

EGY GAUSS-FÉLE SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATRÓL

Írta: VINCZE ISTVÁN

A Gauss-féle folyamat, amellyel az alábbiakban foglalkozunk, a matematikai statisztikában mint limeszfolyamat merül fel minta és eloszlásfüggvény, ill. két minta eltérésének határeseteként, ha a minta darabszám végtelenhez tart. Két minta összehasonlításával kapcsolatban nyertem néhány kétváltozós eloszlástételt és határeloszlástételt, amelyekből az említett folyamat több jellemzője egyszerűen meghatározható volt. Így például explicite meghatároztam az első abszolút-maximumhely eloszlásfüggvényét, továbbá egyszerű formulákat sikerült nyerni egyes momentumokra. A szóban forgó Gauss-folyamat szoros kapcsolatban van a Brown-mozgást leíró Einstein—Wiener-folyamattal, amely ugyancsak Gauss-folyamat, azonban független növekményű és ezért könnyebben kezelhető. E tulajdonságot használta fel DOOB [5] határeloszlástételek közvetlen, azaz nem a véges mintára vonatkozó eloszlástételekből határátmenettel nyerhető meghatározására. „Heurisztikus” módszerének mértékelméleti alátámasztását DONSKER [4] és PROCHOROV [8] adták. Említett együttes határeloszlástételeimet DOOB módszerével is levezettem [13]. A Doob-féle gondolat módott adott az ún. első átmetszés sűrűségfüggvényére olyan egyszerű integrálegyenlet felírására, amely összefoglalja számos más határeloszlástétel esetét és esetleg továbbiak levezetését, vagy közelítő meghatározását is lehetővé teszi.

A tárgyalt Gauss-féle folyamat említett matematikai statisztikai vonatkozása mellett jelentős szerepet játszik a híradástechnikában, a hővezetés elméletében, az energiafogyasztás ingadozásának vizsgálatában és sok más fizikai és műszaki problémában.

Dolgozatunk célja a szóban forgó Gauss-folyamattal kapcsolatos néhány ismert eredmény és termékeny módszer ismertetése, s ezeknek néhány adalékkal való kiegészítése. A Gauss-folyamatra vonatkozólag utalunk P. LÉVY [7], A. BLANC—LAPIERRE—R. FORTET [2] és J. L. DOOB [6] munkáira.

A következő, első paragrafusban a minta és elméleti eloszlásfüggvény eltérése, amely véletlen függvény és binomiális (vagy polinomiális) folyamatnak is nevezhető, szolgál a tárgyalandó Gauss-folyamat szemléletes bevezetésére. — A 2. §-ban a maximum helyek eloszlásával foglalkozunk. Az abszolút maximum hely sűrűségfüggvényére egy abszolút konvergens sort vezetünk le, amely előállítás TURÁN PÁL egy megjegyzése alapján sikerült. Tanácsaiért ezúton mondok köszönetet. — A 3. §-ban a Gauss-folyamattal kapcsolatos néhány momentumot vezetünk le. — A 4. §-ban a kapcsolatos Einstein—Wiener-folyamattal foglalkozunk.

1. §. A binomiális folyamat és a Gauss-féle folyamat

Legyenek $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ független, azonos, a $(0, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók: $i = 1, 2, \dots, n$ -re

$$P(\delta_i < t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq 0 \\ t, & \text{ha } 0 < t \leq 1 \\ 1, & \text{ha } 1 < t. \end{cases}$$

Jelölje $F_n(t)$ empirikus eloszlásfüggvényüket:

$$(1) \quad F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{\delta_i < t} 1.$$

A matematikai statisztikában jelentős szerepet játszik az empirikus és elméleti eloszlásfüggvény eltérése:

$$\xi_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t).$$

A $\sup_{0 \leq t \leq 1} |\xi_n(t)|$ és $\sup_{0 \leq t \leq 1} \xi_n(t)$ valószínűségi változók határeloszlását $n \rightarrow \infty$ esetén KOLMOGOROV, ill. SZMIRNOV határozták meg és WOLFOWITZ mutatott rá először ezen eloszlások statisztikai felhasználhatóságára annak a kérdésnek az eldöntésénél, hogy valamely minta egy feltételezett elméleti eloszlású sokaságból származik-e.

A $\xi_n(t)$ véletlen függvény (1 valószínűséggel) a $t=0$ -ban $\xi_n(0)=0$ -ból indul és a t -tengelyhez -45° szög alatt hajló szakaszokból áll, ugrásai a δ_i helyeken vannak, és $\frac{1}{\sqrt{n}}$ nagyságúak, a $\xi_n(1)=0$ pontban végződik. (1) alapján közvetlenül

beláthatjuk a következő relációk érvényességét:

Minden rögzített t -re $\xi_n(t)$ binomiális eloszlású, továbbá

$$\begin{aligned} M(\xi_n(t)) &= 0 & 0 \leq t \leq 1 \\ D^2(\xi_n(t)) &= t(1-t) & 0 \leq t \leq 1 \\ P(\xi_n(0)=0) &= 1 \\ M(\xi_n(t)\xi_n(t')) &= t(1-t'), & 0 \leq t \leq t' \leq 1, \end{aligned}$$

rögzített $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < 1$, $k \geq 2$ értékekre a $\xi_n(t_1), \xi_n(t_2), \dots, \xi_n(t_k)$ valószínűségi változók együttes eloszlása polinomiális.

Ha $n \rightarrow \infty$ akkor a $\xi_n(t)$ folyamat egy $\xi(t)$ Gauss-féle sztochasztikus folyamat-hoz tart, amelyet az irodalomban igen sokat vizsgáltak és amelyre nézve $\xi_n(t)$ fenti tulajdonságaiból közvetlenül a következőket állapíthatjuk meg:

Minden rögzített t -re ($0 \leq t \leq 1$) $\xi(t)$ eloszlása normális eloszlás, továbbá

$$\begin{aligned} M(\xi(t)) &= 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ D^2(\xi(t)) &= t(1-t), & 0 \leq t \leq 1, \\ P(\xi(0)=0) &= 1, \\ M(\xi(t)\xi(t')) &= t(1-t'), & 0 \leq t \leq t' \leq 1, \end{aligned}$$

rögzített $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < 1$, $k \geq 2$, értékekre a $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_k)$ változók együttes eloszlása k -változós normális eloszlás. Ismeretes továbbá, hogy $\xi(t)$ mintafüggvényei 1 valószínűséggel folytonosak, és ugyancsak 1 valószínűséggel sehol sem differenciálhatók. A mintafüggvény 1 valószínűséggel $t=0$ -ra a $\xi(0)=0$ magasságból indul és a $\xi(1)=0$ -ba érkezik. A folytonosság miatt a mintafüggvény felveszi maximumát éspedig 1 valószínűséggel egyetlen t_m^+ helyen, továbbá abszolút értékének maximumát egyetlen t_m helyen. Természetesen t_m^+ és t_m valószínűségi változók.

A $\tau = \frac{t}{1-t}$ új változó bevezetésével definiált

$$\zeta(\tau) = (1+\tau)\xi\left(\frac{\tau}{1+\tau}\right), \quad 0 \leq \tau < \infty$$

sztochasztikus folyamat az Einstein—Wiener-folyamat, amely a térbeli Brown-mozgást végző pont koordinátatengelyekre eső vetületeinek mozgását írja le. A $\xi(t)$ folyamatra felírt fenti relációkból levezethetők ennek következő tulajdonságai:

Minden rögzített τ -ra $\zeta(\tau)$ normális eloszlású, továbbá

$$P(\zeta(0)=0) = 1,$$

$$M(\zeta(\tau)) = 0, \quad 0 \leq \tau < \infty$$

$$D^2(\zeta(\tau)) = \tau, \quad 0 \leq \tau < \infty$$

$$M(\zeta(\tau)\zeta(\tau')) = \min(\tau, \tau').$$

Ugyancsak egyszerű számolással adódik, hogy $\zeta(\tau)$ független növekményű, vagyis idegen (τ_1, τ_2) és (τ_3, τ_4) intervallumokra

$$P(\zeta(\tau_4) - \zeta(\tau_3) < x | \zeta(\tau_2) - \zeta(\tau_3) = y) = P(\zeta(\tau_4) - \zeta(\tau_3) < x), \quad 0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4.$$

A $\xi(t)$ -re vonatkozó problémák átfogalmazhatók a $\zeta(\tau)$ -ra vonatkozó problémákba. Így például a $\sup_{0 \leq t \leq 1} \xi(t)$ valószínűségi változó eloszlásához a következő esemény valószínűségét kell meghatározni

$$\{\xi(t) < a, 0 \leq t \leq 1\},$$

ez azonban a $\zeta(\tau)$ folyamatra vonatkozó következő eseménynek felel meg:

$$\{\zeta(\tau) < a(1+\tau), 0 \leq \tau < \infty\}.$$

$\zeta(\tau)$ független növekményű lévén jóval egyszerűbben kezelhető, mint $\xi(t)$ és így Doob [5] hathatós módszert adott erre vonatkozó eredmények levezetésére, amit azóta több szerző kihasznált [1, 2, 13].

2. §. A Gauss-folyamat maximum helyeinek eloszlása

Egy előző dolgozatomban [12] meghatároztam a $(t_m^+, \xi(t_m^+))$ és $(t_m, \xi(t_m))$ valószínűségi változó párok együttes eloszlását. Ezek a $\xi_n(t)$ folyamatra, helyesebben két független ilyen folyamat különbségére vonatkozó, megfelelő valószínűségi változó párok együttes eloszlásának határértékeként adódtak. Az eredmények:
 $0 \leq z \leq 1, 0 \leq y$

$$(2) \quad P(\xi(t_m^+) < y, t_m^+ < z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y \int_0^z \frac{u^2}{[v(1-v)]^{3/2}} e^{-\frac{u^2}{2v(1-v)}} du dv,$$

$$(3) \quad P(\xi(t_m) < y, t_m < z) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^y \int_0^z f(u, v) f(u, 1-v) du dv,$$

ahol

$$(4) \quad f(y, z) = \frac{y}{z^{3/2}} \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v (2v+1) e^{-\frac{1}{2}(2v+1)^2 \frac{y^2}{z}}.$$

Az első változók eloszlására peremeloszlásként adódnak a Szmirnov- és Kolmogorov-féle eloszlások, az egyoldali maximum helyre az ismeretes eredmény

$$P(t_m^+ < z) = z, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

vagyis az egyenletes eloszlás adódik. A következőkben a t_m eloszlásával foglalkozunk.

A (3) formulából $y = \infty$ -re nyerjük a t_m eloszlásfüggvényét

$$P(t_m < z) = \Phi(z) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^z \int_0^{\infty} f(u, v) f(u, 1-v) du dv,$$

a sűrűségfüggvény

$$\Phi'(z) = \varphi(z) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u, z) f(u, 1-z) du.$$

Ha $f(y, z)$ (4) alatti sorát e kifejezésbe helyettesítjük, s tagonként integrálunk — feltéve, hogy a tagonkénti integrálás megengedett — a következő tetszetős előállítás nyerjük:

$$\varphi(z) \sim 2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^{\mu+v} \frac{(2\mu+1)(2v+1)}{[(2\mu+1)^2 z + (2v+1)^2 (1-z)]^{3/2}}.$$

Sajnos ez a formálisan nyert sor nem abszolút konvergens, amiről már $z=0$ helyettesítéssel meggyőződhetünk. A baj onnan származik, hogy $f(y, z)$ sora $y=0$ -ra nem abszolút konvergens; $y = \infty$ -re ez a nehézség nem forog fenn. Ismeretes azonban, hogy az $f(y, z)$ függvénynek, amely a hővezetés elméletében szerepet játszó

9-függvény, más előállítás is van, s TURÁN PÁL javasolta, hogy az integrál $(0, 1)$ intervallumra eső részét ennek segítségével számítsam. E módszerrel sikerült a következő eredményre jutni:

1. TÉTEL. Ha t_m jelöli a $(0, 1)$ -ben értelmezett $\xi(t)$ Gauss-féle folyamat abszolútmaximum-helyét, amely folyamatot a $\mathbf{P}(\xi(0)=0)=1$, $\mathbf{M}(\xi(t))=0$, $0 \leq t \leq 1$ és $\mathbf{M}(\xi(t)\xi(t'))=t(1-t')$, $0 \leq t \leq t' \leq 1$ relációk jellemzik, akkor $0 \leq z \leq 1$ -re

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}(z \leq t_m < z + \Delta z)}{\Delta z} = \varphi(z) =$$

$$= \sqrt{\frac{32}{\pi}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\mu+\nu} \frac{(2\mu+1)(2\nu+1)}{[(2\mu+1)^2 z + (2\nu+1)^2 (1-z)]^{3/2}} \int_{\alpha_{\mu,\nu}(z)}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

ahol

$$\alpha_{\mu,\nu}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{[(2\mu+1)^2 z + (2\nu+1)^2 (1-z)]^{1/2}}{[z(1-z)]^{1/4}}.$$

E sor igen gyorsan konvergál és alkalmas $\varphi(z)$ értékeinek numerikus meghatározására.

BIZONYÍTÁS: Ismeretes, hogy az

$$l(y) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} (2\nu+1) e^{-\frac{1}{2}(2\nu+1)^2 y^2}$$

függvény a következő alakban is előállítható (lásd pl. [9] 47. old.):

$$(5) \quad l(y) = \frac{\pi}{y^3} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} (2\nu+1) e^{-\frac{(2\nu+1)^2 \pi^2}{8y^2}},$$

mely utóbbi sor az $y=0$ környezetében kedvezőbb. Vagyis $l(y)$ -ra a következő függvényegyenlet áll fenn:

$$(6) \quad l(y) = \left(\frac{\pi}{2y^2}\right)^{3/2} l\left(\frac{\pi}{2y}\right).$$

Az $f(y, z)$ függvény a következő alakban írható:

$$f(y, z) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \frac{y}{z^{3/2}} l\left(\frac{y}{z^{1/2}}\right),$$

ily módon

$$\varphi(z) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{y^2}{[z(1-z)]^{3/2}} l\left(\frac{y}{z^{1/2}}\right) l\left(\frac{y}{(1-z)^{1/2}}\right) dy.$$

Integrálunkat két részre bontjuk: $\varphi(z) = I_1 + I_2$, ahol

$$I_1 = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \int_0^\alpha \frac{y^2}{[z(1-z)]^{3/2}} l\left(\frac{y}{z^{1/2}}\right) l\left(\frac{y}{(1-z)^{1/2}}\right) dy,$$

amely α -t alkalmasan fogjuk megválasztani. (6) alapján írhatjuk — y helyett $\frac{y}{z^{1/2}}$ -t helyettesítve —

$$I_1 = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \int_0^\alpha \frac{1}{y^4} l\left(\frac{\pi z^{1/2}}{2y}\right) l\left(\frac{\pi(1-z)^{1/2}}{2y}\right) dy.$$

Alkalmazzuk most az

$$y = \frac{\pi[z(1-z)]^{1/2}}{2u}$$

helyettesítést. Eredményünk

$$I_1 = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \int_{\frac{\pi[z(1-z)]^{1/2}}{2\alpha}}^\infty \frac{u^2}{[z(1-z)]^{3/2}} l\left(\frac{u}{z^{1/2}}\right) l\left(\frac{u}{(1-z)^{1/2}}\right) du.$$

Válasszuk most α -t a következő módon

$$\alpha = \alpha(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} [z(1-z)]^{1/4},$$

amikor is $I_1 = I_2$ és

$$\varphi(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{\alpha(z)}^\infty \frac{u^2}{[z(1-z)]^{3/2}} l\left(\frac{u}{z^{1/2}}\right) l\left(\frac{u}{(1-z)^{1/2}}\right) du.$$

Helyettesítve az $l(y)$ függvény (5) alatti sorát, az abszolút konvergencia miatt a kétszeresen végtelen sort tagonként integrálhatjuk:

$$\varphi(z) = \sqrt{\frac{32}{\pi}} \frac{1}{[z(1-z)]^{3/2}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\mu+\nu} (2\mu+1)(2\nu+1) \int_{\alpha(z)}^\infty u^2 e^{-\frac{u^2}{2} \left[\frac{(2\mu+1)^2}{z} + \frac{(2\nu+1)^2}{1-z} \right]} du.$$

Ebből jutunk az

$$y = u \left[\frac{(2\mu+1)^2 z + (2\nu+1)^2 (1-z)}{z(1-z)} \right]^{1/2}$$

helyettesítéssel a tételünkben megadott alakhoz. A $\varphi(z)$ sűrűségfüggvény — ellenében a t_m^+ sűrűségfüggvényével — a $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ sajátossággal rendelkezik, továbbá a $z=0$ pontban végtelen rendben simul a z -tengelyhez, ami $\varphi(z)$ előállításából ugyancsak leolvasható.

3. §. Momentumok

Ebben a paragrafusban a t_m^+ és $\xi(t_m^+)$ valószínűségi változók néhány momentumát és egymásra vonatkozó regresszióját adjuk meg.

2. TÉTEL. Az 1. tételben leírt $\xi(t)$ Gauss-folyamat t_m^+ maximum helyére és $\xi(t_m^+)$ maximumára érvényesek a következő relációk:

$$(7) \quad M(\xi(t_m^+)) = \sqrt{\frac{\pi}{8}},$$

$$(8) \quad D^2(\xi(t_m^+)) = \frac{4 - \pi}{8},$$

$$(9) \quad M(t_m^+ \xi(t_m^+)) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$(10) \quad M(t_m^+ | \xi(t_m^+) = y) = \frac{1}{2}, \quad y > 0,$$

$$(11) \quad D^2(t_m^+ | \xi(t_m^+) = y) = \frac{1}{4} - \frac{y}{\sqrt{8\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-2y^2t}}{t^{1/2}(1+t)} dt,$$

$$(12) \quad M(\xi(t_m^+) | t_m^+ = z) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} [z(1-z)]^{1/2},$$

$$(13) \quad D^2(\xi(t_m^+) | t_m^+ = z) = \frac{3\pi - 8}{\pi} z(1-z).$$

KOROLLÁRIUM: A t_m^+ és $\xi(t_m^+)$ valószínűségi változók korrelálatlanok.

Megjegyezzük, hogy a (11) jobboldalán szereplő integrál a következő, ún. Whittaker-féle függvénnyel fejezhető ki (lásd pl. [11]):

$$W_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(z) = \frac{z^{\frac{1}{2}} e^{-z}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{t^{1/2}(1+t)} dt.$$

BIZONYÍTÁS: A (7) és (8) formula a Szmirnov-eloszlás

$$P(\xi(t_m^+) < y) = 1 - e^{-2y^2}$$

első két momentumából adódik. A (9) vegyes momentumot az együttes eloszlás (6) alatti alakjából közvetlenül nyerhetjük:

$$M(t_m^+ \xi(t_m^+)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^2 z}{[z(1-z)]^{3/2}} e^{-\frac{y^2}{2z(1-z)}} dy dz,$$

ahol az y szerinti, majd a z szerinti integrálás minden nehézség nélkül keresztül-vihető.

A (10) formulát a következőképpen kapjuk:

$$\mathbf{M}(t_m^+ | \xi(t_m^+) = y) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \frac{y^2 z}{[z(1-z)]^{3/2}} e^{-\frac{y^2}{2z(1-z)}} dz}{4ye^{-2y^2}}.$$

A

$$z = \frac{t}{1+t}, \quad dz = \frac{dt}{(1+t)^2}$$

helyettesítéssel az

$$\frac{1}{\sqrt{8\pi}} ye^{y^2} \int_0^\infty \frac{1}{t^{1/2}} e^{-\frac{y^2}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} dt$$

kifejezéshez jutunk, amelyből (lásd [11] 170. old.)

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^{1/2}} e^{-\frac{y^2}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{ye^{y^2}}$$

és így az $\frac{1}{2}$ értékhez jutunk.

A (11) formula levezetéséhez határozzuk meg a $t_m^+ - (t_m^+)^2$ várható értékét a $\xi(t_m^+) = y$ feltétel mellett:

$$\mathbf{M}(t_m^+ - (t_m^+)^2 | \xi(t_m^+) = y) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \frac{y^2 z(1-z)}{[z(1-z)]^{3/2}} e^{-\frac{y^2}{2z(1-z)}} dz}{4ye^{-2y^2}}.$$

Az integrálandó függvény szimmetrikus z -ben az $\frac{1}{2}$ pontra nézve és így $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$ -ben alkalmazzuk a

$$z(1-z) = \frac{1}{4(t+1)}, \quad (1-2z)dz = -\frac{dt}{4(1+t)^2}$$

transzformációt, azonban

$$1-2z = \left(\frac{t}{1+t}\right)^{1/2}$$

és így

$$dz = -\frac{1}{4} \frac{1}{t^{1/2}(1+t)^{3/2}} dt.$$

Ily módon a keresett momentumra a következő — elemi függvényekkel véges alakban ki nem fejezhető — kifejezést nyerjük:

$$M(t_m^+ - (t_m^+)^2 | \zeta(t_m^+) = y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-2y^2t}}{t^{1/2}(1+t)} dt.$$

Minthogy t_m^+ várható értékét (1)-ből ismerjük, innen a négyzet várható értékét, végül pedig a szórásnégyzet (11) alatti alakját kapjuk.

A (12) és (13) relációk igazolása a (9)-re vonatkozó megjegyzésünk figyelembevételével egyszerűen történhet, ugyancsak a korolláriumé, amely (10)-ből azonnal leolvasható.

4. §. Az első átmetszés abszcisszájának eloszlása

A bevezetésben említett $\zeta(\tau)$ ($0 \leq \tau < \infty$) Einstein—Wiener-folyamattal foglalkozunk. Mint említettük, a $\xi(t)$ Gauss-folyamattal kapcsolatos bizonyos problémák a

$$\zeta(\tau) = (1 + \tau) \xi\left(\frac{\tau}{1 + \tau}\right)$$

összefüggés miatt a $\zeta(\tau)$ -ra vonatkozó problémákba vihetők át. E problémák egy része a következő típusú: Legyen $g(\tau)$ valamely görbe egyenlete, amelyre vagy

$$a) \quad g(\tau) > b > 0, \quad 0 \leq \tau < \infty$$

vagy

$$b) \quad g(\tau) > 0 \quad 0 < \tau < \infty$$

és $g(0) = 0$, ugyanakkor $g(\tau)$ a $\tau = 0$ pontban elég magas rendben érinti a függőleges tengelyt. Feladat a

$$\Phi(g(\tau)) = P(\zeta(\tau) < g(\tau), \quad 0 < \tau < \infty)$$

$$\Phi(z; g(\tau)) = P(\zeta(\tau) < g(\tau); \quad 0 \leq \tau \leq z)$$

valószínűségek meghatározása. Itt

$$\Phi(\infty; g(\tau)) = \Phi(g(\tau))$$

és $\Phi(g(\tau)) < 1$ esetén a $\zeta(\tau)$ folyamat $1 - \Phi(g(\tau))$ valószínűséggel átmetszi a $g(\tau)$ görbét valamely végesben fekvő τ értékre. Ez esetben jelölje $\tau_{g(\tau)}^+ = \tau^+$ az első ilyen helyet; ennek eloszlásfüggvényére a következő áll: $P(\tau^+ < z) = P(\zeta(\tau) \geq g(\tau) \text{ valamely } \tau < z\text{-re}) = 1 - \Phi(z; g(\tau))$.

Tehát τ^+ sűrűségfüggvénye

$$\Psi(z; g(\tau)) = -\Phi'(z; g(\tau)).$$

E sűrűségfüggvény integrálja 0-tól ∞ -ig csak akkor ad 1-et, ha a $\zeta(\tau)$ görbe pozitív

valószínűséggel átmetszi valahol $g(\tau)$ -t, tehát, ha $\Phi(g(\tau))=0$. Ahhoz, hogy a szokásos értelemben vett sűrűségfüggvényt kapjuk, osztani kell $1-\Phi(g(\tau))$ -val:

$$\frac{-\Phi'(z; g(\tau))}{1-\Phi(z; g(\tau))}.$$

A bevezetésben mondtak szerint a

$$g(\tau) = a(1 + \tau)$$

„fal”, a Kolmogorov—Szmirnov határeloszlásnak felel meg, vagyis a

$$\{\zeta(\tau) < a(1 + \tau), \quad 0 \leq \tau < \infty\}$$

esemény a

$$\{\xi(t) < a, \quad 0 \leq t \leq 1\}$$

eseménynek felel meg.

A Rényi-féle egymintás relatív eltérés eloszlása [10] a

$$\{\xi(t) < at, \quad 0 < f_0 \leq t \leq 1\}$$

esemény valószínűségét adja meg, ha a mintaelemszám $n \rightarrow \infty$, ami a

$$\{\zeta(\tau) < a\tau, \quad f_0 \leq \tau < \infty\}$$

eseménynek felel meg.

Az Anderson—Darling-féle relatív eltérés a

$$\left\{ \frac{\xi(t)}{[t(1-t)]^{1/2}} < a, \quad 0 \leq t \leq 1 \right\}$$

eseményhez vezet, ha $n \rightarrow \infty$ és az a

$$\{\zeta(\tau) < a\sqrt{\tau}, \quad 0 < \tau < \infty\}$$

eseményt adja.

Az alábbiakban egy egyszerű integrálegyenletet vezetünk be annak az első abszcisszának sűrűségfüggvényére, amelyben a $\zeta(\tau)$ folyamat mintagörbéje a $g(\tau)$ görbét metszi. Minthogy a $\zeta(\tau)$ folyamat, minden $a > 0$ -ra, a $g(\tau) = a\tau$ egyenest 1 valószínűséggel a $\tau = 0$ pont tetszőleges kis környezetében metszi, az ilyen típusú falak esetében a $\tau_{g(\tau)}^+$ definíciója csak valamely $0 < \tau_0 < \tau < \infty$ intervallumra vonatkozhat. (A Rényi-féle esetben $\tau_0 = f_0$ volt.) Az alábbiakban ezért a $g(\tau)$ -ra a $g(0) = b_0 > 0$ kikötést tesszük, amely mellett a $\tau = 0$ pont e kivételes helyzete nem forog fenn, azonban tételünk arra az esetre is áll, ha a $g(\tau)$ érintője a $\tau = 0$ -ban függőleges és $g(\tau)$ itt eléggé magas rendben simul az érintőhöz.

3. TÉTEL. Legyen $g(\tau)$ a $(0, \infty)$ félegyenesen értelmezett folytonos görbe, amelyhez léteznek olyan $0 < b_0 < b$ és $0 \leq a$ számok, hogy $g(0) \geq b_0$ és $0 < g(\tau) < a\tau + b$ minden $\tau \geq 0$ -ra. Legyen τ_g^+ az első metszéspont abszcisszája, ahol a $g(\tau)$ görbe annak a $\zeta(\tau)$ Einstein—Wiener-folyamatnak mintagörbéjét metszi, amely folyamatra a

$$P(\zeta(0) = 0) = 1$$

$$M(\zeta(\tau)) = 0, \quad 0 \leq \tau < \infty$$

$$M(\zeta(\tau)\zeta(\tau')) = \min(\tau, \tau')$$

relációk fennállanak. Akkor a $\tau_g^+ \psi(x, g(\tau)) = \psi(x)$ sűrűségfüggvénye a következő integrálegyenletet elégíti ki:

$$(14) \quad \varphi(x; a, b) = \int_0^x \psi(\tau) \varphi(x - \tau, a, a\tau + b - g(\tau)) d\tau,$$

ahol

$$(15) \quad \varphi(x; a, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} x^{1/2}} e^{-\frac{1}{2x}(b+ax)^2}.$$

BIZONYÍTÁS: Megemlítjük DOOB [5] következő lemmáját: Annak valószínűsége, hogy a $\zeta(\tau)$ folyamat az $a\tau + b$ egyenest ($b > 0, a \geq 0$) átmetszi e^{-2ab} .

Jelöljük most azt az első abszcisszát, ahol a $\zeta(\tau)$ folyamat az $a\tau + b$ egyenest metszi $\tau_{a,b}^+$ -vel. A $\tau_{a,b}^+$ sűrűségfüggvényét egy előző dolgozatomban [13] meghatároztam, azonban ez a (6) formulából is levezethető, ha az abban szereplő $\xi(t)$ folyamatról a megfelelő transzformációval áttérünk a $\zeta(\tau)$ folyamatra. Ez a sűrűségfüggvény a (15) alatti $\varphi(x; a, b)$, amelyre tehát

$$\int_0^\infty \varphi(x; a, b) dx = e^{-2ab},$$

vagyis az integrál az $a\tau + b$ egyenes átmetszésének DOOB által levezetett valószínűségét adja.

Ahhoz, hogy a $\zeta(\tau)$ folyamat az $a\tau + b$ egyenest valamely (első) $\tau_{a,b}^+$ abszcisszájú pontban messe, először a $g(\tau)$ görbét kell valamely első τ_g^+ abszcisszájú pontban metszenie. Azonban a $\zeta(\tau)$ folyamat független növekményű és így $\zeta(\tau)$ -nak az a része, amely a $(\tau_g^+; \zeta(\tau_g^+))$ pont után következik, úgy tekinthető, mint egy tételünkben leírt Einstein—Wiener-folyamat, csak a $(0, 0)$ pont szerepét a $(\tau_g^+, \zeta(\tau_g^+))$ játssza és ehhez képest az $a\tau + b$ egyenes most egy az $a\tau_g^+ + b - g(\tau_g^+)$ magasságból és ugyan-csak a iránytangenssel haladó egyenes, amely első átmetszésének a sűrűségét ugyan-csak a (15) alatti formula adja az a és $b \sim a\tau_g^+ + b - g(\tau_g^+)$ paraméterekkel. Ezek után integrálegyenletünk a következőképpen nyerhető: Annak valószínűsége, hogy a $\zeta(\tau)$ folyamat az $a\tau + b$ egyenest először a $\tau = x$ pont $(x, x + dx)$ környezetében messe, egyrészt $\varphi(x; a, b)dx$. Másrészt ezt a következő módon is kifejezhetjük: annak valószínűsége, hogy a $\zeta(\tau)$ folyamat a $g(\tau)$ görbét először a $\tau_g^+ = \tau$ hely $(\tau, \tau + d\tau)$ környezetében messe $\varphi(\tau) d\tau$, továbbá annak valószínűsége, hogy az innen kiinduló folyamat az $a\tau + b$ egyenest az $(x, x + dx)$ intervallumban messe

$$\varphi(x - \tau; a, a\tau + b - g(\tau)).$$

A független növekményűség miatt a két utóbbi valószínűséget szorozni és τ szerint a $(0, x)$ intervallumban integrálni kell, amit a $\varphi(x; a, b)dx$ -vel összevetve, a (14) integrálegyenlethez jutunk. Ezzel a 3. tételt bebizonyítottuk.

IRODALOM

- [1] ANDERSON, T. W.—DARLING, D. A.: „Asymptotic theory of certain „goodness of fit” criteria based on stochastic processes”. *Annals of Mathematical Statistics* **23** (1952) 193—212.
- [2] BLANC—LAPIERRE, A.—FORTET, R.: *Théorie des fonctions aléatoires*. Masson et Cie, Paris, 1953.
- [3] DARLING, D. A.—SIEGERT, A. J. F.: „The first passage problem for a continuous Markov process”. *Annals of Mathematical Statistics* **24** (1953) 624—639.
- [4] DONSKER, M. D.: „Justification and extension of Doob’s heuristic approach to the Kolmogorov—Smirnov theorems”. *Annals of Mathematical Statistics* **23** (1952), 277—281.
- [5] DOOB, J. L.: „Heuristic approach to the Kolmogorov—Smirnov theorems”. *Annals of Mathematical Statistics* **20** (1949) 393—403.
- [6] DOOB, J. L.: *Stochastic Processes*. New York—London, 1953.
- [7] LÉVY, P.: *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Gauthier—Villars, Paris, 1948.
- [8] Прохоров, Ю. В.: Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. Теория вероятностей и ее применения **1** (1956) 177—238.
- [9] RÉNYI A.: Az $L(z)$ valószínűség-eloszlásfüggvényről. *MTA Matematikai Kutató Intézete Közleményei* **2** (1957) 43—50.
- [10] RÉNYI A.: A rendezett minták elméletéről. *A MTA III. Oszt. Közleményei* **3** (1953) 467—503.
- [11] Рыжик, И. М.—Градштейн, и. с.: Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва, 1951.
- [12] VINCZE I.: „Einige zweidimensionale Verteilungs- und Grenzverteilungssätze in der Theorie der geordneten Stichproben.” *MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **2** (1957) 183—209.
- [13] VINCZE I.: „On some distributions and limiting distributions connected with two sample tests.” (In chinese.) *The FU-TAN University Journal* (Shanghai), (1960), 1—13.

(Beérkezett: 1961. XI. 12.)