbf{X})$, ill. $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ megfelelő megváltozására

$$\Delta f = \mathbf{D} \bullet \Delta\mathbf{X} + \mathbf{E}(\Delta\mathbf{X}) \bullet \Delta\mathbf{X}, \tag{3}$$

ill.

$$\Delta\mathbf{f} = \mathfrak{D} \bullet \Delta\mathbf{X} + \mathfrak{E}(\Delta\mathbf{X}) \bullet \Delta\mathbf{X}, \tag{4}$$

ahol $\mathbf{E}(\Delta\mathbf{X}) \to \mathbf{O}$, ill. $\mathfrak{E}(\Delta\mathbf{X}) \to \mathcal{O}$, midőn $\Delta\mathbf{X} \to \mathbf{O}$. $\mathbf{D}$, ill. $\mathfrak{D}$ az $y = f(\mathbf{X})$, ill. $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{X})$ függvény *deriváltja*. Jelölés: $\mathbf{D} = \dfrac{df}{d\mathbf{X}} = f'$, ill. $\mathfrak{D} = \dfrac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{X}} = \mathbf{f}'$.

Az így definiált deriváltak *egyértelműsége* könnyen igazolható. Ha ugyanis $\mathbf{D}_1$ és $\mathbf{D}_2$, ill. $\mathfrak{D}_1$ és $\mathfrak{D}_2$ kielégítik a (3), ill. (4) alatti összefüggéseket, akkor $\Delta\mathbf{X} = \Delta x(\mathbf{e} \circ \mathbf{f})$ választása esetén (ahol $\mathbf{e}$ és $\mathbf{f}$ tetszőleges egységvektorok) a tetszőleges $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra fennálló[5]

$$\mathbf{A} \bullet (\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = (\mathbf{A}\mathbf{b})\mathbf{a}, \tag{5}$$

ill.

$$\mathcal{A} \bullet (\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = (\mathcal{A}\mathbf{b})\mathbf{a} \tag{6}$$

összefüggés alapján kapjuk, hogy

$$[(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)\mathbf{f}]\mathbf{e} = 0, \quad \text{ill.} \quad [(\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2)\mathbf{f}]\mathbf{e} = \mathbf{0},$$

[3] L. [1], (1.40), ill. (5.51).

[4] Vö. [2], 49; [3], 110, 212, 431 és 552.

[5] (5) igazolása:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = s_1 [\mathbf{A}^* (\mathbf{a} \circ \mathbf{b})] = s_1 (\mathbf{A}^* \mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = (\mathbf{A}^* \mathbf{a})\mathbf{b} = (\mathbf{A}\mathbf{b})\mathbf{a}$$

([1], (1.3) és (1.33) felhasználásával).

(6) igazolása:

$$\mathcal{A} \cdot (\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = \mathbf{v}_1 [\mathcal{A}^* \odot (\mathbf{a} \circ \mathbf{b})] = \mathbf{v}_1 (\mathcal{A}^* \mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = (\mathcal{A}^* \mathbf{a})\mathbf{b} = (\mathcal{A}\mathbf{b})\mathbf{a}$$

(az [1], (2.3) alapján könnyen igazolható $\mathcal{A} \odot (\mathbf{u} \circ \mathbf{v}) = \mathcal{A}\mathbf{u} \circ \mathbf{v}$ összefüggés, továbbá [1], (5.44) és (4.1) felhasználásával).

ahonnan már következik, hogy

$$\mathbf{D}_1=\mathbf{D}_2, \quad \text{ill.} \quad \mathfrak{D}_1=\mathfrak{D}_2.$$

A vektorváltozós függvények iránymenti deriváltjának fogalma a következőképpen általánosítható tenzorváltozós függvényekre:

Ha $\mathbf{X}=\mathbf{x}\circ\mathbf{e}$, ahol $\mathbf{e}$ rögzített egységvektor, akkor $y=f(\mathbf{X})$ és $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{X})$ az $\mathbf{x}$ vektorváltozó függvényeinek tekinthetők. Az így kapott $y=f(\mathbf{x})$ és $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ függvények deriváltjait az eredeti tenzorváltozós függvények $\mathbf{e}$ irányú *iránymenti deriváltjainak* nevezzük.

A deriváltak (3), ill. (4) alatti definíciójából $\Delta\mathbf{X}=\Delta\mathbf{x}\circ\mathbf{e}$ helyettesítéssel és (5), ill. (6) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\Delta f=(\mathbf{De})\Delta\mathbf{x}+(\mathbf{Ee})\Delta\mathbf{x},$$

ill.

$$\Delta\mathbf{f}=(\mathfrak{D}\mathbf{e})\Delta\mathbf{x}+(\mathfrak{E}\mathbf{e})\Delta\mathbf{x},$$

ahol $\mathbf{Ee}\to\mathbf{0}$, ill. $\mathfrak{E}\mathbf{e}\to\mathbf{O}$, midőn $\Delta\mathbf{x}\to\mathbf{0}$. Innen az iránymenti deriváltak:

(7) $$\frac{df}{d\mathbf{x}}=\mathbf{De}, \quad \text{ill.} \quad \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}=\mathfrak{D}\mathbf{e}.$$

(7) alapján a $\mathbf{D}$, ill. $\mathfrak{D}$ derivált komponensei:

(8) $$\mathbf{d}_k=\mathbf{De}_k=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_k}, \quad d_{jk}=\mathbf{e}_j\mathbf{De}_k=\frac{\partial f}{\partial x_{jk}},$$

ill.

(9) $$\mathbf{D}_k=\mathfrak{D}\mathbf{e}_k=\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_k}, \quad \mathbf{d}_{jk}=(\mathfrak{D}\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_j=\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_{jk}}, \quad d_{ijk}=\mathbf{e}_i(\mathfrak{D}\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_j=\frac{\partial f_i}{\partial x_{jk}}.$$

Bevezetve a $\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x_{jk}}\right)$ szimbolikus másodrendű *nabla tenzort*, (8), ill. (9) felhasználásával egyszerűen következik, hogy

$$\mathbf{D}=\nabla f, \quad \text{ill.} \quad \mathfrak{D}=\mathbf{f}\circ\nabla.$$ [6]

3. A deriváltak definíciója alapján egyszerűen bizonyíthatók a következő *differenciálási szabályok:*

(10) $$(u+v)'=u'+v', \qquad (\mathbf{u}+\mathbf{v})'=\mathbf{u}'+\mathbf{v}',$$

(11) $$(uv)'=uv'+vu',$$

(12) $$(u\mathbf{v})'=u\mathbf{v}'+\mathbf{v}\circ u',$$

(13) $$(\mathbf{uv})'=\mathbf{uv}'+\mathbf{vu}',$$

(14) $$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})'=\mathbf{u}\times\mathbf{v}'-\mathbf{v}\times\mathbf{u}',$$

[6] Ui. $[(\mathbf{f}\circ\nabla)\mathbf{e}_k]\mathbf{e}_j=(\mathbf{f}\circ\nabla\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_j=\mathbf{f}(\mathbf{e}_j\nabla\mathbf{e}_k)=\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_{jk}}=\mathbf{d}_{jk}$ $(j, k=1, 2, 3)$ (v.ö. [1], (2. 2.))

ahol $u(\mathbf{X})$, $v(\mathbf{X})$, $\mathbf{u}(\mathbf{X})$, $\mathbf{v}(\mathbf{X})$ differenciálható függvények.[7] Továbbá, ha $f(\mathbf{X})$, $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ és $\mathbf{X}(t)$ differenciálhatók, akkor $f(\mathbf{X}(t))$ és $\mathbf{f}(\mathbf{X}(t))$ is differenciálhatók és

$$\frac{df}{dt}=\frac{df}{d\mathbf{X}}\bullet\frac{d\mathbf{X}}{dt}, \quad \frac{d\mathbf{f}}{dt}=\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{X}}\bullet\frac{d\mathbf{X}}{dt}. \tag{15}$$

4. Az $y=f(\mathbf{X})$ függvény differenciálhatóságából nyilvánvalóan következik az $\mathbf{x}_k$ $(k=1,2,3)$ vektorkomponensek és az x_{jk} $(j,k=1,2,3)$ skalárkomponensek szerinti parciális differenciálhatósága. A differenciálhatóságra vonatkozólag elegendő feltételt ad a következő tétel:

2. TÉTEL. *Ha az $y=f(\mathbf{X})$ függvény parciálisan differenciálható az $\mathbf{X}$ tenzor $\mathbf{x}_k$, ill. x_{jk} $(j,k=1,2,3)$ komponensei szerint, és ezek a parciális deriváltak az $\mathbf{X}_0$ helyen folytonosak, akkor $y=f(\mathbf{X})$ is differenciálható az $\mathbf{X}_0$ helyen és deriváltja a $\mathbf{d}_k=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_k}$, ill. $d_{jk}=\frac{\partial f}{\partial x_{jk}}$ komponensekkel meghatározott $\mathbf{D}$ tenzor.*

BIZONYÍTÁS. Felbontva az $y=f(\mathbf{X})$ függvény Δf megváltozását az $\mathbf{x}_k\circ\mathbf{e}_k$, ill. $x_{jk}(\mathbf{e}_j\circ\mathbf{e}_k)$ $(j,k=1,2,3)$ „irányú" megváltozások összegére és felhasználva a skalár-vektor, ill. skalár-skalár függvényekre vonatkozó középértéktételt, továbbá az

$$\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}=\sum_{k=1}^{3}\mathbf{a}_k\mathbf{b}_k=\sum_{j,k=1}^{3}a_{jk}b_{jk}$$

összefüggést,[8] kapjuk, hogy

$$\Delta f=\sum_{k=1}^{3}\Delta f_k=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_k}\Delta\mathbf{x}_k+\sum_{k=1}^{3}\boldsymbol{\varepsilon}_k\Delta\mathbf{x}_k=\mathbf{D}\bullet\Delta\mathbf{X}=\mathbf{E}\bullet\Delta\mathbf{X},$$

ill.

$$\Delta f=\sum_{j,k=1}^{3}\Delta f_{jk}=\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_{jk}}\Delta x_{jk}+\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{jk}\Delta x_{jk}=\mathbf{D}\bullet\Delta\mathbf{X}+\mathbf{E}\bullet\Delta\mathbf{X},$$

ahol $\mathbf{E}$ az $\boldsymbol{\varepsilon}_k$, ill. ε_{jk} $(j,k=1,2,3)$ komponensekkel meghatározott tenzor, és így a $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_k}$, ill. $\frac{\partial f}{\partial x_{jk}}$ $(j,k=1,2,3)$ parciális deriváltak folytonossága miatt $\mathbf{E}\to\mathbf{O}$, midőn $\Delta\mathbf{X}\to\mathbf{O}$. A kapott összefüggésekből (3) alapján állításunk közvetlenül leolvasható.

Az $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{X})$ függvény differenciálhatóságára vonatkozólag (10), (12), (13), valamint [1], (4. 10) és (4. 33) felhasználásával egyszerűen adódik a következő tétel:

7 (12), (13), ill. (14) bizonyításánál felhasználjuk a könnyen igazolható

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{c}=(\mathbf{c}\circ\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}, \quad \mathbf{c}(\mathcal{A}\cdot\mathbf{B})=(\mathbf{c}\mathcal{A})\cdot\mathbf{B},$$

ill.

$$\mathbf{c}\times(\mathcal{A}\cdot\mathbf{B})=(\mathbf{c}\times\mathcal{A})\cdot\mathbf{B}$$

összefüggéseket. (Vö. [1], (4.31), (5.45); (5.4), (4.10), (4.20); ill. (4.36), (5.47).)

8 L. [1], (1.40).

3. TÉTEL. *Az* $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{X})$ *függvény akkor és csak akkor differenciálható, ha az* $y_i=f_i(\mathbf{X})$ $(i=1, 2, 3)$ *függvények differenciálhatók és*

$$\frac{dy_i}{d\mathbf{X}}(*\mathfrak{D})*\mathbf{e}_i \qquad (i=1,2,3).$$

5. Skalár-tenzor függvények körében érvényes a skalár-vektor függvényekre vonatkozó középértéktétel következő analogonja:

4. TÉTEL. *Ha* $y=f(\mathbf{X})$ *az* $\mathbf{X}=\mathbf{X}_0+t\Delta\mathbf{X}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ *tenzorhelyeken differenciálható, akkor van olyan rögzített* $\mathbf{X}^*=\mathbf{X}_0+t^*\Delta\mathbf{X}$ $(0\leqq t^*\leqq 1)$ *tenzor, hogy a* $\Delta\mathbf{X}$*-hez tartozó* Δf *megváltozásra*

$$\Delta f=\left.\frac{df}{d\mathbf{X}}\right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*}\bullet\Delta\mathbf{X}.$$

BIZONYÍTÁS. Az $\mathbf{X}=\mathbf{X}_0+t\Delta\mathbf{X}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ tenzorhelyeken $y=f(\mathbf{X})=f(\mathbf{X}(t))$, így a skalár-skalár függvényekre vonatkozó középértéktétel, valamint (15) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\Delta f=\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=t^*}\Delta t=\left.\frac{df}{d\mathbf{X}}\right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*}\bullet\Delta\mathbf{X},$$

amint állítottuk.

IRODALOM

[1] MOLNÁR F., Harmadrendű tenzorok és tenzor-vektor függvények direkt tárgyalása, *MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl.*, **11** (1961).
[2] SZENTMÁRTONY T., *Vektor- és tenzorszámítás* (Budapest, 1948).
[3] PACH ZS. PÁLNÉ—FREY T., *Vektor- és tenzoranalízis* (Budapest, 1951).

(Beérkezett: 1961. I. 2.)