

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

A SHANNON-FÉLE ALAPTÉTEL ÁLTALÁNOS MEGFOGALMAZÁSA AZ INFORMÁCIÓELMÉLETBEN (II)*

Írta: R. L. DOBRUSIN

2. §. Az információ alaptulajdonságai

E paragrafus eredményeinek jelentős része nem új. Ezek az eredmények először GELFAND, KOLMOGOROV és JAGLOM [4] munkájában, valamint KOLMOGOROV [11], [12] munkáiban nyertek világos megfogalmazást. Ezen eredmények egy részét kissé más alakban PEREZ fogalmazta meg és bizonyította be [17]. CZJAN-CZI-PEJ pedig az [5]-ben szereplő integrálos információ-képlet levezetésében található pontatlanságra mutatott rá és ki is javította azt. Ő kapta először — valamivel kevesebb általánosság mellett — a 2. 2 pontban kimondott tételt. A három változó információjára vonatkozó azonosság (2. 6 pont) feltehetően új. Az információ sok, minket érdeklő tulajdonsága megkapható a Burkill—Kolmogorov-féle integrál általános elmélete alapján (l. [10]), valamint a legújabb irodalom bizonyos eredményeiből ([13], [14]). Mindazonáltal a teljesség és a hozzáférhetőség kedvéért a levezetéseket más, elemibb megfontolások segítségével mutatjuk be.

2. 1. Az információ nem-negatív volta. Kezdetnek levezetjük az információ következő egyszerű, de fontos tulajdonságát.

1. TULAJDONSÁG. *Tetszőleges ξ és η változókat tekintve az $I(\xi, \eta)$ információra fennáll, hogy*

$$(2. 1. 1) \quad I(\xi, \eta) \geq 0.$$

A bizonyításhoz levezetjük a következő, még sokszor felhasználásra kerülő általános egyenlőtlenséget: az $r_1, \dots, r_m; u_1, \dots, u_m$ nem-negatív számok tetszőleges megválasztása mellett

$$(2. 1. 2) \quad \sum_{i=1}^m r_i \log \frac{r_i}{u_i} \geq (r_1 + \dots + r_m) \log \frac{r_1 + \dots + r_m}{u_1 + \dots + u_m}.$$

Mindjárt megjegyezzük, hogy a (2. 1. 2) egyenlőtlenséget elegendő $m=2$ esetére igazolni, minthogy az általános eset ebből teljes indukciós következtetéssel adódik. Továbbá, hogy a (2. 1. 2) egyenlőtlenség változatlanul fennáll, ha az r_1, r_2 vagy az u_1, u_2 számokat egy állandó szorzóval megszorozzuk. Minthogy $r_1 + r_2 = 0$ vagy

* Uszpehi Matematischeskij Nauk XIV. (1959), vip. 6 (90), 3—104. — Jelen közlemény az eredeti tanulmány 2.—4. §-ának a fordítását tartalmazza. Az 1. §. fordítása a MTA III. Oszt. Közl. XI/4 (1961) számának 427—456. oldalán található meg. Az idézett irodalom jegyzékét a következő számban fogjuk közölni.

¹ Emlékeztetünk arra, hogy itt és a továbbiakban $0 \log \frac{0}{a} = 0$ ha $a \geq 0$ és $a \log \frac{a}{0} = +\infty$ ha $a > 0$.

$u_1 + u_2 = 0$ esetén az egyenlőtlenség közvetlenül belátható, elegendő azt az esetet tekintenünk, midőn $r_1 + r_2 = 1$ és $u_1 + u_2 = 1$. Ebben a speciális esetben azonban állításunk arra redukálódik, hogy ha $1 > u > 0$, $1 > r > 0$, akkor

$$(2.1.3) \quad r \log \frac{r}{u} + (1-r) \log \frac{1-r}{1-u} \geq 0.$$

A (2.1.3) egyenlőtlenség jobboldalát rögzített r mellett u szerint differenciálva láthatjuk, hogy minimumát $r=u$ -nál éri el, amikor is zérussal egyenlő. Ebből már következik a (2.1.3) egyenlőtlenség, következésképp a kiindulási (2.1.2) egyenlőtlenség is. Ismertnek tételezve fel az 1.2 pontban bevezetett jelöléseket, tegyük fel, hogy adva van az $X \times Y$ tér $C_1, \dots, C_m$ felbontása. Alkalmazva a (2.1.2) egyenlőtlenséget, látjuk, hogy

$$(2.1.4) \quad \sum_{i=1}^m p_{\xi\eta}(C_i) \log \frac{p_{\xi\eta}(C_i)}{p_{\xi} \times p_{\eta}(C_i)} \geq p_{\xi\eta}(X \times Y) \log \frac{p_{\xi\eta}(X \times Y)}{p_{\xi} \times p_{\eta}(X \times Y)} = 0.$$

(2.1.4)-ből és az információ (1.2.3) definíciójából közvetlenül folyik az $I(\xi, \eta)$ információ nem-negatív volta.

2.2. Az információ egy ekvivalens definíciója

Egymást nem metsző $C_i \in S_X \times S_Y$ ($i = 1, \dots, n$) halmazok tetszőleges rendszerére legyen mármost

$$(2.2.1) \quad I(C_1, \dots, C_n) = \sum_{i=1}^n p_{\xi\eta}(C_i) \log \frac{p_{\xi\eta}(C_i)}{p_{\xi} \times p_{\eta}(C_i)}.$$

Ebben a pontban be fogjuk bizonyítani, hogy

$$(2.2.2) \quad I(\xi, \eta) = \sup_{\{C_i\}} I(C_1, \dots, C_n),$$

ahol a felső határ az $X \times Y$ tér összes lehetséges felbontásaira veendő. A (2.2.2) képlet az eredeti (1.2.3) definíciótól nyilvánvalóan abban különbözik, hogy az eredeti definícióban a felső határt bizonyos olyan speciális felbontások szerint vettük, amelyet szemléletes analógiákat felhasználva derékszögű négyeshálózatra való felbontásnak fogunk nevezni. Ezek $\{A_1 \times B_1, A_1 \times B_2, \dots, A_m \times B_n\}$ típusú felbontások, ahol $\{A_i\}$ az X tér egy felbontása és $\{B_j\}$ az Y tér egy felbontása.

A minket érdeklő eredmény egy általánosabb eredmény speciális eseteként adódik. Ezt az általánosabb eredményt — tekintettel sokoldalú alkalmazásaira — külön tétel alakjában mondjuk ki.

Azt fogjuk mondani, hogy a $C_1, \dots, C_n$ felbontás a $D_1, \dots, D_m$ felbontás részfelbontása, ha a C_i halmazok mindegyikét teljesen tartalmazza a D_j halmazok egyike.

TÉTEL. Tekintsünk egy olyan $\mathfrak{B} \subset S_X \times S_Y$ algebrát, hogy a legkisebb σ -algebra, amely ezt tartalmazza, azonos legyen $S_X \times S_Y$ -nal. Tegyük fel továbbá, hogy adva van az $X \times Y$ tér $\mathfrak{B}$ -beli elemekből álló felbontásainak valamely olyan R osztálya,

hogy tetszőleges $\mathfrak{B}$ -ből való elemekkel bíró felbontáshoz található ennek R -be tartozó rész-felbontása. Akkor

$$(2.2.3) \quad I(\xi, \eta) = \sup_{\{C_i\} \in R} I(C_1, \dots, C_n),$$

ahol a felső határ az összes R -osztálybeli felbontásokra veendő.

Megjegyezzük, hogy a tétel feltételei teljesülnek, ha R az összes felbontásokból áll, és ezért a tételből következik a (2.2.2) összefüggés. E tétel alkalmazásának másik fontos példaként megjegyezzük, hogy ha X és Y a valós tengely, S_X és S_Y a Borel-halmazok σ -algebrája, $\mathfrak{S}_X$ és $\mathfrak{S}_Y$ pedig az X , illetve Y tengelyen vett összes intervallumok összességei, akkor $X \times Y$ összes, $\{A_1 \times B_1, \dots, A_m \times B_n\}$ típusú felbontásainak osztálya, — ahol $A_i \in \mathfrak{S}_X$, $B_j \in \mathfrak{S}_Y$ és $\{A_i\}$ az X felbontása, $\{B_j\}$ az Y felbontása —, eleget tesz a tétel feltételeinek (ehhez $\mathfrak{B}$ -ként az $A \times B$, $A \in \mathfrak{S}_X$, $B \in \mathfrak{S}_Y$ típusú szorzatok véges összegeinek algebráját kell venni). Ebből következik, hogy ha ξ és η egydimenziós változók, akkor az információ (1.2.3) definíciójában elegendő csupán a tengelyek intervallumokra való felbontását tekinteni.

Ha $\mathfrak{B}$ gyanánt $A \times B$, $A \in S_X$, $B \in S_Y$ típusú halmazok véges összegeinek összességét vesszük, látjuk, hogy a tétel feltételeinek a derékszögű negyszöghálóra való összes felbontások osztálya is eleget tesz. Ennek következtében, $\bar{I}(\xi, \eta)$ -val jelölve a (2.2.3) egyenlőség jobb oldalát, és $I_R(\xi, \eta)$ -val jelölve a (2.2.3) egyenlőség jobb oldalát, látjuk, hogy a tétel levezetéséhez elegendő kimutatni, hogy tetszőleges olyan R osztályra, amely a tétel feltételeinek eleget tesz:

$$(2.2.4) \quad I(\xi, \eta) = I_R(\xi, \eta).$$

Legyen

$$(2.2.5) \quad I_{\mathfrak{B}}(\xi, \eta) = \sup_{\{C_i\} \in \mathfrak{B}} I(C_1, \dots, C_n),$$

ahol a felső határt azon felbontásokra kell venni, melyeknek minden eleme beletartozik $\mathfrak{B}$ -be. Nyilvánvaló, hogy

$$(2.2.6) \quad I_R(\xi, \eta) \leq I_{\mathfrak{B}}(\xi, \eta) \leq \bar{I}(\xi, \eta).$$

A keresett (2.2.4) egyenlőség levezetését két lépésben végezzük el. Az első lépésben be fogjuk bizonyítani, hogy $I_R(\xi, \eta) = I_{\mathfrak{B}}(\xi, \eta)$, a másodikban pedig, hogy $I_{\mathfrak{B}}(\xi, \eta) = \bar{I}(\xi, \eta)$. A (2.1.2) egyenlőségből látható, hogyha $E = \bigcup_{i=1}^k F_i$, ahol az F_i -k diszjunktak, akkor

$$\sum_{i=1}^k p_{\xi\eta}(F_i) \log \frac{p_{\xi\eta}(F_i)}{p_{\xi} \times p_{\eta}(F_i)} \cong p_{\xi\eta}(E) \log \frac{p_{\xi\eta}(E)}{p_{\xi} \times p_{\eta}(E)}.$$

Alkalmazva ezt az egyenlőséget arra az esetre, amidőn a D_j -k mindegyikét a $\{C_i\}$ rendszer halmazából képezett összeg alakjában állítjuk elő, azután pedig összegezve az egyenlőségeket j szerint, észrevesszük, hogyha a $\{C_i\}$ felbontás rész-felbontása a $\{D_j\}$ felbontásnak, akkor

$$(2.2.7) \quad I(C_1, \dots, C_n) \cong I(D_1, \dots, D_m).$$

Ezért tetszőleges integrál-összeghez, amely a felső határ jele után áll a (2. 2. 5) kifejezésben, található egy nála nem kisebb, a (2. 2. 3) alatti felső határ-jel után álló összeg, úgyhogy $I_R(\xi, \eta) \cong I_{\mathfrak{A}}(\xi, \eta)$. Összevetve (2. 2. 6)-tal, látjuk, hogy:

$$(2. 2. 8) \quad I_R(\xi, \eta) = I_{\mathfrak{A}}(\xi, \eta).$$

$I_{\mathfrak{A}}(\xi, \eta)$ és $\bar{I}(\xi, \eta)$ egybevetéséhez szükségünk lesz a következő általános lemmára.

LEMMA. *Tegyük fel, hogy adva van a Z halmaz és e halmaz részhalmazainak S_Z σ -algebrája, valamint egy olyan $\mathfrak{A} \subset S_Z$ halmaz-algebra, hogy az a legkisebb σ -algebra, amely tartalmazza $\mathfrak{A}$ -t, egybeesik S_Z -vel. Tegyük fel továbbá, hogy S_Z -n adva van két valószínűségi mérték, $p(C)$ és $\bar{p}(C)$, $C \in S_Z$. Akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz és tetszőleges $D \in S_Z$ halmazhoz található egy olyan $A \in \mathfrak{A}$ halmaz, hogy egyidejűleg²*

$$(2. 2. 9) \quad p(A \Delta D) \leq \varepsilon \quad \text{és} \quad \bar{p}(A \Delta D) \leq \varepsilon.$$

Ez a lemma jól ismert a $p = \bar{p}$ esetben. Bizonyításához jelöljük $\tilde{S}$ -mal azon D halmazok osztályát, melyekre tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan $A \in \mathfrak{A}$, hogy a (2. 2. 9) egyenlőtlenségek fennállanak. Világos, hogy $\tilde{S} \supset \mathfrak{A}$. A lemma állításának levezetéséhez elég megmutatni, hogy (l. például [24], 6. §), $\tilde{S}$ elemeinek tetszőleges monoton sorozatával együtt annak határértéke is $\tilde{S}$ -hez tartozik. Tekintsük például a következő monoton csökkenő sorozatot:

$$M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_n \supset \dots, \quad \bigcap M_n = D, \quad M_n \in \tilde{S}.$$

Ekkor, ha n elég nagy, az alábbi szimmetrikus differenciákra fennáll, hogy

$$p(M_n \Delta D) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \bar{p}(M_n \Delta D) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Válasszuk meg az $A \in \mathfrak{A}$ halmazt úgy, hogy

$$p(M_n \Delta A) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \bar{p}(M_n \Delta A) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

akkor látjuk, hogy A approximálja D -t, úgyhogy $D \in \tilde{S}$. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

Tegyük fel mármost, hogy valamilyen $C \in S_X \times S_Y$ -ra $p_X \times p_Y(C) = 0$, de $p_{\xi\eta}(C) = a > 0$. Akkor $I(C, X \times Y \setminus C) = \infty$, úgyhogy $\bar{I}(\xi, \eta) = \infty$. A lemma értelmében tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra létezik egy olyan $\tilde{C} \in \mathfrak{B}$ halmaz, hogy $p_X \times p_Y(\tilde{C}) \leq \varepsilon$ és $p_{\xi\eta}(\tilde{C}) \geq a - \varepsilon$. Elég kis ε mellett az $I(\tilde{C}, X \times Y \setminus \tilde{C})$ összeg tetszőlegesen nagy lesz, úgyhogy $I_{\mathfrak{A}}(\xi, \eta) = \infty = \bar{I}(\xi, \eta)$ is fennáll.

Az $X \times Y$ tér olyan $\{C_i\}$ felbontását tekintve, hogy a megfelelő $I(C_1, \dots, C_n)$ integrálösszegre $I(C_1, \dots, C_n) < \infty$ fennáll, a tétel állításának levezetéséhez elegendő annak megmutatása, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra létezik olyan $D_1, \dots, D_m$, $D_i \in \mathfrak{B}$

² Itt és a továbbiakban a szimmetrikus differenciát így értelmezzük:

$$U \Delta V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U).$$

felbontás, hogy

$$(2.2.10) \quad I(D_1, \dots, D_n) \cong I(C_1, \dots, C_n) - \varepsilon.$$

Választva egy $\delta > 0$ számot, a $\mathfrak{A}$ -be tartozó $\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_n$ halmazokat úgy válasszuk meg, hogy

$$p_{\xi\eta}(C_i \Delta \bar{D}_i) \leq \delta \quad \text{és} \quad p_\xi \times p_\eta(C_i \Delta \bar{D}_i) \leq \delta \quad (i = 1, \dots, n)$$

fennálljon. Írjuk most a következőt:

$$D_i = \bar{D}_i \setminus \bigcup_{i \neq j} D_j \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$D_{n+1} = X \times Y \setminus \bigcup_{i=1}^n D_i.$$

Akkor $D_i \in \mathfrak{A}$ és a $\{D_i, i = 1, \dots, n+1\}$ halmazok az $X \times Y$ tér egy felbontását adják. Világos, hogy

$$(2.2.11) \quad p_{\xi\eta}\{D_i \Delta C_i\} \leq n\delta, \quad p_\xi \times p_\eta\{D_i \Delta C_i\} \leq n\delta \quad (i = 1, \dots, n)$$

és

$$(2.2.12) \quad p_{\xi\eta}\{D_{n+1}\} \leq n\delta, \quad p_\xi \times p_\eta\{D_{n+1}\} \leq n\delta.$$

(2.2.11)-ből következik, hogy elég kis δ esetén az $I(C_1, \dots, C_n)$ és $I(D_1, \dots, D_n)$ összegek tetszőlegesen közel lesznek egymáshoz. Hogy az utolsó összeadandót az $I(D_1, \dots, D_{n+1})$ összegben megbecsüljük, elegendő megjegyezni, hogy (2.2.12)-nek megfelelően

$$p_{\xi\eta}\{D_{n+1}\} \log \frac{p_{\xi\eta}\{D_{n+1}\}}{p_\xi \times p_\eta\{D_{n+1}\}} \cong p_{\xi\eta}\{D_{n+1}\} \log p_{\xi\eta}\{D_{n+1}\} \cong n\delta \log n\delta,$$

úgyhogy ez az összeadandó kis δ esetén nagyobb lesz, mint egy tetszőlegesen kicsi, előre megadott negatív szám. Így tehát kimutattuk, hogy elég kis δ esetén a (2.2.10) egyenlőtlenség teljesül; következőképp bebizonyítottuk a tétel állítását.

2.3. Az információ mint integrálösszegek határértéke

Legyen R az $X \times Y$ tér felbontásainak a 2.2 pontban kimondott tétel feltételeinek eleget tevő osztálya. Akkor igaz az, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan, az R -be tartozó $\{B_i\}$ felbontás, hogy annak tetszőleges $\{\tilde{B}_i\}$ rész-felbontására

$$(2.3.1) \quad |I(\xi, \eta) - I(\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_n)| < \varepsilon.$$

Ez az állítás közvetlen folyománya az említett tételnek, a (2.2.7) egyenlőtlenségnek és a felső határ definíciójának. •

Emlékeztetünk arra, hogy egy $\Gamma = \{\gamma\}$ absztrakt halmazt részben rendezettnek nevezünk, ha valamilyen γ_1 és γ_2 párra fennáll a $\gamma_1 < \gamma_2$ reláció (γ_1 megelőzi γ_2 -t), amely a következő tulajdonságokkal bír:

- I) abból, hogy $\gamma_1 < \gamma_2$ és $\gamma_2 < \gamma_1$, következik a γ_1 és γ_2 elemek azonossága,
 II) ha $\gamma_1 < \gamma_2$ és $\gamma_2 < \gamma_3$, akkor $\gamma_1 < \gamma_3$,
 III) tetszőleges két γ_1 és γ_2 elemhez található olyan γ_3 elem, hogy $\gamma_1 < \gamma_3$ és $\gamma_2 < \gamma_3$.

Az összes R -beli felbontások összességét részben-rendezett halmazzá lehet tenni, ha a $<$ relációt úgy definiáljuk, hogy

$$\{D_i\} < \{C_j\}$$

abban az esetben, amidőn a $\{C_j\}$ felbontás a $\{D_i\}$ felbontás rész-felbontása. Az I) és II) tulajdonságok teljesülése szemmel látható. A III) tulajdonság igazolásához elegendő megjegyezni, hogy a $\{B_i \cap C_j\}$ elemekkel rendelkező felbontás mind a $\{B_i\}$, mind a $\{C_j\}$ felbontásnak rész-felbontása. A $\{B_i \cap C_j\}$ felbontás esetleg nem tartozik bele R -be, mindamellett a tételben mondott követelményeknek megfelelően létezik olyan $\{D_i\} \in R$ felbontás, amely a $\{B_i \cap C_j\}$ felbontásnak rész-felbontása. Világos, hogy $\{B_i\} < \{D_i\}$ és $\{C_j\} < \{D_i\}$.

Ha Γ rendezett halmaz, az a_γ , $\gamma \in \Gamma$ számok összessége *határértékének* egy olyan a számot nevezünk, amelyre igaz, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan $\gamma_0 \in \Gamma$, hogy minden olyan γ -ra, melyre $\gamma_0 < \gamma$,

$$|a_\gamma - a| < \varepsilon.$$

Ilyenkor azt fogjuk írni, hogy

$$a = \lim_{\Gamma} a_\gamma.$$

Könnyen bebizonyítható, hogy az adott definíció mellett a határérték összes megszokott tulajdonságai érvényben maradnak.

Mármost a (2. 3. 1) egyenlőtlenséget a következő limesz-összefüggésként is interpretálhatjuk,

$$(2. 3. 2) \quad I(\xi, \eta) = \lim_R I(C_1, \dots, C_n).$$

Ez a limesz-egyenlőség igen hasznos lesz számunkra a következőkben.

2. 4. Integrál-képlet az információra

Ebben a pontban bizonyítjuk be GELFAND és JAGLOM, valamint PEREZ — az 1. 2 pontban már megfogalmazott — eredményét.

Először tegyük fel, hogy a $p_{\xi\eta}$ mérték nem abszolút folytonos a $p_\xi \times p_\eta$ -ra vonatkozólag. Akkor létezik olyan $B \in S_X \times S_Y$ halmaz, amelyen

$$p_{\xi\eta}(B) = a > 0, \quad p_\xi \times p_\eta(B) = 0.$$

Az

$$I(B, X \times Y \setminus B) = a \log \frac{a}{0} + (1-a) \log \frac{1-a}{1} = \infty$$

integrálösszeg és a (2. 2. 2) képlet azt bizonyítja, hogy a tekintett esetben az $I(\xi, \eta)$ információ végtelen.

Ahhoz, hogy levezethessük a céljaink szempontjából alapvető (1. 2. 6) információra vonatkozó integrál-képletet abszolút folytonosság esetében, szükségünk van egy általános egyenlőtlenségre. A következő egyszerű megállapításból fogunk kiindulni: minthogy a $\varphi(x) = x \log x$, $0 < x < \infty$ függvény konvex, azért tetszőleges $F(x)$ valószínűség-eloszlásfüggvényre

$$(2.4.1) \quad \int_0^{\infty} u \log u \, dF(u) \geq \int_0^{\infty} u \, dF(u) \log \int_0^{\infty} u \, dF(u).$$

Rögzítve a $B \in S_X \times S_Y$ halmazt, amelyre $p_{\xi} \times p_{\eta}(B) > 0$ és bevezetve az

$$F_B(u) = \frac{p_{\xi} \times p_{\eta}((a_{\xi\eta}(x, y) < u) \cap B)}{p_{\xi} \times p_{\eta}(B)}$$

jelölést, alkalmazzuk a (2. 4. 1) egyenlőtlenséget erre az eloszlásfüggvényre. Minthogy

$$(2.4.2) \quad \int_0^{\infty} u \, dF_B(u) = \frac{1}{p_{\xi} \times p_{\eta}(B)} \int_B a_{\xi\eta}(x, y) p_{\xi} \times p_{\eta}(dx, dy) = \frac{p_{\xi\eta}(B)}{p_{\xi} \times p_{\eta}(B)}$$

és

$$(2.4.3) \quad \int_0^{\infty} u \log u \, dF_B(u) = \frac{1}{p_{\xi} \times p_{\eta}(B)} \int_B \log a_{\xi\eta}(x, y) p_{\xi\eta}(dx, dy),$$

azért a (2. 4. 1) egyenlőtlenség alapján tetszőleges olyan B halmazra, amelyre $p_{\xi} \times p_{\eta}(B) > 0$, fennáll, hogy

$$(2.4.4) \quad \int_B \log a_{\xi\eta}(x, y) p_{\xi\eta}(dx, dy) \geq p_{\xi\eta}(B) \log \frac{p_{\xi\eta}(B)}{p_{\xi} \times p_{\eta}(B)}.$$

Figyelembe véve azt, hogy $p_{\xi\eta}$ abszolút folytonos $p_{\xi} \times p_{\eta}$ -ra vonatkozólag és hogy a $0 \log \frac{0}{a} = 0$ összefüggést fogadtuk el, látjuk, hogy a (2. 4. 4) egyenlőtlenség igaz $p_{\xi} \times p_{\eta}(B) = 0$ esetre is, azaz igaz tetszőleges $B \in S_X \times S_Y$ -ra is. Megjegyezzük továbbá, hogy a (2. 4. 4) egyenlőtlenség jobb oldalán álló (esetleg divergens) integrálnak mindig van értelme, minthogy negatív része mindig véges. Ez például abból látható, hogy semilyen B -re nem lehet a (2. 4. 4) egyenlőtlenség bal oldala $-\frac{1}{2}$ -nél kisebb, mivelhogy $-\frac{1}{2}$ épp az $x \log x$ függvény minimumával egyenlő.

Vegyük az $X \times Y$ tér valamilyen $\{C_i\}$ felbontását. Alkalmazva (2. 4. 4)-et minden egyes C_i -re, látjuk, hogy

$$I(C_1, \dots, C_n) \leq \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \log a_{\xi\eta}(x, y) p_{\xi\eta}(dx, dy) = \int_{X \times Y} \log a_{\xi\eta}(x, y) p_{\xi\eta}(dx, dy).$$

Ezért

$$(2.4.5) \quad I(\xi, \eta) \leq \int_{X \times Y} \log a_{\xi\eta}(x, y) p_{\xi\eta}(dx, dy).$$

Most be kell bizonyítanunk, hogy (2.4.5)-ben valójában az egyenlőség áll fenn. Adjunk meg valamilyen $\varepsilon > 0$ számot és válasszuk a $K > 0$ konstansot oly nagyra, hogy a

$$(2.4.6) \quad 0 \cong p_{\xi\eta}\{|\log a_{\xi\eta}(x, y)| > K\} \log p_{\xi\eta}\{|\log a_{\xi\eta}(x, y)| > K\} \cong -\frac{\varepsilon}{2}$$

egyenlőtlenségek fennálljanak. Ez lehetséges, mert $x \log x \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow 0$. Továbbá a

$$\{|\log a_{\xi\eta}(x, y)| \leq K\}$$

halmaz előállítható egymást nem metsző $C_i \in S_X \times S_Y$ ($i = 1, \dots, n$) halmazok összege alakjában, úgy, hogy ha

$$\underline{h}_i = \inf_{(x, y) \in C_i} a_{\xi\eta}(x, y), \quad \bar{h}_i = \sup_{(x, y) \in C_i} a_{\xi\eta}(x, y),$$

akkor minden i -re

$$(2.4.7) \quad \log \bar{h}_i - \log \underline{h}_i \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jegyezzük meg, hogy ekkor minden i -re

$$(2.4.8) \quad \bar{h}_i \cong \frac{p_{\xi\eta}(C_i)}{p_\xi \times p_\eta(C_i)} \cong \underline{h}_i.$$

Továbbá, hogy

$$(2.4.9) \quad p_{\xi\eta}(C_i) \log \bar{h}_i \cong \int_{C_i} \log a_{\xi\eta}(x, y) p_{\xi\eta}(dx, dy) \cong p_{\xi\eta}(C_i) \log \underline{h}_i.$$

(2.4.8)-ből és (2.4.9)-ből következik, hogy

$$(2.4.10) \quad \left| p_{\xi\eta}(C_i) \log \frac{p_{\xi\eta}(C_i)}{p_\xi \times p_\eta(C_i)} - \int_{C_i} \log a_{\xi\eta}(x, y) p_{\xi\eta}(dx, dy) \right| \leq (\log \bar{h}_i - \log \underline{h}_i) p_{\xi\eta}(C_i).$$

Összegezve i szerint a (2.4.10) egyenlőtlenségeket és (2.4.7)-et figyelembe véve látjuk, hogy

$$(2.4.11) \quad \left| I(C_1, \dots, C_n) - \int_{\{\log a_{\xi\eta}(x, y) \leq K\}} \log a_{\xi\eta}(x, y) p_{\xi\eta}(dx, dy) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen $C_{n+1} = \{\log a_{\xi\eta}(x, y) < K\}$, ekkor a $C_1, \dots, C_{n+1}$ halmazok rendszere az $X \times Y$ tér egy felbontása. (2.4.6)-ból és (2.4.11)-ből azt kapjuk, hogy

$$(2.4.12) \quad I(C_1, \dots, C_{n+1}) \cong \int_{\{\log a_{\xi\eta}(x, y) \leq K\}} \log a_{\xi\eta}(x, y) p_{\xi\eta}(dx, dy) - \varepsilon.$$

Mint hogy ε tetszőleges, K -t pedig tetszőlegesen nagyra lehet választani, azért (2. 2. 2)-ből következik, hogy

$$(2. 4. 13) \quad I(\xi, \eta) \cong \int_{X \times Y} \log a_{\xi\eta}(x, y) p_{\xi\eta}(dx, dy).$$

A (2. 4. 5) és (2. 4. 13) egyenlőtlenségek együtt bizonyítják az (1. 2. 6) integrálképlet első felét. E képlet második fele a mértékelmélet egyes általános tételeiből következik (l. [23], 32. §. 2. tétel).

2. 5. Valószínűségi változó függvényének információja

Tegyük fel, hogy a ξ és η valószínűségi változók értékei az (X, S_X) illetve (Y, S_Y) mérhető terekbe esnek. Ezenkívül tegyük fel, hogy adva van az $(\bar{X}, S_{\bar{X}})$ mérhető tér és adva van az $f(x)$, $x \in X$ mérhető függvény, melynek értékei az $\bar{X}$ térbe tartoznak. Akkor az elemi események $f(\xi)$ összetett függvénye olyan valószínűségi változó lesz, melynek értékei $\bar{X}$ -ba tartoznak. Be akarjuk bizonyítani, hogy

$$(2. 5. 1) \quad I(f(\xi), \eta) \leq I(\xi, \eta).$$

Tetszőleges $B \subset \bar{X}$ halmazra jelöljük $f^{-1}(B)$ -vel azon $x \in X$ pontok összességét, amelyekre $f(x) \in B$. A mérhető függvény definíciójából következik, hogy $B \in S_{\bar{X}}$ esetén az $f^{-1}(B)$ halmazra fennáll: $f^{-1}(B) \in S_X$. Világos, hogy

$$(2. 5. 2) \quad p_{\xi}(f^{-1}(B)) = p_{f(\xi)}(B),$$

és $C \in S_Y$ mellett

$$(2. 5. 3) \quad p_{\xi\eta}(f^{-1}(B) \times C) = p_{f(\xi)\eta}(B \times C).$$

Ha a $B_1, \dots, B_n$ halmazok rendszere az $\bar{X}$ tér egy felbontását alkotja, akkor az $f^{-1}(B_1), \dots, f^{-1}(B_n)$ halmazok rendszere az X tér egy felbontását fogja adni. (2. 5. 2) és (2. 5. 3)-mal együtt ez azt mutatja, hogy az a tetszőleges integrálösszeg, amely az $I(f(\xi), \eta)$ -ra adott (1. 2. 3) definícióban a felső határ jele után áll, egyike lesz az $I(\xi, \eta)$ -ra adott (1. 2. 3) definícióban szereplő integrálösszegeknek. Ebből rögtön következik a bennünket érdeklő (2. 5. 1) egyenlőtlenség.

2. 6. Egy azonosság három változó információjára

Tegyük fel, hogy adva van három valószínűségi változó, ξ , η és ζ , melyek értékei sorra az (X, S_X) , (Y, S_Y) és (Z, S_Z) mérhető terekbe tartoznak. Akkor fennáll a következő általános azonosság:

$$(2. 6. 1) \quad I((\xi, \eta), \zeta) + I(\xi, \eta) = I(\xi, (\eta, \zeta)) + I(\eta, \zeta).$$

(A (ξ, η) és az (η, ζ) jelöléseket illetőleg lásd az 1. 2 pontot. Abban állapotunk meg, hogy $\infty + a = \infty$, ahol $0 \leq a \leq \infty$.)

Ennek az azonosságnak a levezetéséhez tekintsük az X , Y , illetve a Z terek $\{A_i\}$ ($i=1, \dots, m$), $\{B_j\}$ ($j=1, \dots, n$), illetve $\{C_k\}$ ($k=1, \dots, q$) felbontásait. Alább

megmutatjuk, hogy

$$(2.6.2) \quad I((\xi, \eta), \zeta) + I(\xi, \eta) = \\ = \lim_{R_{XYZ}} \sum_{i,j,k} p_{\xi\eta\zeta}(A_i \times B_j \times C_k) \log \frac{p_{\xi\eta\zeta}(A_i \times B_j \times C_k)}{p_\xi \times p_\eta \times p_\zeta(A_i \times B_j \times C_k)},$$

ahol az egymásrakövetkezés fogalma az $X \times Y \times Z$ tér $\{A_i \times B_j \times C_k\}$ alakú felbontásainak R_{XYZ} összességére vonatkozólag ugyanúgy van bevezetve, mint ahogy ez a 2.3 pontban történt. A $p_{\xi\eta\zeta}$ és $p_\xi \times p_\eta \times p_\zeta$ eloszlások definiálása valószínűségi változó-párok eloszlásainak az 1.2 pontban megadott definíciója kézenfekvő analógiájaként történik. Minthogy a (2.6.2) egyenlőség jobb oldala nem változik meg a ξ, η, ζ változók permutálásakor, azért (2.6.2)-ből következik (2.6.1).

Megjegyezzük, hogy az $\{A_i \times B_j\}$ ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$) típusú felbontások R_{XY} osztálya eleget tesz a 2.2 pontban kimondott tétel feltételeinek, úgyhogy a 2.3 pont eredményeinek megfelelően

$$(2.6.3) \quad I(\xi, \eta) = \lim_{R_{XY}} \sum_{i,j} p_{\xi\eta}(A_i \times B_j) \log \frac{p_{\xi\eta}(A_i \times B_j)}{p_\xi \times p_\eta(A_i \times B_j)}.$$

Hasonlóan az $(X \times Y) \times Z = X \times Y \times Z$ tér $\{A_i \times B_j \times C_k\}$ ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n; k=1, \dots, q$) típusú felbontásainak R_{XYZ} osztálya eleget tesz az említett tétel feltételeinek, ha a (ξ, η) és ζ változókkal képezett párra akarjuk alkalmazni, úgyhogy (figyelembe véve, hogy $p_{(\xi, \eta)\zeta}(\cdot) = p_{\xi\eta\zeta}(\cdot)$)

$$(2.6.4) \quad I((\xi, \eta), \zeta) = \lim_{R_{XYZ}} \sum_{i,j,k} p_{\xi\eta\zeta}(A_i \times B_j \times C_k) \log \frac{p_{\xi\eta\zeta}(A_i \times B_j \times C_k)}{p_{\xi\eta}(A_i \times B_j) p_\zeta(C_k)}.$$

Megjegyezzük, hogy

$$(2.6.5) \quad p_{\xi\eta}(A_i \times B_j) = \sum_{k=1}^q p_{\xi\eta\zeta}(A_i \times B_j \times C_k)$$

és így (2.6.3)-at a következő alakra hozhatjuk:

$$(2.6.6) \quad I(\xi, \eta) = \lim_{R_{XYZ}} \sum_{i,j,k} p_{\xi\eta\zeta}(A_i \times B_j \times C_k) \log \frac{p_{\xi\eta}(A_i \times B_j)}{p_\xi(A_i) \times p_\eta(B_j)}.$$

A (2.6.4) és (2.6.6) egyenlőségeket összevetve közvetlenül levezethetjük a keresett (2.6.2) egyenlőséget.

2.7. A feltételes információ képlete

Ha ξ, η és ζ három valószínűségi változó, akkor fennáll a következő fontos összefüggés, amelyet A. N. KOLMOGOROV adott meg:

$$(2.7.1) \quad I((\xi, \eta), \zeta) = I(\xi, \zeta) + MI(\eta, \zeta/\xi).$$

Itt $I(\eta, \zeta/\xi)$ az η és ζ változópár azon feltétel mellett kiszámított információja, hogy ξ valamilyen rögzített értéket vett fel. Mielőtt pontos meghatározását adnánk a

(2. 7. 1) képletben szereplő változóknak és bemutatnánk e képlet bizonyítását, tárgyalni fogjuk azt az egyszerű speciális esetet, amidőn a ξ , η és ζ változók eloszlásait eloszlás-sűrűségekkel adjuk meg. Tegyük fel, hogy $p_{\xi\eta\zeta}(x, y, z)$, $p_{\xi\eta}(x, y)$, $p_{\xi\zeta}(x, z)$, $p_{\xi}(x)$, $p_{\zeta}(z)$ a megfelelő valószínűségi változók együttes és egydimenziós sűrűségei. A feltételes sűrűségeket, mint szokásos, a következő összefüggések határozzák meg:

$$p_{\eta\zeta/\xi}(y, z; x) = \frac{p_{\xi\eta\zeta}(x, y, z)}{p_{\xi}(x)},$$

$$p_{\eta/\xi}(y; x) = \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_{\xi}(x)},$$

$$p_{\zeta/\xi}(z; x) = \frac{p_{\xi\zeta}(x, z)}{p_{\xi}(x)}.$$

Ebben az esetben

$$\begin{aligned} I((\xi, \eta), \zeta) &= \iiint \left[\log \frac{p_{\xi\eta\zeta}(x, y, z)}{p_{\xi\eta}(x, y)p_{\zeta}(z)} \right] p_{\xi\eta\zeta}(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \iiint \left[\log \frac{p_{\eta\zeta/\xi}(y, z; x)}{p_{\eta/\xi}(y; x)p_{\zeta/\xi}(z; x)} \frac{p_{\xi\zeta}(x, z)}{p_{\xi}(x)p_{\zeta}(z)} \right] p_{\xi\eta\zeta}(x, y, z) dx dy dz = \\ (2. 7. 2) \quad &= \iint \left[\log \frac{p_{\xi\zeta}(x, z)}{p_{\xi}(x)p_{\zeta}(z)} \right] p_{\xi\zeta}(x, z) dx dz + \\ &+ \iint \left[\log \frac{p_{\eta\zeta/\xi}(y, z; x)}{p_{\eta/\xi}(y; x)p_{\zeta/\xi}(z; x)} \right] p_{\xi\eta\zeta}(x, y, z) dy dz \Big\} dx. \end{aligned}$$

Az összeadandó a (2. 7. 2) egyenlőség utolsóelőtti sorában nem más, mint az $I(\xi, \zeta)$ információ. A második összeadandó kapcsos zárójelei között szereplő kettős integrált kézenfekvő úgy interpretálni, mint az $I(\eta, \zeta/\xi)$ feltételes információt, úgyhogy a 2. 7. 2 képlet a (2. 7. 1) képlet egy variánsának tekinthető.

Térjünk most rá az általános esetre. Legyen adva három valószínűségi változó, ξ , η és ζ , amelyek értékei sorra az (X, S_X) , (Y, S_Y) , (Z, S_Z) mérhető terekbe tartoznak. Tetszőleges $A \in S_Y$ halmazra tekintsük most a következő feltételes valószínűséget:

$$(2. 7. 3) \quad P\{\eta \in A / \xi = x\} = p_{\eta/\xi}(A/x).$$

Mint ismeretes (l. [9]) a $p_{\eta/\xi}(A/x)$ függvény rögzített A esetén az $x \in X$ mérhető függvénye lesz, amely az x értékek 0 p_{ξ} -mértékű halmazától eltekintve egyértelműen van meghatározva. Ismeretes, hogy egymást nem metsző halmazok tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots, A_n \in S_Y$ sorozatára a p_{ξ} mérték szerint majdnem mindenütt fennáll a következő egyenlőség:

$$(2. 7. 4) \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_{\eta/\xi}(A_i/x) = p_{\eta/\xi}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i/x\right)$$

(1. [9], 8. §). Analóg tulajdonságokkal rendelkeznek a

$$(2.7.5) \quad p_{\zeta/\xi}(B/x) = P\{\zeta \in B/\xi = x\}$$

feltételes valószínűségek is — úgyhogy diszjunkt halmazok tetszőleges $B_1, \dots, B_n, \dots$, $B_n \in S_Z$ sorozatára p_ξ szerint majdnem mindenütt

$$(2.7.6) \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_{\zeta/\xi}(B_i/x) = p_{\zeta/\xi}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i/x\right).$$

Most meg akarjuk határozni az általános esetben is az η és ζ változókból álló pár feltételes információ-sűrűségét, adott ξ mellett. Ehhez a legkézenfekvőbbnek a következő feltételes valószínűség-eloszlások felhasználása látszik:

$$p_{\eta, \zeta/\xi}\{D/x\} \quad \text{és} \quad p_{\eta/\xi} \times p_{\zeta/\xi}\{D/x\}, \quad D \in S_Y \times S_Z$$

(e változók közül a másodikat kézenfekvő a $D = A \times B$ halmazokra — $A \in S_Y$, $B \in S_Z$ — úgy meghatározni, hogy $p_{\eta/\xi} \times p_{\zeta/\xi}(D/x) = p_{\zeta/\xi}(A/x)p_{\eta/\xi}(B/x)$ legyen), és ezekkel ugyanúgy járunk el, mint ahogy azt a közönséges információ-sűrűség meghatározásában a feltétel nélküli valószínűség-eloszlásoknál tettük. Sajnos azonban, ha ezt ilyen direkt módon hajtánánk végre, le kellene szűkíteni az általunk vizsgált valószínűségi változó-osztályt, minthogy a feltételes valószínűség-eloszlások távolról sem rendelkeznek mindig a számunkra szükséges és (szemléletes szempontból) kézenfekvő tulajdonságokkal (részletesebben I. [9], 9. §).

Épp ezért kissé más utat követünk. Tegyük fel, hogy adva vannak az $A \in S_Y$, $B \in S_Z$ és $C \in S_X$ halmazok. Legyen

$$(2.7.7) \quad p_{\eta \times \zeta/\xi}(C \times A \times B) = \int_C p_{\eta/\xi}(A/x) p_{\zeta/\xi}(B/x) p_\xi(dx).$$

(2.7.4) és (2.7.6)-ból nyilvánvalóan következik, hogy a $p_{\eta \times \zeta/\xi}$ függvény teljesen additív a $C \times A \times B$ típusú halmazok összességén, ahol $A \in S_Y$, $B \in S_Z$, $C \in S_X$. Ezért (I. [24]) egyértelműen kiterjeszthető olyan $p_{\eta \times \zeta/\xi}(\cdot)$ valószínűségi mértékké, amely az $S_X \times S_Y \times S_Z$ σ -algebra összes elemein definiálva van. Azt fogjuk mondani, hogy létezik az η, ζ változó-pár feltételes információ-sűrűsége adott ξ változó mellett, ha a $p_{\eta \times \zeta/\xi}$ valószínűségi mérték abszolút folytonos a $p_{\eta \times \zeta/\xi}$ valószínűségi mértékre vonatkoztatva. Az η, ζ változó-pár feltételes információ-sűrűségének adott ξ mellett a következő kifejezést fogjuk nevezni:

$$(2.7.8) \quad i_{\eta \times \zeta/\xi}(\cdot, \cdot, \cdot) = \log \frac{dp_{\eta \times \zeta/\xi}(\cdot)}{dp_{\eta \times \zeta/\xi}(\cdot)}.$$

A feltételes információ-sűrűség olyan függvény, amely mérhető a $S_X \times S_Y \times S_Z$ σ -algebrára vonatkozólag és 0 $p_{\eta \times \zeta/\xi}$ mértékű halmaztól eltekintve — vagy: az abszolút folytonosság folytán 0 $p_{\eta \times \zeta/\xi}$ mértékű halmaztól eltekintve — egyértelműen definiálva van. Meg fogjuk mutatni, hogy ha létezik az $i_{(\xi, \eta), \zeta}$ információ-sűrűség, akkor létezik az $i_{\xi, \eta}$ információ-sűrűség és az $i_{\eta \times \zeta/\xi}$ feltételes információ-sűrűség is, emellett a $p_{\eta \times \zeta/\xi}$ mérték szerint majdnem mindenütt fennáll a következő egyenlőség:

$$(2.7.9) \quad i_{(\xi, \eta), \zeta}(x, y, z) = i_{\xi, \eta}(x, y) + i_{\eta \times \zeta/\xi}(x, y, z).$$

Az η, ζ változókból álló pár ξ adott értéke mellett vett átlagos feltételes információ-jának fogjuk nevezni a következő integrált:

$$(2.7.10) \quad MI(\eta, \zeta/\xi) = \int_{X \times Y \times Z} i_{\eta\zeta/\xi}(x, y, z) p_{\xi\eta\zeta}(dx, dy, dz) = Mi_{\eta\zeta/\xi}(\xi, \eta, \zeta),$$

amennyiben az integrál alatt álló információ-sűrűség létezik. Ha ez a sűrűség nem létezik, azt mondjuk, hogy

$$(2.7.10') \quad MI(\eta, \zeta/\xi) = +\infty.$$

Meg fogjuk mutatni, hogy a

$$(2.7.11) \quad MI(\eta, \zeta/\xi) \geq 0,$$

egyenlőtlenség mindig fennáll és le fogjuk vezetni a feltételes információra vonatkozó következő képletet:³

$$(2.7.12) \quad I((\xi, \eta), \zeta) = I(\xi, \zeta) + MI(\eta, \zeta/\xi).$$

Ha már ismertnek tekintjük a feltételes információ képletét, akkor a (2.7.11) egyenlőtlenséget abból is levezethetjük, hogy — a 2.5 pont eredményeinek megfelelően —

$$I((\xi, \eta), \zeta) \geq I(\xi, \zeta).$$

Másrészt a (2.7.11) egyenlőtlenséget közvetlenül is megkaphatjuk. Ugyanis a 2.1—2.5 pontokban szereplő gondolatmenet szó szerint átvihető a minket érdeklő esetre akkor, ha az ezen pontokban vizsgált $X \times Y$ teret és $p_{\xi} \times p_{\eta}$, valamint $p_{\xi\eta}$ mértékeket az $X \times Y \times Z$ térrel, illetve a $p_{\eta \times \zeta/\xi}$ és $p_{\xi\eta\zeta}$ mértékekkel helyettesítjük. Speciálisan, ezen a módon az átlagos feltételes információ előállítható mint információ összegek határértéke.

A most megfogalmazott állítások levezetését a következő állítás bizonyításával kezdjük: ha a $p_{\xi\zeta}$ mérték abszolút folytonos a $p_{\xi} \times p_{\zeta}$ mértékre vonatkozólag, azaz ha létezik az $i_{\xi\zeta}(x, z)$ információ-sűrűség, akkor a $p_{\eta \times \zeta/\xi}$ mérték abszolút folytonos a $p_{\xi\eta} \times p_{\zeta}$ mértékre vonatkozólag, és ha bevezetjük a

$$\frac{dp_{\xi\zeta}(\cdot)}{dp_{\xi} \times p_{\zeta}(\cdot)} = 2^{i_{\xi\zeta}(x, z)} = a_{\xi\zeta}(x, z),$$

$$\frac{dp_{\eta \times \zeta/\xi}(\cdot)}{dp_{\xi\eta} \times p_{\zeta}(\cdot)} = \hat{a}(x, y, z)$$

³ Nem adtuk meg az $I(\eta, \zeta/\xi)$ feltételes információ definícióját. Ennek megfelelően az M szimbólumot, amely az átlagos feltételes információ jelölésében fellép, nem tekinthetjük úgy, mint a várható érték jelét. Abban az esetben, amidőn az $i_{\eta\zeta/\xi}$ sűrűség létezik, kézenfekvő a következőt írni:

$$I(\eta, \zeta/\xi) = M\{i_{\eta\zeta/\xi}(\xi, \eta, \zeta)\}.$$

Ekkor $MI(\eta, \zeta/\xi) = M\{I(\eta, \zeta/\xi)\}$. Mindazonáltal, ha az $i_{\eta\zeta/\xi}$ sűrűség nem létezik, további konst-rukciókra lenne szükség. A következőkben csak az átlagos feltételes információt fogjuk használni.

A szokásnak megfelelően abban állapotunk meg, hogy $\infty + a = \infty$, ahol $0 \leq a \leq \infty$.

jelöléseket, akkor a $p_{\xi\eta} \times p_\zeta$ mérték szerint majdnem mindenütt fennáll a következő egyenlőség:

$$(2.7.13) \quad a_{\xi\zeta}(x, z) = \hat{a}(x, y, z).$$

Először is megjegyezzük, hogy tetszőleges $f(x, z)$ függvényre, mely mérhető az $S_X \times S_Z$ σ -algebrára vonatkozólag, valamint tetszőleges $A \in S_Y$ halmazra

$$(2.7.14) \quad \begin{aligned} & \int_{X \times A \times Z} f(x, z) p_{\xi\eta} \times p_\zeta(dx, dy, dz) = \\ & = \int_{X \times Z} f(x, z) p_{\eta/\xi}(A/x) p_\xi \times p_\zeta(dx, dz). \end{aligned}$$

Valóban, ha

$$(2.7.15) \quad f(x, z) = \begin{cases} 1, & (x, z) \in C \times B, \\ 0, & (x, z) \notin C \times B, \end{cases}$$

ahol $C \in S_X$, $B \in S_Z$, akkor (2.7.14) a következő egyenlőség sorozatra redukálódik:

$$(2.7.16) \quad \begin{aligned} & \int_{C \times A \times B} p_{\xi\eta} \times p_\zeta(dx, dy, dz) = \int_{C \times A} p_{\xi\eta}(dx, dy) \int_B p_\zeta(dz) = \\ & \int_C p_{\eta/\xi}(A/x) p_\xi(dx) \int_B p_\zeta(dz) = \int_{C \times B} p_{\eta/\xi}(A/x) p_\xi \times p_\zeta(dx, dz). \end{aligned}$$

(2.7.16) közvetlenül adódik a mértékek szorzatának, valamint a feltételes valószínűségnek a definíciójából. Minthogy a $C \times B$ típusú halmazok generálják az egész $S_X \times S_Z$ σ -algebrát, a (2.7.16) típusú függvények lineáris kombinációival tetszőleges, az $S_X \times S_Z$ -re vonatkozólag mérhető függvény megközelíthető. Ezért (2.7.16)-ból következik (2.7.14).

Alkalmazzuk most (2.7.14)-et $f(x, z)$ következő megválasztása mellett:

$$f(x, z) = \begin{cases} a_{\xi\zeta}(x, z), & (x, z) \in C \times B, \\ 0, & (x, z) \notin C \times B, \end{cases}$$

ahol $C \in S_X$, $B \in S_Z$. Akkor

$$(2.7.17) \quad \int_{C \times A \times B} a_{\xi\zeta}(x, z) p_{\xi\eta} \times p_\zeta(dx, dy, dz) = \int_{C \times B} a_{\xi\zeta}(x, z) p_{\eta/\xi}(A/x) p_\xi \times p_\zeta(dx, dz).$$

Felhasználva mérték mértékszerinti deriváltjának egy ismert tulajdonságát (l. [24], 32. §, 1. tétel), (2.7.17)-et a következő alakra hozhatjuk:

$$(2.7.18) \quad \int_{C \times A \times B} a_{\xi\zeta}(x, z) p_{\xi\eta} \times p_\zeta(dx, dy, dz) = \int_{C \times B} p_{\eta/\xi}(A/x) p_{\xi\zeta}(dx, dz).$$

Mármost megjegyezzük, hogy tetszőleges $f(x)$ függvényre, mely S_X -re vonatkozólag mérhető és tetszőleges $B \in S_Z$ -re

$$(2.7.19) \quad \int_{X \times B} f(x) p_{\xi\zeta}(dx, dz) = \int_X f(x) p_{\eta/\xi}(B/x) p_\xi(dx).$$

A (2. 7. 19) egyenlőség ugyanazzal a módszerrel bizonyítható, amellyel a (2. 7. 14) egyenlőséget levezettük. Bevezetve az

$$f(x) = \begin{cases} p_{\eta/\xi}(A/x), & x \in C, \\ 0, & x \notin C \end{cases}$$

jelölést és alkalmazva (2. 7. 19)-et, (2. 7. 18)-ból, és (2. 7. 7)-ből levezethető, hogy

$$(2. 7. 20) \quad \int_{C \times A \times B} a_{\xi\xi}(x, z) p_{\xi\eta} \times p_{\xi}(dx, dy, dz) = \\ = \int_C p_{\eta/\xi}(A/x) p_{\xi/\xi}(B/x) p_{\xi}(dx) = p_{\eta \times \xi/\xi}(C \times A \times B).$$

Minthogy a $C \times A \times B$ (ahol $C \in S_X$, $A \in S_Y$, $B \in S_Z$) típusú halmazok generálják az egész $S_X \times S_Y \times S_Z$ σ -algebrát, azért (2. 7. 20)-ból következik, hogy tetszőleges $E \in S_X \times S_Y \times S_Z$ -re

$$(2. 7. 21) \quad \int_E a_{\xi\xi}(x, z) p_{\xi\eta} \times p_{\xi}(dx, dy, dz) = p_{\eta \times \xi/\xi}(E).$$

Az $\hat{a}(x, y, z)$ függvény definíciója folytán (2. 7. 21)-ből következik a (2. 7. 13) egyenlőség.

Most be fogjuk bizonyítani, hogy az $i_{(\xi, \eta), \xi}$ információ-sűrűség létezéséből következik az $i_{\xi\xi}$ információ-sűrűség létezése. Valóban, állításunkkal ellentétben tegyük fel, hogy a $p_{\xi\xi}(\cdot)$ mérték nem abszolút folytonos a $p_{\xi} \times p_{\xi}(\cdot)$ mértékre vonatkozólag. Akkor valamilyen $C \in S_X \times S_Z$ -re fennállna, hogy

$$p_{\xi\xi}(C) > 0, \quad p_{\xi} \times p_{\xi}(C) = 0.$$

De akkor $\tilde{C} = C \times Y \in S_X \times S_Y \times S_Z$ -re

$$p_{\xi\eta\xi}(\tilde{C}) = p_{\xi\xi}(C) > 0, \quad p_{\xi\eta} \times p_{\xi}(\tilde{C}) = p_{\xi} \times p_{\xi}(C) = 0,$$

ami nem egyeztethető össze a $p_{(\xi, \eta), \xi}$ mértéknek a $p_{\xi\eta} \times p_{\xi}$ mértékre vonatkoztatott abszolút folytonosságával, azaz nem egyeztethető össze az $i_{(\xi, \eta), \xi}$ információ-sűrűség létezésével.

A következő lépésben az $i_{(\xi, \eta), \xi}$ sűrűség létezéséből levezetjük az $i_{\xi\eta/\xi}$ feltételes információ-sűrűség létezését. Ezzel kapcsolatban már tudjuk, hogy létezik az $a_{\xi\xi}$ sűrűség, következésképp jogosult a (2. 7. 13) képlet felhasználása. Adjunk meg egy olyan tetszőleges $E \in S_X \times S_Y \times S_Z$ halmazt, amelyre

$$p_{\eta \times \xi/\xi}(E) = 0.$$

A (2. 7. 13) képlet szerint:

$$(2. 7. 22) \quad p_{\eta \times \xi/\xi}(E) = \int \int \int_E a_{\xi\xi}(x, z) p_{\xi\eta} \times p_{\xi}(dx, dy, dz).$$

Ezért az E halmaz előállítható az

$$E = E_1 + E_2$$

összeg formájában, úgy, hogy fennállnak a következők:

$$(2.7.23) \quad p_{\xi\eta} \times p_{\zeta}(E_1) = 0$$

és

$$(2.7.24) \quad a_{\xi\zeta}(x, z) = 0, \quad (x, y, z) \in E_2.$$

Az $i_{(\xi\eta)\zeta}$ információ-sűrűség létezésének feltevéséből és (2.7.23)-ból következik, hogy

$$(2.7.25) \quad p_{\xi\eta\zeta}(E_1) = 0.$$

Jelöljük D -vel azon (x, z) pontok halmazát, melyekre

$$a_{\xi\zeta}(x, z) = 0.$$

Világos, hogy $E_2 \subset D \times Y$, továbbá, hogy

$$p_{\xi\zeta}(D) = \int_D \int a_{\xi\zeta}(x, z) p_{\xi} \times p_{\zeta}(dx, dz) = 0.$$

Ezért

$$(2.7.26) \quad p_{\xi\eta\zeta}(E_2) \leq p_{\xi\eta\zeta}(D \times Y) = p_{\xi\zeta}(D) = 0.$$

(2.7.25) és (2.7.26)-ból következik, hogy

$$p_{\xi\eta\zeta}(E) = 0,$$

amivel bebizonyítottuk, hogy a $p_{\xi\eta\zeta}$ mérték abszolút folytonos a $p_{\eta \times \zeta/\xi}$ mértékre vonatkozólag.

Most tegyük fel, hogy léteznek az $i_{\xi\zeta}$ és $i_{\eta\zeta/\xi}$ információ-sűrűségek. Akkor léteznek a következő sűrűségek is:

$$a_{\eta\zeta/\xi}(\cdot) = \frac{dp_{\xi\eta\zeta}}{dp_{\eta \times \zeta/\xi}(\cdot)}, \quad \hat{a}(\cdot) = \frac{dp_{\eta \times \zeta/\xi}(\cdot)}{dp_{\xi\eta} \times p_{\zeta}(\cdot)}.$$

A mértékelmélet egy ismert tétele következtében (l. [24], 32. §, 1. tétel) ebben az esetben létezik a

$$(2.7.27) \quad \frac{dp_{\xi\eta\zeta}(\cdot)}{dp_{\xi\eta} \times p_{\zeta}(\cdot)} = a_{\eta\zeta/\xi}(x, y, z) \hat{a}(x, y, z)$$

derivált is. Felhasználva (2.7.13)-at, majd logaritmust véve, (2.7.27)-ből levezethetjük a (2.7.9) képletet az információ-sűrűségre.

Hogy levezethessük magát a (2.7.12) feltételes információ képletét, meg kell jegyeznünk, hogy ha az $i_{(\xi,\eta),\zeta}$ információ-sűrűség létezik, akkor igaz a (2.7.9) képlet, s ebből (2.7.12) egyszerű integrálással levezethető. Ha ez a sűrűség nem létezik, akkor (2.7.13) és (2.7.27) azt mutatják, hogy az $i_{\xi\zeta}$ és $i_{\eta\zeta/\xi}$ sűrűségek egyike nem is létezhet, úgyhogy a (2.7.12) egyenlőség a különben is igaz $\infty + a = \infty$ képletre redukálódik.

2. 8. Markov-láncot képező változók információja

Most a következő általános tényt bizonyítjuk be. Ha a ξ_1, ξ_2, ξ_3 változók Markov-láncot képeznek (a definíciót l. az 1.6. pontban), akkor

$$(2. 8. 1) \quad I((\xi_1, \xi_2), \xi_3) = I(\xi_2, \xi_3).$$

A (2. 7. 1) feltételes információ képletének megfelelően a (2. 8. 1) egyenlőség az

$$(2. 8. 2) \quad MI((\xi_1, \xi_3)/\xi_2) = 0$$

egyenlőség következménye lesz. Most felhasználjuk a Markov-láncok következő jól ismert tulajdonságát; azon feltétel mellett, hogy ξ_2 rögzített, a ξ_1 és ξ_3 változók függetlenek. Pontosabban, tetszőleges $A \in S_{X_1}$ és $B \in S_{X_3}$ halmazokra 1 valószínűséggel fennáll a feltételes valószínűségekre vonatkozó következő egyenlőség:

$$(2. 8. 3) \quad P\{\xi_1 \in A/\xi_2\} P\{\xi_3 \in B/\xi_2\} = P\{\xi_1 \in A, \xi_3 \in B/\xi_2\}.$$

(Ennek az állításnak a bizonyítása megtalálható DOOB [9] könyvében, II. fejj. 6. §. Az a körülmény, hogy ott csupán valós értékű ξ_i változókat vizsgálnak, lényegtelen.) A feltételes valószínűség definíciója értelmében tetszőleges $C \in S_{X_2}$ halmazra fennáll:

$$(2. 8. 4) \quad \begin{aligned} P_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}(A \times C \times B) &= P\{\xi_1 \in A, \xi_2 \in C, \xi_3 \in B\} = \\ &= \int_C P\{\xi_1 \in A, \xi_3 \in B/\xi_2\} p_{\xi_2}(dx_2). \end{aligned}$$

Ezért a (2. 8. 3) egyenlőségből és a $p_{\xi_1 \times \xi_3/\xi_2}$ mérték definíciójából (l. a (2. 7. 7) egyenlőséget) következik, hogy tetszőleges $A \in S_{X_1}$, $C \in S_{X_2}$, $B \in S_{X_3}$ halmazokra

$$(2. 8. 5) \quad p_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}(A \times C \times B) = p_{\xi_1 \times \xi_3/\xi_2}(A \times C \times B).$$

Minthogy egy $A \times C \times B$ típusú halmaz generálja az egész $S_{X_1} \times S_{X_2} \times S_{X_3}$ σ -algebrát, a $p_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}$ és $p_{\xi_1 \times \xi_3/\xi_2}$ mértékek egyszerűen egybeesnek. Ezért az $i_{\xi_1 \xi_3/\xi_2}$ feltételes információ-sűrűsége fennáll

$$(2. 8. 6) \quad i_{\xi_1 \xi_3/\xi_2} \equiv 0.$$

Ebből rögtön következik (2. 8. 2), következésképp a keresett (2. 8. 1) egyenlőség is.

2. 9. Valószínűségi változók független párjainak információja és információ-sűrűsége

Legyen adva négy valószínűségi változó, $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$, amelynek értékei sorra az $(X_1, S_{X_1}), (X_2, S_{X_2}), (Y_1, S_{Y_1}), (Y_2, S_{Y_2})$ mérhető terekbe tartoznak. Tegyük fel, hogy a (ξ_1, η_1) pár nem függ a (ξ_2, η_2) pártól. Akkor az $I((\xi_1, \eta_2), (\eta_1, \eta_2))$ információra fennáll:

$$(2. 9. 1) \quad I((\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2)) = I(\xi_1, \eta_1) + I(\xi_2, \eta_2),$$

és a $p_{\xi_1\eta_1\xi_2\eta_2}$ mérték szerint majdnem mindenütt fennáll az információ-sűrűségekre vonatkozó következő egyenlőség:

$$(2.9.2) \quad i_{(\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2)}(x_1, x_2, y_1, y_2) = i_{\xi_1\eta_1}(x_1, y_1) + i_{\xi_2\eta_2}(x_2, y_2).$$

A (2.9.1) képlet nyilvánvalóan következménye a (2.9.2) képletnek és az információra megadott integrál-képletnek. Ennek folytán csak a (2.9.2) képletet fogjuk bizonyítani.

A (ξ_1, η_1) és (ξ_2, η_2) párok függetlensége maga után vonja azt a tényt, hogy a $p_{\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2}(\cdot)$ mértékre fennáll:

$$(2.9.3) \quad p_{\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2}(\cdot) = p_{\xi_1\eta_1} \times p_{\xi_2\eta_2}(\cdot).$$

Továbbá ugyanezen okból fennáll a következő:

$$(2.9.4) \quad p_{\xi_1\xi_2} \times p_{\eta_1\eta_2}(\cdot) = p_{\xi_1} \times p_{\xi_2} \times p_{\eta_1} \times p_{\eta_2}(\cdot).$$

Most felhasználjuk azt az általános tényt, hogyha az (X, S_X) téren adva vannak a p_X és $\bar{p}_X$, az (Y, S_Y) téren pedig a p_Y és $\bar{p}_Y$ valószínűségi mértékek, és ha létezik az

$$(2.9.5) \quad a_{XY}(x, y) = \frac{dP_X \times P_Y(\cdot)}{d\bar{P}_X \times \bar{P}_Y(\cdot)}$$

derivált, akkor léteznek a

$$(2.9.6) \quad a_X(x) = \frac{dp_X(\cdot)}{d\bar{p}_X(\cdot)}, \quad a_Y(y) = \frac{dp_Y(\cdot)}{d\bar{p}_Y(\cdot)}$$

deriváltak is, és $\bar{p}_X \times \bar{p}_Y$ szerint majdnem mindenütt fennáll:

$$(2.9.7) \quad a_{XY}(x, y) = a_X(x)a_Y(y).$$

Ennek az egyszerű állításnak a bebizonyításához elég megjegyezni azt, hogy tetszőleges $A \in S_X$ -re

$$p_X \times p_Y(A \times Y) = p_X(A),$$

$$\bar{p}_X \times \bar{p}_Y(A \times Y) = \bar{p}_X(A),$$

következésképp ha a $p_X \times p_Y(\cdot)$ mérték abszolút folytonos a $\bar{p}_X \times \bar{p}_Y(\cdot)$ mértékre vonatkozólag, akkor a p_X mérték is abszolút folytonos a $\bar{p}_X$ mértékre vonatkozólag. Analóg módon bizonyítható, hogy a p_Y mérték abszolút folytonos a $\bar{p}_Y$ mértékre vonatkozólag. Továbbá FUBINI tétele értelmében $A \in S_X, B \in S_Y$ mellett

$$(2.9.8) \quad \int_{A \times B} a_X(x)a_Y(y)\bar{p}_X \times \bar{p}_Y(dx, dy) = \int_A a_X(x)\bar{p}_X(dx) \int_B a_Y(y)\bar{p}_Y(dy) = \\ = p_X(A)p_Y(B) = p_X \times p_Y(A \times B).$$

Mínthogy az $A \times B$ halmazok az egész $S_X \times S_Y$ σ -algebrát generálják, (2.9.8)-ból következik, hogy tetszőleges $C \in S_X \times S_Y$ -ra

$$(2.9.9) \quad \int_C a_X(x)a_Y(y)\bar{p}_X \times \bar{p}_Y(dx, dy) = p_X \times p_Y(C).$$

(2. 9. 9)-ből a (2. 9. 5) egyenlőség a mérték mértékszerinti deriváltjának definíciója alapján következik. A keresett (2. 9. 2) azonosság mármost közvetlen eredménye a (2. 9. 5) egyenlőségnek, ha azt a $p_X(\cdot) = p_{\xi_1\eta_1}(\cdot)$, $p_Y(\cdot) = p_{\xi_2\eta_2}(\cdot)$, $\bar{p}_X(\cdot) = p_{\xi_1} \times p_{\eta_1}(\cdot)$, $\bar{p}_Y = p_{\xi_2} \times p_{\eta_2}(\cdot)$ mértékekre alkalmazzuk, — valamint az információ-sűrűség definíciójának.

2. 10. A Shannon feltételek szükségességének bizonyítása

Ebben a pontban bizonyítjuk be azt az eredményt, amelyet az 1. 6 pontban fogalmaztunk meg. Az ott használt jelölésekkel ez az eredmény úgy szól, hogy ha a $\{W\}$ közlemény átvihető a $\{Q, V\}$ távközlési csatornán, akkor

$$(2. 10. 1) \quad H(W) \leq C(Q, V).$$

Legyen $\xi, \eta, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}$ (bemeneti közlemény, bemeneti jel, kimeneti jel, kimeneti közlemény) egy közlemény átvitele lehetőségének definíciójában felhasznált valószínűségi változók sorozata. Minthogy a (ξ, η) valószínűségi változó úgy tekinthető, mint a ξ valószínűségi változó függvénye, a $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ valószínűségi változó pedig mint a $\tilde{\xi}$ függvénye, azért — kétszer alkalmazva a 2. 5 pont eredményét — azt kapjuk, hogy

$$(2. 10. 2) \quad I(\xi, \tilde{\xi}) \leq I(\xi, (\tilde{\eta}, \tilde{\xi})) \leq I((\xi, \eta), (\tilde{\eta}, \tilde{\xi})).$$

Feltevés szerint a $\xi, \eta, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}$ változók Markov-láncot képeznek. A Markov-láncok ismert tulajdonságai folytán a $\xi, \eta, (\tilde{\eta}, \tilde{\xi})$ és $\eta, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}$ valószínűségi változó-összességek ugyancsak Markov-láncot képeznek. Kétszer alkalmazva a 2. 8 pont eredményét, azt kapjuk, hogy

$$(2. 10. 3) \quad I((\xi, \eta), (\tilde{\eta}, \tilde{\xi})) = I(\eta, (\tilde{\eta}, \tilde{\xi})) = I(\eta, \tilde{\eta}).$$

(2. 10. 2) és (2. 10. 3)-ból következik, hogy

$$(2. 10. 4) \quad I(\xi, \tilde{\xi}) \leq I(\eta, \tilde{\eta}).$$

Minthogy a $\xi, \tilde{\xi}$ változók eleget tesznek a W pontossági feltételeknek, ezért (l. a közlemények entrópiája (1. 4. 8) definícióját)

$$(2. 10. 5) \quad I(\xi, \tilde{\xi}) \geq H(W).$$

Továbbá, minthogy az $(\eta, \tilde{\eta})$ változópár a (Q, V) átviteli berendezéssel van összekapcsolva (l. egy átviteli berendezés kapacitásának (1. 5. 3) definícióját),

$$(2. 10. 6) \quad I(\eta, \tilde{\eta}) \leq C(Q, V).$$

(2. 10. 4), (2. 10. 5) és (2. 10. 6)-ból következik a keresett (2. 10. 1) egyenlőtlenség.

3. §. Feinstein lemmája az átviteli berendezésekről

3. 1. Feinstein lemmájának megfogalmazása

FEINSTEIN [22] új utat mutatott SHANNON tételének megalapozásához. HINCSIN [26] ezen az úton szigorú matematikai bizonyítását adta SHANNON tételének véges memóriájú diszkrét átviteli berendezés esetére. Emellett HINCSIN kiemelte és megfogalmazta FEINSTEIN alapvetően új ötletét is, amelyet FEINSTEIN lemmájának nevezett el. Az ebben a paragrafusban levezetett eredmény Feinstein lemmájának az általunk vizsgált általános esetre szülő kiterjesztése.

Azokat a definíciókat és jelöléseket használjuk, amelyeket az 1. 5 és az 1. 7 pontokban vezettünk be.

FEINSTEIN LEMMÁJA. *Tekintsük átviteli berendezések olyan $\{Q^t, V^t\}$ sorozatát, hogy minden elegendően nagy t -re*

$$(3. 1. 1) \quad C^t(Q, V) < \infty,$$

de

$$(3. 1. 2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} C^t(Q, V) = \infty,$$

és hogy teljesülnek az 1. tétel (1. 7. 6) és IV. feltételei.

Tetszőleges adott $\varepsilon > 0$ esetében vezessük be a következő jelölést:

$$(3. 1. 3) \quad L_\varepsilon^t = [2^{(1-\varepsilon)C^t(Q,V)}].^4$$

Legyen adva továbbá a $p_1^t, \dots, p_{L_\varepsilon^t}^t$ valószínűségek olyan összessége, amelyre fennáll, hogy

$$(3. 1. 4) \quad \sum_{i=1}^{L_\varepsilon^t} p_i^t = 1$$

és

$$(3. 1. 5) \quad \max_{i=1, \dots, L_\varepsilon^t} p_i^t \leq \frac{2}{L_\varepsilon^t}.$$

Akkor található olyan nagy T , hogy minden $t \geq T$ -re megválasztható a bemeneti jelek (Y^t, S_Y^t) terében L_ε^t számú olyan $y_1^t, \dots, y_{L_\varepsilon^t}^t$ pont, — és ezen y_i^t ($i=1, \dots, L_\varepsilon^t$) pontok mindegyikéhez hozzárendelhető a kimeneti jelek $(\tilde{Y}^t, S_{\tilde{Y}}^t)$ terében egy olyan A_i^t mérhető halmaz ($A_i^t \in S_{\tilde{Y}}^t$), — hogy

I) az $A_1^t, A_2^t, \dots, A_{L_\varepsilon^t}^t$ halmazok rögzített t mellett páronként közös elemmel nem rendelkeznek,

II) tetszőleges $t \geq T$ -re

$$(3. 1. 6) \quad \sum_{i=1}^{L_\varepsilon^t} p_i^t Q^t(y_i, A_i) \geq 1 - \varepsilon,$$

III) tetszőleges $t \geq T$ -re az alábbi vektorra fennáll:

$$(3. 1. 7) \quad \left(\sum_{i=1}^{L_\varepsilon^t} p_i^t \int_{\tilde{Y}^t} \pi_1^t(y_i, \tilde{y}) Q^t(y_i, d\tilde{y}), \dots, \sum_{i=1}^{L_\varepsilon^t} p_i^t \int_{\tilde{Y}^t} \pi_N^t(y_i, \tilde{y}) Q^t(y_i, d\tilde{y}) \right) \in [\bar{V}^t]_\varepsilon.$$

⁴ [] itt az egész rész jele.

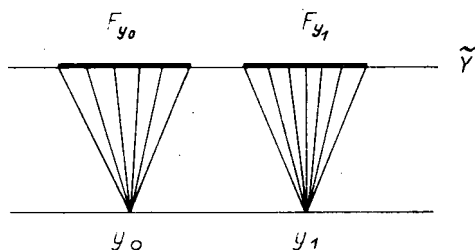
3.2. Legyezők konstrukciója

A 3.2—3.7 pontokban rögzített t_0 indexű átviteli berendezésre vonatkozó konstrukciókat hajtunk végre, s el fogjuk hagyni a t indexet az átviteli berendezéssel kapcsolatos egyes objektumok jelöléseiben. Ugyancsak rögzítettnek fogjuk tekinteni az $\varepsilon > 0$ számot és mindenütt el fogjuk hagyni az ennek megfelelő indexet is. Legyen továbbá $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$.

Tekintsük az $(Y \times \tilde{Y}, S_Y \times S_{\tilde{Y}})$ tér-szorzatot. A jelölésekre fentebb tett megjegyzésekkel egyetértésben $(\eta, \tilde{\eta})$ -mal jelöljük azon $(\eta^{t_0}, \tilde{\eta}^{t_0})$ valószínűségi változópárt, amely eleget tesz az (1. 7. 7) és (1. 7. 9) feltételnek, s ahol a változók beletartoznak az $(\eta^t, \tilde{\eta}^t)$ információstabilis sorozatba. Minthogy $(\eta, \tilde{\eta})$ -t a (Q, V) átviteli berendezés kapcsolja össze, azért $I(\eta, \tilde{\eta}) \leq C(Q, V)$. A (3. 1. 1) lemma feltételére tekintettel úgy számíthatjuk, hogy az $I(\eta, \tilde{\eta})$ információra fennáll $I(\eta, \tilde{\eta}) < \infty$. Következésképp létezik az $i_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y})$ információ-sűrűség, amely mérhető függvény az $S_Y \times S_{\tilde{Y}}$ σ -algebrára vonatkozólag. Ezért azon $(y, \tilde{y})$ pontok F halmaza, amelyet az

$$(3. 2. 1) \quad F = \{ |i_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y}) - C(Q, V)| \leq \delta C(Q, V) \}$$

feltétel határoz meg, az $S_Y \times S_{\tilde{Y}}$ σ -algebrához tartozik. Valamely $y_0 \in Y$ ponthoz tartozó *legyezőnek* az F halmaz azon metszetét fogjuk nevezni, melyet az y_0 pont



1. ábra

határoz meg (vagyis az olyan $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ pontok halmazát, melyekre $(y_0, \tilde{y}) \in F$); ezt F_{y_0} -val fogjuk jelölni. A mértékelmélet egyes jól ismert eredményeiből (l. [24], 34. §) következik, hogy tetszőleges $y \in Y$ pontra az F_y legyezőre fennáll, hogy $F_y \in S_{\tilde{Y}}$, azaz ez a legyező mérhető halmaz. Analóg módon az $\tilde{y}_0 \in \tilde{Y}$ pont $F_{\tilde{y}_0}$ legyezőjének nevezzük az F halmaz azon metszetét, amelyet az $\tilde{y}_0$ pont határoz meg. A $F_{\tilde{y}_0}$ legyezőre fennáll, hogy $F_{\tilde{y}_0} \in S_Y$.

Taglaljuk a legyező fogalmát szemléletes szempontból. Ezt a fogalmat lényegében véve maga SHANNON vezette be. Az $(\eta^t, \tilde{\eta}^t)$ sorozat információ-stabilitásából és az (1. 7. 7) feltételből következik, hogy t nagy értékeire a $p_{\eta\tilde{\eta}}(F)$ mérték közel van 1-hez. Ezért az y bemeneti jelek túlnyomó többségére a megfelelő kimeneti jel nagy valószínűséggel tartozik amazok F_y legyezőjéhez. A *legyező* elnevezés azzal az illusztrációval kapcsolatban keletkezett, amelyet maga SHANNON közölt (l. a rajzot).

Bebizonyítjuk a következő fontos állítást: A $p_{\eta}(\cdot)$ mérték szerint majdnem minden y bemeneti jelle az F_y legyező olyan, hogy fennáll a

$$(3. 2. 2) \quad p_{\tilde{\eta}}(F_y) \leq 2^{-C(Q, V)(1-\delta)}$$

egyenlőtlenség. Valóban, mindennek előtt megjegyezzük, hogy az információ definíciója (l. (1. 2. 7)) és az F halmaz (3. 2. 1) definíciója következtében

$$(3. 2. 3) \quad a_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y}) = \frac{dp_{\eta\tilde{\eta}}(., .)}{dp_{\eta} \times \tilde{p}_{\tilde{\eta}}(., .)} \cong 2^{C(Q, V)(1-\delta)} \quad \text{ha } (y, \tilde{y}) \in F.$$

Tetszőleges $G \subset F$ mérhető halmazra:

$$(3. 2. 4) \quad p_{\eta\tilde{\eta}}(G) = \int_G a_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y}) p_{\eta} \times \tilde{p}_{\tilde{\eta}}(dy, d\tilde{y}) \cong 2^{C(Q, V)(1-\delta)} p_{\eta} \times p_{\tilde{\eta}}(G).$$

Tetszőleges $A \in S_Y$ mérhető halmazra jelöljük $\hat{A}$ -kal az

$$(3. 2. 5) \quad \hat{A} = A \times \tilde{Y}$$

hengerhalmazt; így a mértékek szorzatának definíciója értelmében $p_{\eta}(A) = p_{\eta\tilde{\eta}}(\hat{A})$. Akkor a mértékek szorzatáról szóló tétel (l. [24], 35. § 2. tétel) és a (3. 2. 3) egyenlőtlenség folytán

$$(3. 2. 6) \quad \begin{aligned} \int_A p_{\tilde{\eta}}(F_{\tilde{y}}) p_{\eta}(dy) &= p_{\eta} \times p_{\tilde{\eta}}(\hat{A} \cap F) \leq \\ &\leq 2^{-C(Q, V)(1-\delta)} p_{\eta\tilde{\eta}}(\hat{A} \cap F) = 2^{-C(Q, V)(1-\delta)} p_{\eta}(A). \end{aligned}$$

Minthogy (3. 2. 6) alapján igaz az

$$\int_A p_{\tilde{\eta}}(F_{\tilde{y}}) p_{\eta}(dy) \leq 2^{-C(Q, V)(1-\delta)} p_{\eta}(A)$$

egyenlőtlenség tetszőleges mérhető $A \in S_Y$ -ra, ebből már következik a fentebb megfogalmazott (3. 2. 2) állítás.

Annak pontos analógiájára, ahogy fentebb a (3. 2. 2) egyenlőtlenséget levezettük, kimutatható, hogy a $p_{\tilde{\eta}}(\cdot)$ mérték szerint majdnem minden $\tilde{\eta}$ kimeneti jelre az $F_{\tilde{y}}$ legyező olyan, hogy

$$(3. 2. 7) \quad p_{\eta}(F_{\tilde{y}}) \leq 2^{-C(Q, V)(1-\delta)}$$

fennáll.

3. 3. A lemma bizonyításának alapgondolata

Tekintettel arra, hogy a további konstrukciók, amelyek a lemma bizonyításához szükségesek, eléggé nehézkesek és elködösítik ezen bizonyítás alapgondolatát, rövid szemléletes vázlatát adjuk ennek a bizonyításnak.

Amint már megjegyeztük, t nagy értékeire az y bemeneti jelek „jelentős része” az átviteli berendezés működésének eredményeként átmegy az F_y legyezőhöz tartozó kimeneti jelbe. Az L számú y_i pontot véletlenszerűen, p_{η} eloszlással, egymástól függetlenül választjuk meg, majd ezeket vesszük az F_{y_i} legyező keresett A_i halmazainak. Ekkor az esetek többségében teljesül a lemma II. állítása. Az alapvető nehézség abból ered, hogy az F_{y_i} legyezők metszik egymást és ezért nem teljesül a lemma I.

állítás. Ezt a nehézséget elhárítandó, F_{y_i} -t helyettesítsük az alábbi kifejezéssel:

$$\bar{F}_i = F_{y_i} \setminus \bigcup_{j \neq i} F_{y_j}.$$

Ekkor természetesen teljesül az I. feltétel, most azonban igazolni kell azt, hogy a II. feltétel továbbra is teljesül. Ehhez az kell, hogy az $F_{y_i} \cap F_{y_j}$ közös részek kicsik legyenek. Hogy ez tényleg így lesz, azt a (3. 2. 2) egyenlőtlenség mutatja, minthogy $p_{\tilde{y}}(\tilde{Y})$ 1-gyel egyenlő és az F_{y_i} legyezők mindegyike legfeljebb $2^{-C(Q,V)(1-\delta)}$ -ad részét foglalja le az $\tilde{Y}$ térnek. Ezért ésszerű azt várni, hogy ott elhelyezhető egymás metszése nélkül $L = 2^{C(Q,V)(1-\delta)}$ ilyen legyező (minthogy $\delta < \varepsilon$). Hogy pontosabbá tegyük ezt a megállapítást, megjegyezzük, hogy a rögzített $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ pont akkor és csak akkor tartozik bele egyszerre két F_{y_i} és F_{y_j} legyezőbe, ha mindkét pont, y_i és y_j az $F_{\tilde{y}}$ legyezőbe tartozik. Minthogy az η_i -ket véletlenszerűen választottuk és eloszlásuk ugyanaz, mint az y változó eloszlása, a (3. 2. 7) egyenlőtlenséget felhasználva felülről becsülhető annak a valószínűsége, hogy az y_i pontok közül egynél több esik $F_{\tilde{y}}$ -ba. Ebből arra a következtetésre jutunk, hogy az y_i -k megválasztási lehetőségeinek túlnyomó részében az $\bar{F}_i$ halmazra teljesül a lemma II. feltétele.

A III. feltétel ugyancsak teljesül az y_i -k megválasztási lehetőségeinek jelentős részében, ugyanis a nagy számok törvénye szerint nagy L -re és tetszőleges $j = 1, \dots, N$ -re

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^L p_i \int_{\tilde{Y}} \pi_j(y_i, \tilde{y}) Q(y_i, d\tilde{y}) &\approx \sum_{i=1}^L p_i M \left\{ \int_{\tilde{Y}} \pi_j(y_i, \tilde{y}) Q(y_i, d\tilde{y}) \right\} = \\ &= M \left\{ \int_{\tilde{Y}} \pi_j(\eta, \tilde{y}) Q(\eta, d\tilde{y}) \right\} = M \pi_j(\eta, \tilde{\eta}). \end{aligned}$$

Következésképp a lehetőségek jelentős részében úgy lehet megválasztani az y_i pontokat, hogy egyidejűleg igaz legyen mindhárom feltétel. E lehetőségek közül egyet kiválasztva, láthatjuk, hogy arra teljesülnek a lemma feltételei.

3. 4. A bemeneti jelek véletlenszerű megválasztása

A 3. 3 pontban kifejtett terv megvalósításához tekintsük L számú független valószínűségi változó, $\zeta_1, \dots, \zeta_L$ összességét, ahol a változók értékei az (Y, S_Y) térbe tartoznak és mindegyiknek ugyanaz a $p_{\eta}(\cdot)$ eloszlása van. Ezek a változók $\zeta_i(\tilde{\omega})$ függvények, amelyek valamilyen $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ valószínűségi térben vannak definiálva. Hangsúlyozzuk, hogy ez az új valószínűségi tér nem esik egybe az $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ térrel, amelyen az $\eta, \tilde{\eta}$ valószínűségi változók voltak definiálva. Minthogy minden egyes rögzített $\tilde{\omega}$ mellett a $\zeta_1(\tilde{\omega}), \dots, \zeta_L(\tilde{\omega})$ pontok megválasztása L számú bemeneti jel megválasztását képviseli, azért a $\zeta_i(\tilde{\omega})$ változók összességét szemléletesen úgy interpretálhatjuk, mint L számú y_i bemeneti jel véletlen kiválasztásának egy módját. Ez esetben az a tény, hogy az Ω és $\tilde{\Omega}$ valószínűségi terek nem esnek egybe, matematikai visszatükrözése az arra vonatkozó szemléletes elképzelésnek, hogy egy, a kód összeállításakor alkalmazott y_i pontok megválasztására felhasznált kísérlet természete egészen különbözik ama kísérlet természetétől, amely a bemeneti jel kimeneti jelbe való átmenetét írja le.

Tekintsük most az $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{B}})$ és $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}})$ mérhető terek $(\tilde{\Omega} \times \tilde{Y}, \tilde{\mathfrak{B}} \times S_{\tilde{Y}})$ szorzatát. Tekintsük továbbá az $(\tilde{\Omega} \times \tilde{Y}, \tilde{\mathfrak{B}} \times S_{\tilde{Y}})$ mérhető teret az $(Y \times \tilde{Y}, S_Y \times S_{\tilde{Y}})$ mérhető térbe átvívó azon Z_i ($i = 1, 2, \dots, L$) leképezéseket, amelyeket a következő képlet definiál:

$$(3.4.1) \quad Z_i(\tilde{\omega}, \tilde{y}) = (\zeta_i(\tilde{\omega}), \tilde{y}).$$

Most megmutatjuk, hogy mindegyik ilyen leképezés mérhető, azaz, hogy tetszőleges $C \in S_Y \times S_{\tilde{Y}}$ halmaz $Z_i^{-1}(C)$ ősz-képe beletartozik $\tilde{\mathfrak{B}} \times S_{\tilde{Y}}$ -ba. Elegendő igazolni tetszőleges $A \times B$ típusú téglák ősz-képének mérhetőségét ($A \in S_Y, B \in S_{\tilde{Y}}$), minthogy nyilvánvalóan az $S_Y \times S_{\tilde{Y}}$ -ból való, mérhető ősz-képpel rendelkező halmazok összessége σ -algebrát képez, a legkisebb σ -algebra pedig, amely az összes téglákat tartalmazza, egybeesik $S_Y \times S_{\tilde{Y}}$ -mal. Ilyen $A \times B$ típusú halmazokra pedig

$$Z_i^{-1}(A \times B) = \{\zeta_i(\tilde{\omega}) \in A\} \times B.$$

Minthogy $\{\zeta_i(\tilde{\omega}) \in A\} \in \tilde{\mathfrak{B}}$, azért $\{\zeta_i(\tilde{\omega}) \in A\} \times B \in \tilde{\mathfrak{B}} \times S_{\tilde{Y}}$, s ezzel bebizonyítottuk a Z_i leképezés mérhetőségét.

Tekintsünk most valamilyen $\mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{B}} \times S_{\tilde{Y}}$ mérhető halmazt. Jelöljük $G(\tilde{\omega})$ -mal a $\mathfrak{G}$ halmaz azon metszetét, amelyet az $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ pont határoz meg. 3.2 pontban már felhasznált mértékelméleti tételnek megfelelően $G(\tilde{\omega}) \in S_{\tilde{Y}}$ minden $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ -ra. Ezért definiálva van az $\tilde{\omega}$

$$(3.4.2) \quad q_{\mathfrak{G}}(\tilde{\omega}) \doteq Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), G(\tilde{\omega}))$$

függvénye. Megmutatjuk, hogy a $q_{\mathfrak{G}}(\tilde{\omega})$ függvény mérhető a $\tilde{\mathfrak{B}}$ σ -algebrára vonatkozólag. Valóban, ha $\mathfrak{G}_1, \dots, \mathfrak{G}_n, \dots$ a $\tilde{\mathfrak{B}} \times S_{\tilde{Y}}$ -ba tartozó, közös elemmel nem bíró halmazok sorozata és $\mathfrak{G} = \bigcup_n \mathfrak{G}_n$, $G_n(\tilde{\omega})$ pedig ezek metszetei, akkor minden $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ -ra fennáll a $G(\tilde{\omega}) = \bigcup_n G_n(\tilde{\omega})$ egyenlőség. Ezért minden $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ -ra fennáll, hogy

$$(3.4.3) \quad \sum_n Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), G_n(\tilde{\omega})) = Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), G(\tilde{\omega})).$$

Továbbá, ha $\bar{\mathfrak{G}}$ a $\mathfrak{G}$ halmaz kiegészítése és $\bar{G}(\tilde{\omega})$ ennek metszete, akkor minden $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ -ra fennáll:

$$(3.4.4) \quad Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), G(\tilde{\omega})) = 1 - Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), \bar{G}(\tilde{\omega})).$$

A (3.4.3) és (3.4.4) egyenlőségek azt mutatják, hogy azok a $\mathfrak{G} \in \tilde{\mathfrak{B}} \times S_{\tilde{Y}}$ halmazok, amelyekre a $q_{\mathfrak{G}}(\tilde{\omega})$ függvény mérhető, σ -algebrát képeznek. Ha $\mathfrak{G} = W \times B$, ahol $W \in \tilde{\mathfrak{B}}, B \in S_{\tilde{Y}}$, akkor

$$G(\tilde{\omega}) = \begin{cases} B, & \tilde{\omega} \in W, \\ \Lambda, & \tilde{\omega} \notin W, \end{cases}$$

ahol Λ az üres halmaz. Ekkor

$$(3.4.5) \quad q_{\mathfrak{G}}(\tilde{\omega}) = \begin{cases} Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), B), & \tilde{\omega} \in W, \\ 0, & \tilde{\omega} \notin W. \end{cases}$$

Annak következtében, hogy $Q(y, B)$ y mérhető függvénye, a (3. 4. 5) függvény két mérhető függvény szuperpozíciója, vagyis maga is mérhető. Ezért a $\mathfrak{G}$ halmazok azon σ -algebrájába, melyekre a $q_{\omega}(\tilde{\omega})$ függvény mérhető, beletartoznak az összes téglák, és ezért egy ilyen σ -algebra egybeesik $\mathfrak{B} \times S_{\tilde{Y}}$ -mal.

Tetszőleges $\mathfrak{G} \in \mathfrak{B} \times S_{\tilde{Y}}$ -ra legyen most

$$(3. 4. 6) \quad \mathfrak{P}_i(\mathfrak{G}) = \int_{\Omega} Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), G(\tilde{\omega})) \tilde{P}(d\tilde{\omega}) = MQ(\zeta_i(\tilde{\omega}), G(\tilde{\omega})).$$

(3. 4. 3)-ból következik, hogy $\mathfrak{P}_i(\mathfrak{G})$ valószínűségi mérték lesz a $\mathfrak{B} \times S_{\tilde{Y}}$ σ -algebrán. Most megmutatjuk, hogy tetszőleges $C \in S_Y \times S_{\tilde{Y}}$ halmazra

$$(3. 4. 7) \quad p_{\eta\tilde{\eta}}(C) = \mathfrak{P}_i(Z_i^{-1}(C)),$$

azaz, hogy a Z_i leképezés a $\mathfrak{P}_i$ mértéket átviszi a $p_{\eta\tilde{\eta}}$ mértékbe. Elég igazolni azt, hogy a (3. 4. 7) egyenlőség igaz $C = A \times B$ mellett, ahol $A \in S_Y, B \in S_{\tilde{Y}}$. Ebben a bizonyításban a következő tényt használjuk fel: minthogy az η és $\tilde{\eta}$ változókat a $\{Q, V\}$ csatorna kapcsolja össze, azért tetszőleges $B \in S_{\tilde{Y}}$ -ra a $p_{\eta}(\cdot)$ mérték szerint majdnem mindenütt

$$(3. 4. 8) \quad P\{\tilde{\eta} \in B/\eta\} = Q(\eta, B)$$

(1. az (1. 5. 1) egyenlőséget). Minthogy a $Z_i^{-1}(A \times B)$ halmaz azon metszete, amelyet az $\tilde{\omega}$ pont határoz meg, egyenlő A -val, ha $\zeta_i(\tilde{\omega}) \in A$ és egyenlő B -vel, ha $\zeta_i(\tilde{\omega}) \in A$, azért fennáll

$$(3. 4. 9) \quad \mathfrak{P}_i(Z_i^{-1}(A \times B)) = \int_{\{\zeta_i(\tilde{\omega}) \in A\}} Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), B) \tilde{P}(d\tilde{\omega}) = \int_A Q(y, B) p_{\eta}(dy)$$

(itt tekintetbe vettük, hogy $\zeta_i(\tilde{\omega})$ eloszlása $p_{\eta}(\cdot)$). Továbbá, felhasználva (3. 4. 8)-at és a feltételes valószínűség definícióját, látjuk, hogy

$$(3. 4. 10) \quad \int_A Q(y, B) p_{\eta}(dy) = \int_A P\{\tilde{\eta} \in B/\eta\} p_{\eta}(dy) = \\ = P\{\tilde{\eta} \in B, \eta \in A\} = p_{\eta\tilde{\eta}}(A \times B).$$

(3. 4. 9) és (3. 4. 10)-ból következik a keresett (3. 4. 7) egyenlőség fennállása $C = A \times B$ -re, vagyis tetszőleges C -re is.

A $\mathfrak{B} \times S_{\tilde{Y}}$ σ -algebrán definiálva van a $\tilde{P} \times p_{\tilde{\eta}}(\cdot)$ mérték. Most megmutatjuk a következő, a továbbiak szempontjából fontos tény: tetszőleges $i = 1, \dots, L$ mellett a $\mathfrak{P}_i$ valószínűségi mérték abszolút folytonos a $\tilde{P} \times p_{\tilde{\eta}}(\cdot)$ mértékre vonatkozólag, és az

$$(3. 4. 11) \quad \tilde{a}_i(\tilde{\omega}, \tilde{y}) = \frac{d\mathfrak{P}_i(\cdot)}{d\tilde{P} \times p_{\tilde{\eta}}(\cdot)}$$

deriváltra a $\tilde{P} \times p_{\tilde{\eta}}(\cdot)$ mérték szerint majdnem mindenütt fennáll a következő egyenlőség:

$$(3. 4. 12) \quad \tilde{a}_i(\tilde{\omega}, \tilde{y}) = a_{\eta\tilde{\eta}}(\zeta_i(\tilde{\omega}), \tilde{y}).$$

Emlékeztettünk arra, hogy ugyanúgy, mint a (3. 2. 3) egyenlőségnél is

$$a_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y}) = \frac{dp_{\eta\tilde{\eta}}(\cdot)}{dp_{\eta} \times p_{\tilde{\eta}}(\cdot)}.$$

A (3. 4. 12) egyenlőség bebizonyításához a mérték mértékszerinti deriváltja definíciójának megfelelően igazolnunk kell, hogy tetszőleges $C \in \mathfrak{B} \times S_{\tilde{Y}}$ -ra fennáll, hogy

$$(3. 4. 13) \quad \mathfrak{P}_i(C) = \int_C a_{\eta\tilde{\eta}}(\zeta_i(\tilde{\omega}), \tilde{y}) \tilde{P} \times p_{\tilde{\eta}}(d\tilde{\omega}, d\tilde{y}).$$

Minthogy a (3. 4. 13) egyenlőség bal és jobb oldala egyaránt mérték, azért elég igazolni, hogy ez az egyenlőség teljesül az összes

$$C = W \times B, \quad W \in \mathfrak{B}, \quad B \in S_{\tilde{Y}}$$

téglákra, minthogy az ilyen téglák az egész $\mathfrak{B}$ σ -algebrát generálják. Tekintsük a következő feltételes valószínűség-eloszlást:

$$(3. 4. 14) \quad p_{\eta|W}^i(A) = \tilde{P}\{\zeta_i(\tilde{\omega}) \in A/W\}, \quad A \in S_Y.$$

Látható, hogy a $p_{\eta|W}^i$ mérték abszolút folytonos a p_{η} mértékre vonatkozólag. Vezessük be a következő kijelölést:

$$(3. 4. 15) \quad a_{\eta|W}^i(y) = \frac{dp_{\eta|W}^i(\cdot)}{dp_{\eta}(\cdot)}.$$

Akkor tetszőleges, S_Y -ra vonatkozólag mérhető $u(y)$ függvényre:

$$(3. 4. 16) \quad \begin{aligned} \int_Y u(y) a_{\eta|W}^i(y) p_{\eta}(dy) &= \int_Y u(y) p_{\eta|W}^i(dy) = \\ &= \frac{1}{\tilde{P}(W)} \int_W u(\zeta_i(\tilde{\omega})) \tilde{P}(d\tilde{\omega}). \end{aligned}$$

Alkalmazva FUBINI tételét (l. [24], 35. § 2. tétel) és a (3. 4. 16) egyenlőséget $u(y) = a_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y})$ mellett, azt kapjuk, hogy

$$(3. 4. 17) \quad \begin{aligned} \int_{W \times B} a_{\eta\tilde{\eta}}(\zeta_i(\tilde{\omega}), \tilde{y}) \tilde{P} \times p_{\tilde{\eta}}(d\tilde{\omega}, d\tilde{y}) &= \int_B p_{\tilde{\eta}}(dy) \int_W a_{\eta\tilde{\eta}}(\zeta_i(\tilde{\omega}), \tilde{y}) \tilde{P}(d\tilde{\omega}) = \\ &= \tilde{P}(W) \int_B p_{\tilde{\eta}}(dy) \int_Y a_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y}) a_{\eta|W}^i(y) p_{\eta}(dy) = \\ &= \frac{1}{\tilde{P}(W)} \int_{Y \times B} a_{\eta|W}^i(y) a_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y}) p_{\eta} \times p_{\tilde{\eta}}(dy, d\tilde{y}). \end{aligned}$$

Mérték mértékszerinti deriváltjának ismert tulajdonságát alkalmazva (l. [24], 32. § 2. tétel), azt kapjuk, hogy

$$(3.4.18) \quad \int_{Y \times B} a_{\eta|W}^i(y) a_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y}) p_{\eta} \times p_{\tilde{\eta}}(dy, d\tilde{y}) = \int_{Y \times B} a_{\eta|W}^i(y) p_{\eta\tilde{\eta}}(dy, d\tilde{y}).$$

Megjegyezzük még, hogy tetszőleges $u(y)$ függvényre, amely S_Y -ra vonatkozólag mérhető, fennáll:

$$(3.4.19) \quad \int_{Y \times B} u(y) p_{\eta\tilde{\eta}}(dy, d\tilde{y}) = \int_Y u(y) Q(y, B) p_{\eta}(dy).$$

Valóban, ha $u(y)$ valamilyen $A \in Y$ halmaz karakterisztikus függvénye, akkor (3.4.19) (3.4.8)-ból következik. Ez azt jelenti, hogy (3.4.19) igaz tetszőleges olyan függvényre, amely véges számú értéket vehet fel, és azt is jelenti, hogy tetszőleges integrálható függvényre is igaz. (3.4.19)-ben $u(y) = a_{\eta|W}^i(y)$ -t téve, kapjuk, hogy

$$(3.4.20) \quad \int_Y a_{\eta|W}^i(y) Q(y, B) p_{\eta}(dy) = \int_{Y \times B} a_{\eta|W}^i(y) p_{\eta\tilde{\eta}}(dy, d\tilde{y}).$$

(3.4.16)-ot most $u(y) = Q(y, B)$ -re alkalmazva, kapjuk, hogy

$$(3.4.21) \quad \tilde{P}(W) \int_Y a_{\eta|W}^i(y) Q(y, B) p_{\eta}(dy) = \int_W Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), B) \tilde{P}(d\tilde{\omega}).$$

A (3.4.17), (3.4.18), (3.4.20), (3.4.21) egyenlőségeket egybevetve és felhasználva a (3.4.6) definíciót, az alábbi összefüggést nyerjük:

$$(3.4.22) \quad \int_{W \times B} a_{\eta\tilde{\eta}}(\zeta_i(\tilde{\omega}), \tilde{y}) \tilde{P} \times p_{\tilde{\eta}}(d\tilde{\omega}, d\tilde{y}) = \mathfrak{P}_i(W \times B).$$

Amint már megjegyeztük, ebből a keresett (3.4.12) egyenlőség következik.

3.5. „Levágott” legyezők konstruálása

Tetszőleges $i=1, \dots, L$ mellett legyen

$$(3.5.1) \quad \mathfrak{F}_i = Z_i^{-1}(F), \quad .$$

ahol az F halmazt a (3.2.1) egyenlőség definiálja. A Z_i leképezéseknek a 3.4. pontban bebizonyított mérhetősége következtében az $\mathfrak{F}_i$ halmazokra fennáll: $\mathfrak{F}_i \in \tilde{\mathfrak{B}} \times S_{\tilde{Y}}$. A (3.4.7) egyenlőség azt mutatja, hogy minden $i=1, \dots, L$ -re

$$(3.5.2) \quad \mathfrak{P}_i(\mathfrak{F}_i) = p_{\eta\tilde{\eta}}(F).$$

A legyezők definíciója értelmében (l. a 3.2. pontot) tetszőleges $\tilde{\omega}$ mellett az $\mathfrak{F}_i$ halmaznak az a metszete, amelyet az $\tilde{\omega}$ pont határoz meg, egybeesik az $F_{\zeta_i}(\tilde{\omega})$ legyezővel. Tekintsük most a következő halmazt:

$$(3.5.3) \quad \bar{\mathfrak{F}}_i = \mathfrak{F}_i \setminus \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{F}_j.$$

Világos, hogy $\bar{\mathfrak{F}}_i \in \mathfrak{P} \times S_{\bar{Y}}$. Jelöljük $\bar{F}_i(\tilde{\omega})$ -mal az $\bar{\mathfrak{F}}_i$ halmaznak azt a metszetét, amelyet az $\tilde{\omega}$ pont határoz meg. Nyilvánvaló, hogy minden $\tilde{\omega} \in \Omega$ -ra fennáll, hogy

$$(3.5.4) \quad \bar{F}_i(\tilde{\omega}) = F_{\zeta_i(\tilde{\omega})} \setminus \bigcup_{j \neq i} F_{\zeta_j(\tilde{\omega})}.$$

A páronként közös elemmel nem bíró $\bar{F}_1(\tilde{\omega}), \dots, \bar{F}_L(\tilde{\omega})$ halmazok összességét *levágott legyezők rendszerének* fogjuk nevezni.

A (3.4.6) definíció értelmében

$$(3.5.5) \quad \mathfrak{P}_i(\bar{\mathfrak{F}}_i) = MQ(\zeta_i(\tilde{\omega}), \bar{F}_i(\tilde{\omega})).$$

Most becsülni akarjuk alulról a (3.5.5) mennyiséget. Nyilvánvaló, hogy

$$(3.5.6) \quad \mathfrak{P}_i(\bar{\mathfrak{F}}_i) \cong \mathfrak{P}_i(\mathfrak{F}_i) - \sum_{j \neq i} \mathfrak{P}_i(\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j).$$

Annak folytán, hogy az $\mathfrak{F}_i$ halmazok definíciójában felhasznált ζ_i változók függetlenek és azonos eloszlásúak, szimmetria-megfontolásokból következik, hogy minden $i \neq j$ -re

$$(3.5.7) \quad \mathfrak{P}_i(\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j) = \mathfrak{P}_1(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2).$$

(3.5.2)-re tekintettel (3.5.6)-ból következik, hogy

$$(3.5.8) \quad \mathfrak{P}_i(\bar{\mathfrak{F}}_i) \cong p_{\eta\bar{\eta}}(F) - L\mathfrak{P}_1(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2).$$

Megjegyezzük, hogy az $(\tilde{\omega}, \tilde{y})$ pont akkor és csak akkor tartozik bele $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$ -be, amikor egyidejűleg fennáll $(\zeta_1(\tilde{\omega}), \tilde{y}) \in F$ és $(\zeta_2(\tilde{\omega}), \tilde{y}) \in F$. Ebből következik, hogy $(\tilde{\omega}, \tilde{y}) \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$ akkor és csak akkor áll fenn, amidőn egyidejűleg fennáll $\zeta_1(\tilde{\omega}) \in F_{\bar{Y}}$ és $\zeta_2(\tilde{\omega}) \in F_{\bar{Y}}$. Így tehát a $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$ halmaznak az a metszete, amelyet az $\tilde{y}$ pont határoz meg, egybeesik a következő eseménnyel:

$$(3.5.9) \quad \{(\zeta_1(\tilde{\omega}) \in F_{\bar{Y}}) \cap (\zeta_2(\tilde{\omega}) \in F_{\bar{Y}})\}.$$

Becsüljük meg a (3.5.9) események valószínűségét. A ζ_i változók függetlensége folytán

$$(3.5.10) \quad \tilde{P}\{(\zeta_1(\tilde{\omega}) \in F_{\bar{Y}}) \cap (\zeta_2(\tilde{\omega}) \in F_{\bar{Y}})\} = [\tilde{P}\{\zeta_1(\tilde{\omega}) \in F_{\bar{Y}}\}]^2.$$

A (3.2.7) becslés azt mutatja, hogy majdnem minden $\tilde{y}$ -ra (a $p_{\bar{\eta}}(\cdot)$ mértékre vonatkoztatva)

$$(3.5.11) \quad \tilde{P}\{(\zeta_1(\tilde{\omega}) \in F_{\bar{Y}}) \cap (\zeta_2(\tilde{\omega}) \in F_{\bar{Y}})\} \leq 2^{-2C(Q, V)(1-\delta)}.$$

Alkalmazva a mértékek szorzatáról szóló tételt (l. [24], 35. § 2. tétel), kapjuk, hogy

$$(3.5.12) \quad \tilde{P} \times p_{\bar{\eta}}(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2) = \int_{\bar{Y}} \tilde{P}\{(\zeta_1(\tilde{\omega}) \in F_{\bar{Y}}) \cap (\zeta_2(\tilde{\omega}) \in F_{\bar{Y}})\} p_{\bar{\eta}}(d\tilde{y}) \leq 2^{-2C(Q, V)(1-\delta)}.$$

Megjegyezzük, hogy a (3.4.11) állítás értelmében

$$(3.5.13) \quad \mathfrak{P}_1(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2) = \int_{\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2} a_{\eta\bar{\eta}}(\zeta_1(\tilde{\omega}), \tilde{y}) \tilde{P} \times p_{\bar{\eta}}(\tilde{\omega}, d\tilde{y}).$$

Ha $(\tilde{\omega}, \tilde{y}) \in \tilde{\mathcal{F}}_1 \cap \tilde{\mathcal{F}}_2$, akkor a $(\zeta_1(\tilde{\omega}), \tilde{y})$ párra az $\tilde{\mathcal{F}}_1$ halmaz definíciója folytán $(\zeta_1(\tilde{\omega}), \tilde{y}) \in F$. Ezért, felhasználva az F halmaz definícióját (l. (3. 2. 1)) azt látjuk, hogy

$$(3. 5. 14) \quad a_{\eta\tilde{\eta}}(\zeta_1(\tilde{\omega}), \tilde{y}) \leq 2^{C(Q, V)(1+\delta)}, \quad (\tilde{\omega}, \tilde{y}) \in \tilde{\mathcal{F}}_1 \cap \tilde{\mathcal{F}}_2,$$

mivel

$$a_{\eta\tilde{\eta}}(\zeta_i(\tilde{\omega}), \tilde{y}) = 2^{i\eta\tilde{\eta}(\zeta_i(\tilde{\omega}), \tilde{y})}.$$

Felhasználva (3. 5. 12), (3. 5. 13) és (3. 5. 14)-et, levezethető, hogy

$$(3. 5. 15) \quad \mathfrak{P}_1(\tilde{\mathcal{F}}_1 \cap \tilde{\mathcal{F}}_2) \leq 2^{-C(Q, V)(1-3\delta)}.$$

Ezért (3. 5. 8)-ból következik, hogy minden $i = 1, \dots, L$ -re

$$(3. 5. 16) \quad \mathfrak{P}_1(\tilde{\mathcal{F}}_i) \geq p_{\eta\tilde{\eta}}(F) - L \cdot 2^{-C(Q, V)(1-3\delta)}.$$

Végül, felhasználva (3. 5. 5)-öt, a következő fontos (a továbbiakban sokszor felhasznált) egyenlőtlenségre jutunk

$$(3. 5. 17) \quad M \left\{ \sum_{i=1}^L p_i Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), \bar{F}_i(\tilde{\omega})) \right\} = M\{\mathfrak{P}_1(\tilde{\mathcal{F}}_1)\} \geq p_{\eta\tilde{\eta}}(F) - L \cdot 2^{-C(Q, V)(1-3\delta)}.$$

3. 6. A nagy számok törvényének élesítése

A FEINSTEIN lemma III. feltételének teljesítéséhez szükségünk lesz a nagy számok törvényének következő élesítésére, amely minden nehézség nélkül levezethető:

LEMMA. Legyenek $\gamma_1, \dots, \gamma_L$ olyan független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyekre valamilyen $\bar{c} < \infty$ és $\bar{b} > 0$ mellett fennáll:

$$(3. 6. 1) \quad M|\gamma_i - M\gamma_i|^{1+\bar{b}} \leq \bar{c}.$$

Tegyük fel továbbá, hogy adva van az L számú $p_1, \dots, p_L$ ($0 \leq p_i \leq 1$) valószínűségek összessége, melyre fennáll

$$(3. 6. 2) \quad \sum_{i=1}^L p_i = 1$$

és

$$(3. 6. 3) \quad \max_{i=1, \dots, L} p_i \leq \frac{2}{L}.$$

Akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan nagy N szám, hogy $L > N(\bar{c})^{\frac{1}{\bar{b}}}$ esetén

$$(3. 6. 4) \quad P \left\{ \left| \sum_{i=1}^L p_i \gamma_i - M\gamma_1 \right| > \varepsilon \right\} \leq \frac{D(\bar{c} + 1)}{L^{\min(\bar{b}, 1)}},$$

ahol a D és N konstansok csupán $\bar{b}$ és ε -tól függenek és nem függenek L és $\bar{c}$ -től és a γ_i változók eloszlásától.

BIZONYÍTÁS. Mint szokásos is, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $M\gamma_i = 0$. Először is tegyük fel, hogy $\bar{b} \cong 1$. Akkor (3. 6. 1)-ből következik a $D\gamma_i$ szórásnégyzetre, hogy

$$(3. 6. 5) \quad D\gamma_i \cong \bar{c} + 1.$$

Ezért (3. 6. 3)-ból következik, hogy

$$(3. 6. 6) \quad D\left(\sum_{i=1}^L p_i \gamma_i\right) = D\gamma_1 \sum_{i=1}^L p_i^2 \cong \frac{2(\bar{c} + 1)}{L},$$

és (3. 6. 4) a Csebisev-féle egyenlőtlenség szokásos alkalmazásával (3. 6. 6)-ból adódik.

Ha $\bar{b} < 1$, legyen

$$(3. 6. 7) \quad F(x) = P\{\gamma_i < x\}.$$

Miként szokásos, vezessük be a következő csonkított valószínűségi változókat:

$$(3. 6. 8) \quad \tilde{\gamma}_i = \begin{cases} \gamma_i & \text{ha } |\gamma_i| \leq L\varepsilon, \\ 0 & \text{ha } |\gamma_i| > L\varepsilon. \end{cases}$$

Ekkor

$$(3. 6. 9) \quad P\left\{\left|\sum_{i=1}^L p_i \gamma_i\right| > \varepsilon\right\} \cong \sum_{i=1}^L P\{|\gamma_i| > L\varepsilon\} + P\left\{\left|\sum_{i=1}^L p_i \tilde{\gamma}_i\right| > \varepsilon\right\}.$$

Megjegyezzük, hogy

$$(3. 6. 10) \quad \sum_{i=1}^L P\{|\gamma_i| > L\varepsilon\} = L \int_{|x| > L\varepsilon} dF(x) \cong \frac{L}{(L\varepsilon)^{1+\bar{b}}} \int_{|x| > L\varepsilon} |x|^{1+\bar{b}} dF(x) \cong \frac{\bar{c}}{L^{\bar{b}} \varepsilon^{1+\bar{b}}}.$$

Továbbá,

$$(3. 6. 11) \quad \begin{aligned} |M\tilde{\gamma}_i| &= \left| \int_{|x| \leq L\varepsilon} x dF(x) \right| = \\ &= \left| \int_{|x| > L\varepsilon} x dF(x) \right| \cong \frac{1}{(L\varepsilon)^{\bar{b}}} \int_{|x| > L\varepsilon} |x|^{1+\bar{b}} dF(x) \cong \frac{\bar{c}}{L^{\bar{b}} \varepsilon^{\bar{b}}}. \end{aligned}$$

Elég nagy N -t választva és (3. 6. 11)-et figyelembe véve, kapjuk, hogy $L > N\bar{c}^{\frac{1}{\bar{b}}}$ esetén

$$(3. 6. 12) \quad \left| M \left\{ \sum_{i=1}^L p_i \tilde{\gamma}_i \right\} \right| = |M\tilde{\gamma}_1| \cong \frac{\varepsilon}{2}.$$

Megjegyezzük, hogy (3. 6. 3) folytán a $D\left(\sum_{i=1}^L p_i \tilde{\gamma}_i\right)$ szórásnégyzetre fennáll, hogy

$$(3. 6. 13) \quad \begin{aligned} D\left(\sum_{i=1}^L p_i \tilde{\gamma}_i\right) &= D\tilde{\gamma}_1 \sum_{i=1}^L p_i^2 \leq \frac{2D\tilde{\gamma}_1}{L} \leq \frac{2M\tilde{\gamma}_1^2}{L} = \frac{2}{L} \int_{|x| \leq L\varepsilon} x^2 dF(x) \leq \\ &\leq \frac{2(L\varepsilon)^{1-\bar{b}}}{L} \int_{|x| \leq L\varepsilon} |x|^{1+\bar{b}} dF(x) \leq \frac{2\varepsilon^{1-\bar{b}}\bar{c}}{L^{\bar{b}}}. \end{aligned}$$

Alkalmazva (3. 6. 12)-t, a Csebisev-egyenlőtlenséget és (3. 6. 13)-at, azt kapjuk, hogy

$$(3. 6. 14) \quad \begin{aligned} P\left\{\left|\sum_{i=1}^L p_i \tilde{\gamma}_i\right| > \varepsilon\right\} &\leq P\left\{\left|\sum_{i=1}^L p_i \tilde{\gamma}_i - M\tilde{\gamma}_1\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leq \\ &\leq \frac{4D\left(\sum_{i=1}^L p_i \tilde{\gamma}_i\right)}{\varepsilon^2} \leq \frac{8\bar{c}}{\varepsilon^{1+\bar{b}}L^{\bar{b}}}. \end{aligned}$$

(3. 6. 9), (3. 6. 10) és (3. 6. 14)-ből következik a lemma állítása.

3. 7. A lemma III. állításának levezetéséhez szükséges néhány becslés

Legyen minden $y \in Y$ -ra

$$(3. 7. 1) \quad \lambda_j(y) = \int_{\tilde{Y}} \pi_j(y, \tilde{y}) Q(y, d\tilde{y}) \quad (j=1, \dots, N).$$

Mindenekelőtt bizonyítsuk be, hogy ez a függvény⁵ mérhető az S_Y σ -algebrára vonatkozólag. Ennél azonban egy általánosabb állítást fogunk bebizonyítani: tetszőleges $q(y, \tilde{y})$ függvényre, amely mérhető az $S_Y \times S_{\tilde{Y}}$ σ -algebrára vonatkozólag, az

$$(3. 7. 2) \quad u(y) = \int_{\tilde{Y}} q(y, \tilde{y}) Q(y, d\tilde{y})$$

függvény mérhető az S_Y σ -algebrára vonatkozólag. Valóban, tetszőleges rögzített y mellett a $q(y, \tilde{y})$ függvény mérhető $S_{\tilde{Y}}$ -ra vonatkozólag (l. [24], 34. § 2. tétel). Ezért a (3. 7. 2)-ben szereplő integrálnak van értelme. Ha a $q_n(y, \tilde{y})$ függvényt sorozatra fennáll $q_n(y, \tilde{y}) \rightarrow q(y, \tilde{y})$ mindenütt $Y \times \tilde{Y}$ -on és $q_n(y, \tilde{y}) \leq q(y, \tilde{y})$, akkor a megfelelő $u_n(y)$ függvényekre fennáll, hogy $u_n(y) \rightarrow u(y)$ mindenütt, ahol $u(y)$ definiálva volt. Minthogy az $S_Y \times S_{\tilde{Y}}$ σ -algebrát $A \times B$ ($A \in S_Y$, $B \in S_{\tilde{Y}}$) típusú halmazok generálják, az előző megjegyzés következtében elég bizonyítani a (3. 7. 2) függvény mérhetőségét arra az esetre, amidőn $q(y, \tilde{y})$ végesszámú értéket vesz fel, mindegyiket valamilyen $A \times B$ típusú halmazon. Nyilvánvaló továbbá, hogy a $q(y, \tilde{y})$ függvények

⁵ A $\lambda_j(y)$ függvények, ugyanúgy, mint az $u(y)$ (l. (3. 7. 2)) az integrál divergálása folytán esetleg nem minden y -ra vannak definiálva. A mérhető függvény fogalma velük kapcsolatban a szokásos definíciók nyilvánvaló analógiájaként vezethető be.

valamely lineáris kombinációjának megfelel az $u(y)$ függvények egy analóg lineáris kombinációja. Ezért elegendő csupán a következő függvényt vizsgálni:

$$(3.7.3) \quad q(y, \tilde{y}) = \begin{cases} 1, & (y, \tilde{y}) \in A \times B, \\ 0, & (y, \tilde{y}) \notin A \times B. \end{cases}$$

Ilyen függvény esetén azonban a minket érdeklő

$$u(y) = \begin{cases} Q(y, B), & y \in A, \\ 0, & y \notin A \end{cases}$$

függvény mérhető, minthogy a $Q(y, B)$ függvény mérhető első változója szerint (l. az 1. 5 pontot).

Legyen

$$\delta_j^i(\tilde{\omega}) = \lambda_j(\zeta_i(\tilde{\omega})) \quad (i = 1, \dots, L; j = 1, \dots, N).$$

A $\delta_j^i(\tilde{\omega})$ függvény a $\lambda_j(y)$ függvény mérhetősége folytán valószínűségi változó. Megmutatjuk, hogy az $M\delta_j^i(\tilde{\omega})$ várható értékre fennáll

$$(3.7.4) \quad M\delta_j^i(\tilde{\omega}) = M\pi_j(\eta, \tilde{\eta}).$$

Minthogy a ζ_i valószínűségi változók ugyanolyan eloszlásúak, mint az η változó, azért (3.7.4) a következő általánosabb tény következménye: tetszőleges $q(y, \tilde{y})$ függvényre, mely mérhető $S_Y \times S_{\tilde{Y}}$ -ra vonatkozólag

$$(3.7.5) \quad \int_Y \left[\int_{\tilde{Y}} q(y, \tilde{y}) Q(y, d\tilde{y}) \right] p_\eta(dy) = \int_{Y \times \tilde{Y}} q(y, \tilde{y}) p_{\eta\tilde{\eta}}(dy, d\tilde{y}).$$

Hasonló gondolatmenettel, mint amit a (3.7.2) függvény mérhetőségének bizonyításánál követtünk, nem nehéz belátni, hogy elég a (3.7.5) egyenlőséget arra az esetre bizonyítani, amidőn a $q(y, \tilde{y})$ függvény (3.7.3) alakú. Most felhasználjuk, hogy η és $\tilde{\eta}$ -t a $\{Q, V\}$ átviteli berendezés kapcsolja össze és ezért tetszőleges $B \in S_{\tilde{Y}}$ -ra 1 valószínűséggel

$$(3.7.6) \quad P\{\tilde{\eta} \in B/\eta\} = Q(\eta, B).$$

Azt kapjuk, hogy ha $q(y, \tilde{y})$ (3.7.3) alakú, akkor

$$\begin{aligned} & \int_Y \left[\int_{\tilde{Y}} q(y, \tilde{y}) Q(y, d\tilde{y}) \right] p_\eta(dy) = \int_A Q(y, B) p_\eta(dy) = \\ & = \int_{\{\eta \in A\}} Q(\eta, B) P(d\tilde{\omega}) = \int_{\{\eta \in A\}} P\{\tilde{\eta} \in B/\eta\} P(d\tilde{\omega}) = P\{\eta \in A, \tilde{\eta} \in B\} = \\ & = \int_{A \times B} p_{\eta\tilde{\eta}}(dy, d\tilde{y}) = \int_{Y \times \tilde{Y}} q(y, \tilde{y}) p_{\eta\tilde{\eta}}(dy, d\tilde{y}), \end{aligned}$$

amit bizonyítanunk kellett. Írjuk a rövidség kedvéért a következőt:

$$M_j = M\pi_j(\eta, \tilde{\eta}).$$

Akkor az $|x - M_j|^{1+\bar{b}}$ függvény konvex volta miatt minden y -ra

$$(3.7.7) \quad \left| \int_{\tilde{Y}} \pi_j(y, \tilde{y}) Q(y, d\tilde{y}) - M_j \right|^{1+\bar{b}} = \left| \int_{\tilde{Y}} [\pi_j(y, \tilde{y}) - M_j] Q(y, d\tilde{y}) \right|^{1+\bar{b}} \leq \\ \leq \int_{\tilde{Y}} |\pi_j(y, \tilde{y}) - M_j|^{1+\bar{b}} Q(y, d\tilde{y}).$$

Ebből (3.7.5)-öt $q(y, \tilde{y}) = |\pi_j(y, \tilde{y}) - M_j|^{1+\bar{b}}$ -ra alkalmazva, levezethető, hogy

$$(3.7.8) \quad M |\delta_j^t(\tilde{\omega}) - M_j|^{1+\bar{b}} = \int_{\tilde{Y}} \left| \int_{\tilde{Y}} \pi_j(y, \tilde{y}) Q(y, d\tilde{y}) - M_j \right|^{1+\bar{b}} p_{\eta}(dy) \leq \\ \leq \int_{\tilde{Y}} \left| \int_{\tilde{Y}} |\pi_j(y, \tilde{y}) - M_j|^{1+\bar{b}} Q(y, d\tilde{y}) \right| p_{\eta}(d\tilde{y}) = \\ = \int_{Y \times \tilde{Y}} |\pi_j(y, \tilde{y}) - M_j|^{1+\bar{b}} p_{\eta\tilde{\eta}}(dy, d\tilde{y}) = M \{ |\pi_j(\eta, \tilde{\eta}) - M_j|^{1+\bar{b}} \}.$$

Megjegyezzük, hogy rögzített j esetén a

$$(3.7.9) \quad \delta_j^t(\tilde{\omega}), \dots, \delta_j^t(\tilde{\omega})$$

valószínűségi változók függetlenek és egyforma eloszlásúak. A (3.7.8) egyenlőtlenségből és a $\bar{c}$ állandó definíciójából (l. az 1. tétel 4. feltételét) következik, hogy

$$(3.7.10) \quad M |\delta_j^t(\tilde{\omega}) - M_j|^{1+\bar{b}} \leq \bar{c} < \infty.$$

Ezért a (3.7.10) mennyiségekre alkalmazható a 3.6 pont lemmája; ezt a következő pontban használjuk fel.

3.8. Feinstein lemmája bizonyításának befejezése

Emlékezzünk most vissza arra, hogy a 3.2, 3.4, 3.5, 3.6 pontokban tanulmányozott összes objektumok a t indextől függttek. Minthogy az $(\eta^t, \tilde{\eta}^t)$ párok szorzata információstabilis és az (1.7.7) feltétel teljesül, azért minden elég nagy t -re

$$(3.8.1) \quad p_{\eta\tilde{\eta}}^t(F) = P^t \left\{ \left| \frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(\eta, \tilde{\eta})}{C(Q, V)} - 1 \right| \leq \delta \right\} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{8}.$$

A (3.5.17)-ben előforduló egyik tag,

$$L^t \cdot 2^{-C^t(Q, V)(1-3\delta)} \leq 2^{-C^t(Q, V)(\varepsilon-3\delta)} = 2^{-\frac{\varepsilon}{2} C^t(Q, V)}$$

(emlékezzünk vissza, hogy $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$) zérushoz tart, ha $t \rightarrow \infty$. Ezért a (3.5.17) egyenlőtlenségből levezethető, hogy minden elég nagy t -re

$$(3.8.2) \quad M \left\{ \sum_{i=1}^{L^t} p_i^t Q^t(\zeta_i(\tilde{\omega}), \bar{F}_i(\tilde{\omega})) \right\} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Figyelembe véve, hogy a várható érték jele után álló valószínűségi változó nem lépi túl az 1-et, (3. 8. 2)-ből levezethető, hogy minden elegendően nagy t -re

$$(3. 8. 3) \quad \tilde{P}^t \left\{ \sum_{i=1}^L p_i Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), \bar{F}_i(\tilde{\omega})) > 1 - \varepsilon \right\} \cong \frac{3}{4}.$$

Tekintsük most a $\delta_j^{i,t}(\tilde{\omega})$ valószínűségi változók összességét (l. a 3. 7 pontot). Ahogy már a 3. 7 pontban megjegyeztük, ezekre a változókra alkalmazható a 3. 6 pont lemmája. Minthogy az (1. 7. 9) feltételből következik, hogy $L^t(\bar{c}^t)^{\frac{1}{b}} \rightarrow \infty$, ha $t \rightarrow \infty$, azért minden elegendően nagy t -re $L^t > N(\bar{c}^t)^{\frac{1}{b}}$, és ezért minden elég nagy t és tetszőleges j -re (l. a (3. 6. 4) egyenlőséget)

$$(3. 8. 4) \quad \tilde{P}^t \left\{ \left| \sum_{i=1}^L p_i \delta_j^i(\tilde{\omega}) - M\pi_j(\eta, \tilde{\eta}) \right| > \varepsilon \right\} \cong \frac{D(\bar{c}^t + 1)}{(L^t)^{\min(1, b)}}.$$

(3. 8. 4)-ből és a FEINSTEIN lemmájában szereplő (1. 7. 6) és (1. 7. 9) feltételekből következik, hogy

$$(3. 8. 5) \quad \tilde{P}^t \left\{ \bigcup_{j=1}^N \left| \sum_{i=1}^L p_i \delta_j^i(\tilde{\omega}) - M\pi_j(\eta, \tilde{\eta}) \right| > \varepsilon \right\} \cong \frac{DN^t(\bar{c}^t + 1)}{(L^t)^{\min(1, b)}} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

Minthogy feltevés szerint az $(\eta^t, \tilde{\eta}^t)$ sorozatot a $\{Q^t, V^t\}$ csatorna kapcsolja össze, azért a következő vektorra fennáll:

$$(3. 8. 6) \quad (M\pi_1^t(\eta, \tilde{\eta}), \dots, M\pi_N^t(\eta, \tilde{\eta})) \in \bar{V}^t$$

(l. az (1. 5. 2) definíciót). A $[\bar{V}]_e$ halmazok definíciójának megfelelően (l. az 1. 7 pontot) (3. 8. 5) és (3. 8. 6)-ból következik, hogy minden elég nagy t -re

$$(3. 8. 7) \quad \tilde{P}^t \left\{ \left(\sum_{i=1}^L p_i \delta_1^i(\tilde{\omega}), \dots, \sum_{i=1}^L p_i \delta_N^i(\tilde{\omega}) \in [\bar{V}]_e \right) \right\} \cong \frac{3}{4}.$$

A $\delta_j^{i,t}(\tilde{\omega})$ változók definíciója folytán

$$(3. 8. 8) \quad \delta_j^{i,t}(\tilde{\omega}) = \int_{\tilde{Y}^t} \pi_j^t(\zeta_i(\tilde{\omega}), \tilde{y}) Q^t(\zeta_i(\tilde{\omega}), d\tilde{y}).$$

Ezért (3. 8. 7) azt fejezi ki, hogy

$$(3. 8. 9) \quad \tilde{P}^t \left\{ \left(\sum_{i=1}^L p_i \int_{\tilde{Y}} \pi_i(\zeta_i(\tilde{\omega}), \tilde{y}) Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), d\tilde{y}), \dots, \sum_{i=1}^L p_i \int_{\tilde{Y}} \pi_N(\zeta_i(\tilde{\omega}), \tilde{y}) Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), d\tilde{y}) \right) \in [\bar{V}]_e \right\} \cong \frac{3}{4}.$$

(3.8.3) és (3.8.9)-ből következik, hogy tetszőleges elegendően nagy t -re létezik egy olyan $\tilde{\omega}_0 \in \tilde{\Omega}^t$ elemi esemény, hogy egyidejűleg fennáll

$$(3.8.10) \quad \begin{aligned} & \sum_{i=1}^{L^t} p_i^t Q^t(\zeta_i(\tilde{\omega}_0), \bar{F}_i(\tilde{\omega}_0)) \cong 1 - \varepsilon, \\ & \left(\sum_{i=1}^{L^t} p_i^t \int_{\tilde{Y}^t} \pi_1^t(\zeta_i(\tilde{\omega}_0), \tilde{y}) Q^t(\zeta_i(\tilde{\omega}_0), d\tilde{y}), \dots \right. \\ & \left. \dots, \sum_{i=1}^{L^t} p_i^t \int_{\tilde{Y}^t} \pi_N^t(\zeta_i(\tilde{\omega}_0), \tilde{y}) Q^t(\zeta_i(\tilde{\omega}_0), d\tilde{y}) \right) \in [\bar{V}^t]_\varepsilon. \end{aligned}$$

Legyen

$$y_i^t = \zeta_i^t(\tilde{\omega}_0),$$

$$A_i^t = \bar{F}_i^t(\tilde{\omega}_0),$$

akkor megkapjuk azon pontok és halmazok rendszerét, amelyek eleget tesznek a lemma mindhárom feltételének. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

3.9. Feinstein lemmája végtelen kapacitású átviteli berendezés esetére

FEINSTEIN lemmája, melyet a 3.1 pontban fogalmaztunk meg, véges kapacitású átviteli berendezésekre vonatkozott. Most le akarunk vezetni egy állítást, amely analógja ennek a lemmának, azonban végtelen kapacitású csatornákra alkalmazható.

FEINSTEIN LEMMÁJA. Legyen adva egy olyan $\{Q, V\}$ átviteli berendezés, hogy az ezen átviteli berendezéssel összekapcsolt valószínűségi változók valamilyen $\eta, \tilde{\eta}$ párjára a $p_{\eta\tilde{\eta}}(\cdot)$ eloszlás szinguláris a $p_\eta \times p_{\tilde{\eta}}(\cdot)$ eloszlásra vonatkozólag. (Ebben az esetben az $I(\eta, \tilde{\eta})$ információra fennáll: $I(\eta, \tilde{\eta}) = \infty$ és a kapacitásra $C(Q, V) = \infty$.) Legyen adva az L számú $p_1^L, \dots, p_L^L$ valószínűségek egy olyan összessége, hogy fennálljon:

$$(3.9.1) \quad \sum_{i=1}^L p_i^L = 1$$

és

$$(3.9.2) \quad \max_{i=1, \dots, L} p_i^L \leq \frac{2}{L}.$$

Akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra és minden elegendően nagy L -re létezik a bemeneti jelek (Y, S_Y) terében L számú olyan $y_1, \dots, y_L$ pont, valamint a kimeneti jelek $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}})$ terében ε pontoknak megfelelően $A_1, A_2, \dots, A_L$ halmaz-összesség, hogy fennállnak a következők:

I) az $A_1, A_2, \dots, A_L$ halmazok páronként diszjunktak

II) minden i -re

$$(3.9.3) \quad Q(y_i, A_i) = 1,$$

III) a következő vektorra fennáll, hogy

$$(3.9.4) \quad \left(\sum_{i=1}^L p_i^L \int_{\tilde{Y}} \pi_1(y_i, \tilde{y}) Q(y, d\tilde{y}), \dots, \sum_{i=1}^L p_i^L \int_{\tilde{Y}} \pi_N(y_i, \tilde{y}) Q(y_i, \tilde{y}) \right) \in [\bar{V}]_e.$$

BIZONYÍTÁS. A lemma feltételei szerint a $p_{\eta\tilde{\eta}}(\cdot)$ mérték szinguláris a $p_{\eta} \times p_{\tilde{\eta}}(\cdot)$ mértékre vonatkozólag. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $F \in S_Y \times S_{\tilde{Y}}$ halmaz, hogy

$$(3.9.5) \quad \left. \begin{aligned} p_{\eta\tilde{\eta}}(F) &= 1, \\ p_{\eta} \times p_{\tilde{\eta}}(F) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Jelöljük F_y -nal és nevezzük az y pont legyezőjének az F halmaz azon metszetét, amelyet az $y \in Y$ pont határoz meg. Analóg módon az $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ pont $F_{\tilde{y}}$ legyezőjének fogjuk nevezni az F halmaz azon metszetét, amelyet az $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ pont határoz meg. Minden $y \in Y$ -ra az F_y legyezőre fennáll $F_y \in S_{\tilde{Y}}$ és minden $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ -ra $F_{\tilde{y}} \in S_Y$ (l. [24], 34. §).

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a $p_{\eta}(\cdot)$ mérték szerint majdnem minden $y \in Y$ pontra a $Q(y, F_y)$ valószínűsége fennáll

$$(3.9.6) \quad Q(y, F_y) = 1.$$

Valóban, legyen

$$q(y, \tilde{y}) = \begin{cases} 1, & (y, \tilde{y}) \in F, \\ 0, & (y, \tilde{y}) \notin F \end{cases}$$

és alkalmazzuk a (3.7.5) egyenlőséget. Ezen egyenlőség szerint

$$\int_Y Q(y, F_y) p_{\eta}(dy) = 1.$$

Ebből már következik a keresett állítás.

Éppúgy, mint a 2.2 pontban, vezessük most be az $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{B}}, \tilde{P})$ valószínűségi segédteret, valamint ezen a téren definiált független és közös $p_{\eta}(\cdot)$ eloszlású $\zeta_1(\omega), \dots, \zeta_L(\omega)$ valószínűségi változók sorozatát. Ugyanúgy, ahogy az a 3.7 pontban történt, legyen most

$$\lambda_j(y) = \int_{\tilde{Y}} \pi_j(y, \tilde{y}) Q(y, d\tilde{y}) \quad (j=1, \dots, N)$$

és

$$M\delta_j^i(\tilde{\omega}) = M\pi_j(\eta, \tilde{\eta}).$$

A 3.7 pont meggondolásaiból adódik, hogy a $\delta_j^i(\tilde{\omega})$ -ok független, egyforma eloszlású valószínűségi változók és hogy

$$(3.9.7) \quad \delta_j^i(\tilde{\omega}) = \lambda_j(\zeta_i(\tilde{\omega})).$$

Szükségünk lesz a következő lemmára.

LEMMA. $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots$ legyen független, egyforma eloszlású, nulla várható értékű valószínűségi változók egy sorozata, továbbá legyen adva a $p_1^L, \dots, p_L^L$ számok egy olyan sorozata, amelyre

$$(3.9.8) \quad \sum_{i=1}^L p_i^L = 1, \quad 0 \leq p_i^L \leq \frac{2}{L}.$$

Akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra

$$(3.9.9) \quad \lim_{L \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \sum_{i=1}^L p_i^L \gamma_i \right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Ezt a lemmát könnyen levezethetjük a független valószínűségi változók összegének elméletében szereplő egyes jól ismert eredményekből. Például a lemma feltételei mellett teljesülnek a [6] könyv, 27. §-ban megfogalmazott 1. tételhez fűzött 3. megjegyzés feltételei, amiről könnyű meggyőződnünk akkor, ha azzal analóg módon okoskodunk, ahogy az a [6] könyv ugyanazon paragrafusában szereplő 3. tétel 2. következményének a levezetésében történik.

A most megfogalmazott lemmát esetünkre alkalmazva, azt kapjuk, hogy

$$(3.9.10) \quad \tilde{P} \left\{ \left| \sum_{i=1}^L p_i^L \delta_j^i(\tilde{\omega}) - M\pi_j(\eta, \tilde{\eta}) \right| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0 \quad (L \rightarrow \infty),$$

illetve, hogy

$$(3.9.11) \quad \tilde{P} \left\{ \bigcup_{j=1}^N \left| \sum_{i=1}^L p_i^L \delta_j^i(\tilde{\omega}) - M\pi_j(\eta, \tilde{\eta}) \right| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0 \quad (L \rightarrow \infty).$$

Ezért a 3.8 pont végén követett megfontoláshoz hasonló okoskodással arra a következtetésre jutunk, hogy

$$(3.9.12) \quad \tilde{P} \left\{ \left(\sum_{i=1}^L p_i^L \int_{\tilde{Y}} \pi_1(\zeta_i(\tilde{\omega}), \tilde{y}) Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), d\tilde{y}), \dots, \sum_{i=1}^L p_i^L \int_{\tilde{Y}} \pi_N(\zeta_i(\tilde{\omega}), \tilde{y}) Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), d\tilde{y}) \right) \in [\bar{V}]_\varepsilon \right\} \rightarrow 1 \quad (L \rightarrow \infty).$$

Szükségünk lesz a következő könnyen bizonyítható tényre. Legyenek (Y^1, S_{Y^1}) és (Y^2, S_{Y^2}) az (Y, S_Y) tér két reprezentánsa. Tekintsük a $Q(y^1, F_{Y^2})$, $(y^1, y^2) \in Y^1 \times Y^2$ függvényt. Meg akarjuk mutatni, hogy ez a függvény mérhető az $S_{Y^1} \times S_{Y^2}$ σ -algebrára vonatkozólag. Ennél azonban általánosabb állítást bizonyítunk be. Legyen $G \in S_Y \times S_{\tilde{Y}}$ és G_y a G halmaznak az a metszete, amelyet az $y \in Y$ pont határoz meg. Akkor a

$$(3.9.13) \quad q_G(y^1, y^2) = Q(y_1, G_{y_2})$$

függvény mérhető a $S_{Y^1} \times S_{Y^2}$ σ -algebrára vonatkozólag. Valóban, ha a $G^i \in S_Y \times S_{\tilde{Y}}$ halmazok páronként diszjunktak és $G = \bigcup_i G^i$, akkor minden y -ra $G_y = \bigcup_i G_y^i$, és ezért

$$q_G(y_1, y_2) = \sum_i q_{G^i}(y_1, y_2).$$

Ebből az következik, hogy azon G halmazok összessége, amelyekre a (3. 9. 13) függvény mérhető, σ -algebrát képez, és ezért mérhetőségét elegendő bebizonyítani arra az esetre, midőn $G = A \times B$, $A \in \mathcal{S}_Y$, $B \in \mathcal{S}_\tau$. De akkor $G_y = B$, ha $y \in A$ és G_y üres, ha $y \notin A$. Ezért

$$q_G(y_1, y_2) = \begin{cases} 0, & y_2 \notin A, \\ Q(y_1, B), & y_2 \in A. \end{cases}$$

Ennek mérhetősége abból következik, hogy a Q függvény első változója szerint mérhető.

Megjegyezzük, hogy a $Q(y^1, F_{y^2})$ függvény fentebb bebizonyított mérhetőségéből és abból a tényből, hogy mérhető függvények szuperpozíciója mérhető, következik, hogy a

$$Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), F_{\zeta_j}(\tilde{\omega}))$$

függvény tetszőleges i és j -re mérhető függvény a $\mathcal{B}$ σ -algebrára vonatkozólag. Számítsuk ki ennek várható értékét $i \neq j$ esetében. Nyilvánvaló, hogy a ζ_i, ζ_j változók függetlensége következtében fennáll, hogy

$$(3. 9. 14) \quad MQ(\zeta_i(\tilde{\omega}), F_{\zeta_j}(\tilde{\omega})) = \int_{Y^1} \int_{Y^2} Q(y^1, F_{y^2}) p_\eta(dy^1) p_\eta(dy^2).$$

Felhasználva FUBINI tételét (l. [9], 30. §), kapjuk, hogy

$$(3. 9. 15) \quad MQ(\zeta_i(\tilde{\omega}), F_{\zeta_j}(\tilde{\omega})) = \int_{Y^2} \left[\int_{Y^1} Q(y^1, F_{y^2}) p_\eta(dy^1) \right] p_\eta(dy^2),$$

mivel azonban az $(\eta, \tilde{\eta})$ változókat a $\{Q, V\}$ csatorna kapcsolja össze, és így fennáll (3. 7. 6), következik:

$$(3. 9. 16) \quad \int_{Y^1} Q(y^1, F_{y^2}) p_\eta(dy^1) = MQ(\eta, F_{y^2}) = M\{P\{\tilde{\eta} \in F_{y^2}/\eta\}\} = p_{\tilde{\eta}}(F_{y^2}).$$

(3. 9. 15), (3. 9. 16)-ból, a mértékek szorzatáról szóló tételből (l. [24], 36. § 2. tétel) és a (3. 9. 5) egyenlőségből következik, hogy

$$(3. 9. 17) \quad MQ(\zeta_i(\tilde{\omega}), F_{\zeta_j}(\tilde{\omega})) = \int_{Y^2} p_{\tilde{\eta}}(F_{y^2}) p_{\tilde{\eta}}(dy^2) = p_{\tilde{\eta}} \times p_{\tilde{\eta}}(F) = 0.$$

(3. 9. 17)-ből levezethető, hogy

$$(3. 9. 18) \quad \tilde{P}\{Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), F_{\zeta_j}(\tilde{\omega})) = 0\} = 1 \quad (i \neq j).$$

Következésképp 1 valószínűséggel egyidejűleg teljesülnek az alábbi egyenlőségek:

$$(3. 9. 19) \quad Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), F_{\zeta_j}(\tilde{\omega})) = 0 \quad (i \neq j; i = 1, \dots, L; j = 1, \dots, L).$$

(3. 9. 6), (3. 9. 12) és (3. 9. 19) értelmében elég nagy L esetén megválaszthatjuk az $\tilde{\omega}_0$ pontot úgy, hogy egyidejűleg fennálljanak:

$$(3. 9. 20) \quad \begin{cases} Q(\zeta_i(\tilde{\omega}_0), F_{\zeta_j}(\tilde{\omega}_0)) = 0 & (i \neq j; i = 1, \dots, L; j = 1, \dots, L), \\ Q(\zeta_i(\tilde{\omega}_0), F_{\zeta_j}(\tilde{\omega}_0)) = 1 & (i = 1, \dots, L), \end{cases}$$

a következő vektorra pedig fennálljon:

$$(3.9.21) \quad \left(\sum_{i=1}^L p_i^L \int_{\tilde{Y}} \pi_1(\zeta_i(\tilde{\omega}_0), \tilde{y}) Q(\zeta_i(\tilde{\omega}_0), d\tilde{y}), \dots \right. \\ \left. \dots, \sum_{i=1}^L p_i^L \int_{\tilde{Y}} \pi_N(\zeta_i(\tilde{\omega}_0), \tilde{y}) Q(\zeta_i(\tilde{\omega}_0), d\tilde{y}) \in [\bar{V}]_s. \right.$$

Legyen most

$$(3.9.22) \quad y_i = \zeta_i(\tilde{\omega}_0), A_i = F_{\zeta_i}(\tilde{\omega}_0) \setminus \bigcup_{j \neq i} F_{\zeta_j}(\tilde{\omega}_0),$$

akkor az y_i pontok és az A_i halmazok egy olyan rendszerét kapjuk, amely eleget tesz a tétel feltételeinek.

4. § Közleményekre vonatkozó alaplemma

4.1. A lemma megfogalmazása

FEINSTEINnek az előző paragrafusban bebizonyított lemmája durván szólva azt mondja ki, hogy egy C kapacitású csatornán, ha a hibás reprodukálás kis valószínűségű, körülbelül 2^C különböző jelet lehet átvinni. A közleményekről szóló alaplemma tartalma — durván szólva — az, hogy egy H entrópiájú közlemény átvitelét helyettesíteni lehet 2^H különböző közlemény átvitelével. E lemma megfogalmazásának és bizonyításának alapgondolata analógja a FEINSTEIN lemma alapgondolatának.

Azokat a definíciókat és jelöléseket használjuk itt is, amelyeket az 1.4 és 1.7 pontban vezettünk be.

KÖZLEMÉNYEKRE VONATKOZÓ ALAPLEMMÁ. Legyen adva egy olyan $\{W^t\}$ információ-stabilis közleménysorozat, amelyre a $H^t(W)$ entrópiára fennáll $H^t(W) \rightarrow \infty$, ha $t \rightarrow \infty$, de $H^t(W) < \infty$.

Tegyük fel, hogy a $q_i^t(x, \tilde{x})$ függvények M^t száma olyan, hogy teljesül az 1. tétel (1.7.5) feltétele. Tegyük fel azt is, hogy a tétel V. feltevése is teljesül.

Legyen $i_{\xi\tilde{\xi}}^t(x, \tilde{x})$ az V. feltételben használt $\xi^t, \tilde{\xi}^t$ változó-pár információ sűrűsége.⁶ Adjunk meg egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ -t és jelöljük F_ε^t -nal az $X^t \times \tilde{X}^t$ tér $(x^t, \tilde{x}^t)$ pontjainak azon halmazát, amelyre a

$$(4.1.1) \quad F_\varepsilon^t = \left\{ \left| \frac{i_{\xi\tilde{\xi}}^t(x, \tilde{x})}{H^t(W)} - 1 \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} \right\}$$

összefüggés definiál.

Jelöljük $r_\varepsilon^t(x)$ -vel a következő feltételes valószínűség egyik variánsát:

$$(4.1.2) \quad r_\varepsilon^t(x) = P\{(\xi, \tilde{\xi}) \notin F_\varepsilon^t | \xi = x\}.$$

⁶ A 4.2 pontban bebizonyítjuk, hogy ez az információ-sűrűség létezik minden elegendően nagy t -re.

Ekkor megadható olyan elegendően nagy T , hogy minden $t \geq T$ -re kiválasztható

$$(4.1.3) \quad K_e^t = [2^{(1+\varepsilon)H^t(W)}]$$

számú $\tilde{x}_1^t, \dots, \tilde{x}_{K_e^t}^t$ pont a kimeneti közlemények $\tilde{X}^t$ terében, továbbá e pontok mindegyikének megfeleltethető egy, az S_k^t -re vonatkozólag mérhető $q_i^t(x)$, $x^t \in X^t$ függvény, oly módon, hogy fennállnak a következők:

I) minden $x^t \in X^t$, $i = 1, \dots, K_e^t$ és $t \geq T$ -re:

$$(4.1.4) \quad 0 \leq q_i^t(x) \leq 1$$

és

$$(4.1.5) \quad Q^t(x) = \sum_{i=1}^{K_e^t} q_i^t(x) + r_e^t(x) \leq 1,$$

II) valamilyen rögzített $\varkappa > 0$ -ra és minden $t \geq T$ -re

$$(4.1.6) \quad Q^t = \int_{\tilde{X}^t} Q^t(x) p_\xi^t(dx) \geq 1 - 2^{-\varkappa H^t(W)}.$$

III) Ha $t \geq T$, akkor a következő vektorra fennáll, hogy

$$(4.1.7) \quad (S_1^t, \dots, S_M^t) \in [\bar{W}^t]_e,$$

ahol

$$(4.1.7') \quad S_k^t = \sum_{i=1}^{K_e^t} \int_{\tilde{X}^t} \varrho_k^t(x, \tilde{x}_i) q_i^t(x) p_\xi^t(dx) + \\ + \int_{X^t \times \tilde{X}^t} \varrho_k^t(x, \tilde{x}) p_{\xi\xi}^t(dx, d\tilde{x}) + [1 - Q^t] M \varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi}).$$

Hogy a lemmában bevezetett $q_i^t(x)$ függvények szemléletes jelentésére rávilágítsunk, kissé elébe vágva a későbbieknek, megjegyezzük, hogy SHANNON tételének bizonyításában a kódot úgy szerkesztjük meg, hogy — durván szólva —, amidőn az x^t közlemény $q_i^t(x)$ valószínűséggel „belép”, akkor olyan jelet vigyünk át, amelyet helyes vételkor $\tilde{x}_i^t$ közleményként fogunk visszakódolni. A csatorna információ-stabilitásából következik, hogy t nagy értékeire az $r^t(x)$ valószínűségek kicsik és (4.1.5)-tel összhangban az $1 - \sum_i q_i^t(x)$ különbség kicsi lesz. Kis valószínűséggel ($1 - \sum_i q_i^t(x)$ valószínűséggel) a közlemény egyáltalán nem fog átvivődni. A lemma III.

állítását lehetővé teszi, hogy utóbb kimutassuk, hogy ilyen átviteli módszernél teljesül a közlemény reprodukálási pontosságának a feltétele.

A bizonyítás alapgondolatát a 4.3 pontban adjuk meg, miután a 4.2 fejezetben bevezetünk bizonyos fontos fogalmakat, amelyeket majd a bizonyításban felhasználunk. Sok, számunkra szükséges megállapítás analogonja lesz azoknak a megállapításoknak, amelyeket a 3. §-ban FEINSTEIN lemmájának bizonyításában tettünk. Ezeket a gondolatmeneteket átfogóbban fejtjük ki.

4.2. Legyezők konstrukciója

E pont minden konstrukciója (valamint a 4. 4., 4. 5 pontoké is) rögzített t_0 indexű közleményekre vonatkozik. Ezt az indexet el is hagyjuk majd azokban a jelölésekben, amelyeket ezekben a fejezetekben használunk.

A $\varepsilon > 0$ szám legyen rögzítve. A megfelelő indexet ugyancsak el fogjuk hagyni mindenütt. Rögzítünk továbbá bizonyos pozitív számokat is: (β, γ, t) ; ezek a 4. 4., 4. 5 pontban tetszőlegesen lesznek. A 4. 6 pontban viszont rögzített értéket adunk nekik, amelyet ott majd közlünk. $(\xi, \tilde{\xi})$ -mal fogjuk jelölni azt a $(\xi^{t_0}, \tilde{\xi}^{t_0})$ valószínűségi változó-párt, amely az V. feltételben használt $(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ információ-stabilis sorozatban fellép. Minthogy $H(W) < \infty$, az (1. 7. 10) feltételből következik, hogy elegendően nagy t mellett az $I(\xi, \tilde{\xi})$ információra $I(\xi, \tilde{\xi}) < \infty$ fennáll. Minthogy a lemma megfogalmazásának megfelelően minket csupán elegendően nagy t -k érdekelnek, úgy vehetjük, hogy $I(\xi, \tilde{\xi}) < \infty$. Következésképp létezik az $i_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x})$ információ-sűrűség. Legyen ismét (vö. (4. 1. 1)) F az $(x, \tilde{x})$ azon pontok halmaza, amelyet a következő feltétel definiál:

$$(4.2.1) \quad F = \left\{ i_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x}) - H(W) \leq \frac{\varepsilon}{4} H(W) \right\}.$$

Az F halmazra fennáll: $F \in S_X \times S_{\tilde{X}}$. Minden $x \in X$ -re az x pont legyezőjének hívjuk és F_x -szel jelöljük az F halmaznak azt a metszetét, amelyet az x pont határoz meg. Minden $\tilde{x} \in \tilde{X}$ -ra az $\tilde{x}$ pont legyezőjének nevezzük és $F_{\tilde{x}}$ -mal jelöljük az F halmaznak azt a metszetét, amelyet az $\tilde{x}$ pont határoz meg. Ugyanúgy, mint a 3. 2 pontban is, megmutatható, hogy minden $x \in X$ -re $F_x \in S_{\tilde{X}}$, és minden $\tilde{x} \in \tilde{X}$ mellett $F_{\tilde{x}} \in S_X$.

A további megfontolásokhoz szükségünk van a következő tényre. Legyen $A \in S_X \times S_{\tilde{X}}$ és $A \subset F$, továbbá

$$(4.2.2) \quad p_{\xi\tilde{\xi}}(A|\xi=x)$$

a $(\xi, \tilde{\xi}) \in A$ eseménynek a $\tilde{\xi}$ változóra vonatkoztatott feltételes valószínűsége. Ezt a feltételes valószínűséget x olyan függvényének tekinthetjük, amely mérhető az S_X -re vonatkozólag. Legyen A_x az A halmaznak az a metszete, amelyet az x pont határoz meg. Akkor a p_{ξ} mérték szerint majdnem minden x -re

$$(4.2.3) \quad p_{\xi}(A_x) \geq 2^{-H(W)(1+\frac{\varepsilon}{4})} p_{\xi\tilde{\xi}}(A|\xi=x).$$

Az a megfontolás, amely a (4. 2. 3) egyenlőség levezetéséhez szükséges, analógja a (3. 2. 2) egyenlőtlenség levezetésében alkalmazott megfontolásnak. Nevezetesen, vegyük észre, hogy (4. 2. 1), és az információ-sűrűség definíciója következtében

$$(4.2.4) \quad a_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x}) = \frac{dp_{\xi\tilde{\xi}}}{dp_{\xi} \times p_{\tilde{\xi}}}(x, \tilde{x}) \leq 2^{H(W)(1+\frac{\varepsilon}{4})}, \quad (x, \tilde{x}) \in F.$$

Tetszőleges G mérhető halmazra, amelyre $G \subset A \subset F$, fennáll, hogy

$$(4.2.5) \quad p_{\xi\tilde{\xi}}(G) = \int_G a_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x}) p_{\xi} \times p_{\tilde{\xi}}(dx, d\tilde{x}) \leq 2^{H(W)(1+\frac{\varepsilon}{4})} p_{\xi} \times p_{\tilde{\xi}}(G).$$

Tetszőleges mérhető $B \in S_X$ -re jelölje $\hat{B}$ a következő hengerhalmazt:

$$\hat{B} = B \times \tilde{X}.$$

Akkor $p_\xi(B) = p_{\xi\tilde{\xi}}(\hat{B})$, továbbá, (4. 2. 5) és a feltételes valószínűség definíciója értelmében:

$$(4. 2. 6) \quad \int_B p_{\tilde{\xi}}(A_x) p_\xi(dx) = p_\xi \times p_{\tilde{\xi}}(A \cap \hat{B}) \cong 2^{-H(W)(1+\frac{\varepsilon}{4})} p_{\xi\tilde{\xi}}(A \cap \hat{B}) = \\ = 2^{-H(W)(1+\frac{\varepsilon}{4})} \int_B p_{\xi\tilde{\xi}}(A/\xi=x) p_\xi(dx).$$

Minthogy (4. 2. 6) tetszőleges B mellett igaz, következik, hogy (4. 2. 3) majdnem mindenütt fennáll.

Alkalmazva (4. 2. 3)-at $A = F$ -re, látjuk, hogy a $p_\xi(\cdot)$ mérték szerint majdnem minden x bemeneti közleményre az F_x legyező olyan, hogy fennáll

$$(4. 2. 7) \quad p_{\tilde{\xi}}(F_x) \cong 2^{-H(W)(1+\frac{\varepsilon}{4})} p_{\xi\tilde{\xi}}(F/\xi=x).$$

Analóg módon bizonyítható, hogy a $p_{\tilde{\xi}}(\cdot)$ mérték szerint majdnem minden $\tilde{x}$ kimeneti közleményre az $F_{\tilde{x}}$ legyező olyan, hogy fennáll

$$(4. 2. 8) \quad p_\xi(F_{\tilde{x}}) \cong 2^{-H(W)(1+\frac{\varepsilon}{4})} p_{\xi\tilde{\xi}}(F/\tilde{\xi}=\tilde{x}),$$

végül, analóg módon:

$$(4. 2. 9) \quad p_{\tilde{\xi}}(F_x) \leq 2^{-H(W)(1-\frac{\varepsilon}{4})}.$$

4. 3. A lemma bizonyításának alap gondolata

Ennek a pontnak a definíciói és megállapításai semmiféle matematikai szigorúságra nem tartanak igényt; a további pontokban nem is fogjuk felhasználni őket.

Annak analógiájára, ahogy az a FEINSTEIN lemma bizonyításakor történt, véletlenszerűen kiválasztunk egymástól függetlenül K számú $\tilde{x}_i$ pontot, $p_{\tilde{\xi}}$ eloszlással. A $q_i(x)$ valószínűségeket úgy választjuk meg, hogy csupán azok a $q_i(x)$ -ek legyenek zérustól különbözők, amelyekre $\tilde{x}_i \in F_x$. Nagy t esetén $p_{\xi\tilde{\xi}}(F) \approx 1$. Ennek folytán $p_{\xi\tilde{\xi}}(F/\xi=x) \approx 1$, azaz $r^t(x) \approx 0$ (l. (4. 1. 2)-t) az x -ek túlnyomó többségére és ezért a (4. 2. 7) egyenlőtlenség azt mutatja, hogy $p_{\tilde{\xi}}(F_x)$ rendje nagyobb mint K^{-1} , úgyhogy számítani lehet arra, hogy találhatók olyan $\tilde{x}_i$ pontok, melyek belesznek az F_x legyezőbe. Méghozzá azon $\tilde{x}_i$ pontok száma, melyek belesznek az F_x legyezőbe, exponenciálisan nő $H^t(W)$ növekedésével.

Az alapvető nehézség abban áll, hogyan érjük el a reprodukálási pontosság alapfeltételét utánzó (4. 1. 7) feltétel teljesülését. Feltevés szerint a következő vek-

torra fennáll, hogy

$$(4.3.1) \quad \left(\int \int \varrho_1(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{\xi}}(dx, d\tilde{x}), \dots, \int \int \varrho_M(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{\xi}}(dx, d\tilde{x}) \right) \in \overline{W}.$$

Jelöljük $p_{\tilde{\xi}/\xi}(d\tilde{x}/x)$ -szel a $\tilde{\xi}$ változó feltételes eloszlását a $\xi = x$ feltétel mellett; ekkor

$$(4.3.2) \quad \int \int \varrho_j(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{\xi}}(dx, d\tilde{x}) = \int \int \varrho_j(x, \tilde{x}) p_{\tilde{\xi}/\xi}(d\tilde{x}/x) p_{\xi}(dx).$$

A már említett egyenlőségből, $p_{\xi\tilde{\xi}}(F) \approx 1$ -ből következik, hogy

$$(4.3.3) \quad \int \int_{x \times \tilde{X} \setminus F} \varrho_j(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{\xi}}(dx, d\tilde{x}) \approx 0,$$

és ezért a (4.1.7) alapfeltétel teljesül, ha minden x -re és minden j -re

$$(4.3.4) \quad \int_{\tilde{X}} \varrho_j(x, \tilde{x}) p_{\tilde{\xi}/\xi}(d\tilde{x}/x) \approx \sum_{i=1}^K \varrho_j(x, \tilde{x}_i) q_i(x).$$

Nagy t -kre az F halmaz majdnem egybeesik $X \times \tilde{X}$ -mal. Ezért (4.3.4) helyettesíthető a következővel:

$$(4.3.5) \quad \int_{F_x} \varrho_j(x, \tilde{x}) p_{\tilde{\xi}/\xi}(d\tilde{x}/x) \approx \sum_{i=1}^K \varrho_j(x, \tilde{x}_i) q_i(x).$$

Tekintsük most azokat az $\tilde{x}_i$ pontokat, amelyek F_x -be beleesnek, és legyen

$$(4.3.6) \quad q_i(x) = \frac{1}{K} a_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x}_i).$$

(Amint a következőkben látni fogjuk, annak a valószínűsége, hogy a pontok úgy vannak kiválasztva, hogy $\sum_i q_i(x) > 1$ legyen, nem nagy, és ezt el lehet hanyagolni.)

Ekkor a (4.3.5) összegben mindegyik összeadandó várható értéke egyenlő a következővel (minthogy $\tilde{x}_i$ eloszlása $p_{\tilde{\xi}}$):

$$\frac{1}{K} \int_{F_x} \varrho_j(x, \tilde{x}) a_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x}) p_{\tilde{\xi}}(dx) = \int_{F_x} \varrho_j(x, \tilde{x}) p_{\tilde{\xi}/\xi}(d\tilde{x}/x).$$

Ezért — átlagban véve — a (4.3.5) jobb oldalán álló összeg egyenlő ez utóbbi egyenlőség jobb oldalával. Továbbá, ez az összeg K számú független valószínűségi változó összege is és a nagy számok törvénye értelmében (ez a törvény alkalmazható, minthogy $(x, \tilde{x}) \in F$, az $a_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x})$ változó pedig az F definíciója folytán oly értékeket vesz fel, melyek nem lépik túl $2^{H(1+\frac{\varepsilon}{4})}$ -et és $(K')^{-1} 2^{H(1+\frac{\varepsilon}{4})} \rightarrow 0$) ez közel van saját várható értékéhez. Létezik tehát az $\tilde{x}_i$ pontok olyan konkrét megválasztása, amelyre (4.3.5) igaz.

4. 4. A bemeneti közlemények véletlenszerű megválasztása

Éppúgy, mint a 3. 4 pontban, tekintsük most az $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{B}}, \tilde{P})$ valószínűségi segédteret és K számú olyan független, $\zeta_1(\tilde{\omega}), \dots, \zeta_K(\tilde{\omega})$ valószínűségi változó összességét, amelyek az $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{B}}, \tilde{P})$ téren vannak megadva és értékeik az $(\tilde{X}, S_{\tilde{X}})$ térbe esnek; legyen ezenkívül mindegyiknek az eloszlása ugyanaz: $p_{\tilde{\xi}}(\cdot)$.

Jelöljük most D_k -val ($k=1, \dots, M$) az $(x, \tilde{x})$ párok azon halmazát, amelyet a következő egyenlőtlenség definiál:

$$(4. 4. 1) \quad D_k = \{|\varrho_k(x, \tilde{x}) - M_{\varrho_k}(\xi, \tilde{\xi})| > \beta\}.$$

Felhasználva az (1. 7. 11) definíciót és a Csebisev-féle egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy

$$(4. 4. 2) \quad p_{\xi\tilde{\xi}}(D_k) \leq \frac{c}{\beta^{1+b}}.$$

Továbbá, hogy

$$(4. 4. 3) \quad \iint_{D_k} |\varrho_k(x, \tilde{x}) - M_{\varrho_k}(\xi, \tilde{\xi})| p_{\xi\tilde{\xi}}(dx, d\tilde{x}) \leq \frac{c}{\beta^b}.$$

Vezessük most be a következő halmazt:

$$(4. 4. 4) \quad G = (D_1 \cup \dots \cup D_M) \cap F.$$

(4. 4. 2)-ből következik, hogy

$$(4. 4. 5) \quad p_{\xi\tilde{\xi}}(G) \leq \frac{Mc}{\beta^{1+b}}.$$

Minthogy a $G \setminus D_k$ halmazon belül $|\varrho_k(x, \tilde{x}) - M_{\varrho_k}(\xi, \tilde{\xi})| \leq \beta$, azért (4. 4. 3)-ból és (4. 4. 5)-ből következik, hogy

$$(4. 4. 6) \quad \iint_G |\varrho_k(x, \tilde{x}) - M_{\varrho_k}(\xi, \tilde{\xi})| p_{\xi\tilde{\xi}}(dx, d\tilde{x}) \leq \frac{c}{\beta^b} + \frac{\beta Mc}{\beta^{1+b}} = \frac{c(M+1)}{\beta^b}.$$

Végül legyen

$$(4. 4. 7) \quad F = F \setminus G$$

és

$$(4. 4. 8) \quad \hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x}) = \begin{cases} a_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x}), & (x, \tilde{x}) \in \bar{F}, \\ 0, & (x, \tilde{x}) \notin \bar{F}. \end{cases}$$

Az F halmaz definíciójának megfelelően (l. (4. 2. 4))

$$(4. 4. 9) \quad 0 \leq \hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x}) \leq 2^{H(W)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)}.$$

Legyen most (vö. (4. 1. 2)-vel,)

$$(4. 4. 10) \quad \bar{r}(x) = P\{(\xi, \tilde{\xi}) \in \bar{F} / \xi = x\}.$$

Mínthogy $F \supset \bar{F}$, $F \setminus \bar{F} \subset G$, azért $r(x) \leq \bar{r}(x)$, és (4. 4. 5)-ből következik, hogy

$$(4. 4. 11) \quad \int_X (\bar{r}(x) - r(x)) p_\xi(dx) = \int_X P\{(\xi, \tilde{\xi}) \in G/\xi = x\} p_\xi(dx) \leq \frac{Mc}{\beta^{1+b}}.$$

Vezessük be az $(x, \tilde{\omega})$ párok C halmazát a következő módon:

$$(4. 4. 12) \quad C = \left\{ \left| \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) + \bar{r}(x) - 1 \right| > \gamma \right\}.$$

Legyen most tetszőleges $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ és $x \in X$ mellett

$$(4. 4. 13) \quad q_i(x, \tilde{\omega}) = \begin{cases} \frac{\hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))}{K} \frac{1 - \bar{r}(x)}{1 - \bar{r}(x) + \gamma}, & \text{ha } (x, \tilde{\omega}) \notin C, \\ 0, & \text{ha } (x, \tilde{\omega}) \in C. \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy minden x és $\tilde{\omega}$ -ra

$$(4. 4. 14) \quad 0 \leq q_i(x, \tilde{\omega}) \leq 1, \quad 0 \leq \sum_{i=1}^K q_i(x, \tilde{\omega}) \leq 1 - \bar{r}(x).$$

Tekintsük a következő valószínűségi változót:

$$(4. 4. 15) \quad \sum_{i=1}^K \hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega})).$$

Ennek az összegnek az összeadandói rögzített $x \in X$ mellett független, egyforma eloszlású valószínűségi változók. Mínthogy $\zeta_i(\tilde{\omega})$ eloszlása $p_{\tilde{\xi}}(\cdot)$, azért a (4. 4. 15) összegben valamely összeadandó várható értéke a következővel egyenlő:

$$(4. 4. 16) \quad M \hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) = \int_{\bar{F}_x} a_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x}) p_{\tilde{\xi}}(d\tilde{x}),$$

ahol $\bar{F}_x$ az F halmaznak az a metszete, amelyet az x pont határoz meg. Megjegyezzük, hogy a p_{ξ} mérték szerint majdnem mindenütt fennáll a következő egyenlőség:

$$(4. 4. 17) \quad \int_{\bar{F}_x} a_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x}) p_{\tilde{\xi}}(d\tilde{x}) = 1 - \bar{r}(x).$$

Valóban, felhasználva (4. 4. 10)-et, a feltételes valószínűség definícióját, az $a_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x})$ sűrűség meghatározását és FUBINI tételét, azt kapjuk, hogy tetszőleges $A \in S_X \times \mathcal{P}_{\tilde{X}}$

$$(4. 4. 18) \quad \begin{aligned} \int_A [1 - \bar{r}(x)] p_\xi(dx) &= \int_A P\{(\xi, \tilde{\xi}) \in \bar{F}/x\} p_\xi(dx) = \\ &= p_{\xi\tilde{\xi}}(\bar{F} \cap A \times \tilde{X}) = \int_{\bar{F} \cap A \times \tilde{X}} a_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x}) p_\xi \times p_{\tilde{\xi}}(dx, d\tilde{x}) = \\ &= \int_A \left[\int_{\bar{F}_x} a_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x}) p_{\tilde{\xi}}(d\tilde{x}) \right] p_\xi(dx), \end{aligned}$$

ebből azonban közvetlenül folyik (4. 4. 17). Így tehát kimutattuk, hogy a p_ξ mérték szerint majdnem minden $x \in X$ -re

$$(4. 4. 19) \quad M\hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) = 1 - \bar{r}(x).$$

Minthogy (4. 4. 8) és (4. 2. 9)-ből az következik, hogy

$$\tilde{P}\{\hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) \neq 0\} \leq 2^{-H(W)(1-\frac{\varepsilon}{4})},$$

azért (4. 4. 9)-ből nyilvánvaló, hogy

$$(4. 4. 20) \quad D\hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) \leq 2^{H(W)(1+\frac{3\varepsilon}{4})}.$$

A Csebisev-féle egyenlőtlenséget alkalmazva, azt kapjuk, hogy majdnem minden $x \in X$ -re

$$(4. 4. 21) \quad \tilde{P}\left\{\left|\frac{1}{K}\sum_{i=1}^K \hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) - [1 - \bar{r}(x)]\right| > \gamma\right\} \leq \frac{2^{H(W)(1+\frac{3\varepsilon}{4})}}{K\gamma^2}.$$

(4. 4. 12)-ből közvetlenül adódik, hogy

$$(4. 4. 22) \quad p_\xi \times \tilde{P}(C) \leq \frac{2^{H(W)(1+\frac{3\varepsilon}{4})}}{K\gamma^2}.$$

Ezt a becslést a következő pontban használjuk fel.

Most megjegyezzük, hogy a (4. 4. 13) definícióból következik, hogy

$$(4. 4. 23) \quad \sum_{i=1}^K q_i(x, \tilde{\omega}) \begin{cases} \cong \frac{(1 - \bar{r}(x) - \gamma)(1 - \bar{r}(x))}{1 - \bar{r}(x) + \gamma}, & \text{ha } (x, \tilde{\omega}) \notin C, \\ = 0, & \text{ha } (x, \tilde{\omega}) \in C. \end{cases}$$

(4. 4. 23)-ból látható, hogy

$$(4. 4. 24) \quad \bar{r}(x) + \sum_{i=1}^K q_i(x, \tilde{\omega}) \cong 1 - 2\gamma, \quad (x, \tilde{\omega}) \notin C.$$

(4. 4. 24), (4. 4. 23) és (4. 4. 22)-ből, ha bevezetjük a

$$(4. 4. 25) \quad \bar{Q}(x, \tilde{\omega}) = \sum_{i=1}^K q_i(x, \tilde{\omega}) + \bar{r}(x)$$

és

$$(4. 4. 26) \quad \bar{Q}(\tilde{\omega}) = \int_X \bar{Q}(x, \tilde{\omega}) p_\xi(dx)$$

jelöléseket, következik, hogy az alábbi várható értékre

$$(4. 4. 27) \quad M\bar{Q}(\tilde{\omega}) \cong (1 - 2\gamma)(1 - p_\xi \times \tilde{P}(C)) \cong (1 - 2\gamma) \left(1 - \frac{2^{H(W)(1+\frac{3\varepsilon}{4})}}{K\gamma^2}\right)$$

fennáll. Továbbá, bevezetve a következő jelöléseket (vö. (4. 1. 5), (4. 1. 6)):

$$(4. 4. 28) \quad Q(x, \tilde{\omega}) = \sum_{i=1}^K q_i(x, \tilde{\omega}) + r(x)$$

és

$$Q(\tilde{\omega}) = \int_{\tilde{X}} Q(x, \tilde{\omega}) p_{\xi}(dx),$$

(4. 4. 27) és (4. 4. 11)-ből levezethetjük az alábbi becslést:

$$(4. 4. 29) \quad MQ(\tilde{\omega}) \cong (1 - 2\gamma) \left(1 - \frac{2^{H(W)(1 + \frac{3\epsilon}{4})}}{K\gamma^2} - \frac{Mc}{\beta^{1+b}} \right).$$

4. 5. Az alap-becslések levezetése

A következő valószínűségi változóval foglalkozunk:

$$(4. 5. 1) \quad \begin{aligned} v_k(\tilde{\omega}) = & \sum_{i=1}^K \int_{\tilde{X}} \varrho_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) q_i(x, \tilde{\omega}) p_{\xi}(dx) + \\ & + \int_{\tilde{X} \times \tilde{X} \setminus \bar{F}} \varrho_k(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{\xi}}(dx, d\tilde{x}) + [1 - \bar{Q}(\tilde{\omega})] M_{\varrho_k}(\xi, \tilde{\xi}), \end{aligned}$$

ahol $k = 1, \dots, M$ értéke ebben az egész pontban rögzítve lesz. Vezessük be a következő normál függvényt:

$$(4. 5. 2) \quad \bar{\varrho}_k(x, \tilde{x}) = \varrho_k(x, \tilde{x}) - M_{\varrho_k}(\xi, \tilde{\xi}).$$

Akkor (l. (4. 4. 25), (4. 4. 26) és (4. 4. 10)-et)

$$(4. 5. 3) \quad \begin{aligned} \bar{v}_k(\tilde{\omega}) = & \sum_{i=1}^K \int_{\tilde{X}} \bar{\varrho}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) q_i(x, \tilde{\omega}) p_{\xi}(dx) + \iint_{\tilde{X} \times \tilde{X} \setminus \bar{F}} \bar{\varrho}_k(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{\xi}}(dx, d\tilde{x}) = \\ = & v_k(\tilde{\omega}) - M_{\varrho_k}(\xi, \tilde{\xi}) \left[\sum_{i=1}^K \int_{\tilde{X}} q_i(x, \tilde{\omega}) p_{\xi}(dx) + \right. \\ & \left. + p_{\xi\tilde{\xi}}(\tilde{X} \times \tilde{X} \setminus \bar{F}) + 1 - \bar{Q}(\tilde{\omega}) \right] = v_k(\tilde{\omega}) - M_{\varrho_k}(\xi, \tilde{\xi}). \end{aligned}$$

Vezessük be továbbá a következő valószínűségi változókat is:

$$(4. 5. 4) \quad \mu_k(x, \tilde{\omega}) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \bar{\varrho}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) \hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega})).$$

Meghatározásunknak megfelelően a $\zeta_i(\tilde{\omega})$ valószínűségi változók függetlenek, azért a (4. 5. 4) összeg összeadandói független valószínűségi változók. Minthogy

$\zeta_i(\tilde{\omega})$ eloszlása $p_\xi(\cdot)$, ezen összeg egy összeadandójának várható értéke a következő:

$$(4.5.5) \quad m_k(x) = M\{\bar{\varrho}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))\hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))\} = \\ = \int_{\tilde{X}} \hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x}) \bar{\varrho}_k(x, \tilde{x}) p_{\tilde{\xi}}(d\tilde{x}) = \int_{\tilde{F}_x} a_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x}) \bar{\varrho}_k(x, \tilde{x}) p_{\tilde{\xi}}(d\tilde{x}).$$

Az $\tilde{F}$ halmaz definíciójának megfelelően (l. (4.4.1), (4.4.4.), (4.4.7)-et)

$$(4.5.6) \quad |\bar{\varrho}_k(x, \tilde{x})| \leq \beta, \quad (x, \tilde{x}) \in \tilde{F},$$

azért (4.4.9)-ből következik, hogy

$$(4.5.7) \quad |\bar{\varrho}_k(x, \tilde{x})\hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x})| \leq \beta \cdot 2^{H(W)(1+\frac{\varepsilon}{4})}.$$

Felhasználva ugyanazokat a megfontolásokat, mint a (4.4.21) egyenlőtlenség levezetésében, azt kapjuk, hogy tetszőleges $x \in X$ -re:

$$(4.5.8) \quad \tilde{P}\{|\mu_k(x, \tilde{\omega}) - m_k(x)| > \delta\} \leq \frac{\beta^2 2^{H(W)(1+\frac{3\varepsilon}{4})}}{\delta^2 K}.$$

Ha most H_k -val jelöljük az $(x, \tilde{\omega})$ pontok következőképp definiált halmazát:

$$(4.5.9) \quad H_k = \{|\mu_k(x, \tilde{\omega}) - m_k(x)| > \delta\},$$

akkor (4.5.8)-ból levezethetjük a

$$(4.5.10) \quad p_\xi \times \tilde{P}\{H_k\} \leq \frac{\beta^2 \cdot 2^{H(W)(1+\frac{3\varepsilon}{4})}}{\delta^2 K}$$

egyenlőtlenséget. Megjegyezzük továbbá, hogy alkalmazva (4.5.5)-öt, FUBINI tételét és (4.4.8)-at, azt kapjuk, hogy

$$(4.5.11) \quad \int_{\tilde{X}} m_k(x) p_\xi(dx) = \int_{\tilde{X}} M\{\hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))\bar{\varrho}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))\} p_\xi(dx) = \\ = M\left\{\int_{\tilde{X}} \hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))\bar{\varrho}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) p_\xi(dx)\right\} = \\ = \int_{\tilde{X}} \int_{\tilde{X}} \hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x}) \bar{\varrho}_k(x, \tilde{x}) p_\xi \times p_{\tilde{\xi}}(dx, d\tilde{x}) = \\ = \iint_{\tilde{F}} a_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x}) \bar{\varrho}_k(x, \tilde{x}) p_\xi(dx) p_{\tilde{\xi}}(d\tilde{x}) = \iint_{\tilde{F}} \bar{\varrho}_k(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{\xi}}(dx, d\tilde{x}).$$

Mínthogy

$$(4.5.12) \quad \iint_{X \times \tilde{X}} \bar{\varrho}_k(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{\xi}}(dx, d\tilde{x}) = M\bar{\varrho}_k(\xi, \tilde{\xi}) = 0,$$

azért (l. (4. 5. 3) és (4. 5. 11)-et)

$$(4. 5. 13) \quad \begin{aligned} \bar{v}_k(\tilde{\omega}) &= \sum_{i=1}^K \int_{\tilde{X}} \bar{q}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) q_i(x, \tilde{\omega}) p_{\xi}(dx) - \\ &- \int_{\tilde{F}} \bar{q}_k(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{x}}(dx, d\tilde{x}) = \int_{\tilde{X}} \left(\sum_{i=1}^K \bar{q}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) q_i(x, \tilde{\omega}) - m_k(x) \right) p_{\xi}(dx). \end{aligned}$$

Most felső becslést akarunk adni az $M|\bar{v}_k(\tilde{\omega})|$ mennyiségre.

$$(4. 5. 14) \quad \begin{aligned} M|\bar{v}_k(\tilde{\omega})| &\leq \iint_{X \times \tilde{\Omega}} \left| \sum_{i=1}^K \bar{q}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) q_i(x, \tilde{\omega}) - m_k(x) \right| p_{\xi} \times \tilde{P}(dx, d\tilde{\omega}) \leq \\ &\leq \iint_{X \times \tilde{\Omega} \setminus (C \cup H_k)} |\mu_k(x, \tilde{\omega}) - m_k(x)| p_{\xi} \times \tilde{P}(dx, d\tilde{\omega}) + \\ &+ \iint_{X \times \tilde{\Omega} \setminus (C \cup H_k)} \left| \sum_{i=1}^K \bar{q}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) q_i(x, \tilde{\omega}) - \mu_k(x, \tilde{\omega}) \right| p_{\xi} \times \tilde{P}(dx, d\tilde{\omega}) + \\ &+ \iint_{C \cup H_k} \left| \sum_{i=1}^K \bar{q}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) q_i(x, \tilde{\omega}) \right| p_{\xi} \times \tilde{P}(dx, d\tilde{\omega}) + \\ &+ \iint_{C \cup H_k} |m_k(x)| p_{\xi} \times \tilde{P}(dx, d\tilde{\omega}). \end{aligned}$$

Rendre becsülni fogjuk a (4. 5. 14) egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő összeadandókat. A H_k halmaz definíciójából közvetlenül következik, hogy (l. (4. 5. 9)-et)

$$(4. 5. 15) \quad \iint_{X \times \tilde{\Omega} \setminus (C \cup H_k)} |\mu_k(x, \tilde{\omega}) - m_k(x)| p_{\xi} \times \tilde{P}(dx, d\tilde{\omega}) \leq \delta.$$

Ahhoz, hogy a (4. 5. 14) összeg második tagját becsülhessük, először is megjegyezzük, hogy (l. (4. 4. 13)-at)

$$(4. 5. 16) \quad \frac{\hat{a}_{\xi\tilde{x}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))}{K} - q_i(x, \tilde{\omega}) = \frac{\hat{a}_{\xi\tilde{x}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))}{K} \frac{\gamma}{1 - \bar{r}(x) + \gamma}, \quad (x, \tilde{\omega}) \notin C.$$

(4. 5. 16) és (4. 5. 4)-ből

$$(4. 5. 17) \quad \begin{aligned} \mu_k(x, \tilde{\omega}) - \sum_{i=1}^K \bar{q}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) q_i(x, \tilde{\omega}) &= \\ &= \sum_{i=1}^K \bar{q}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) \left[\frac{\hat{a}_{\xi\tilde{x}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))}{K} - q_i(x, \tilde{\omega}) \right] = \\ &= \frac{\gamma}{1 - \bar{r}(x) + \gamma} \sum_{i=1}^K \frac{\hat{a}_{\xi\tilde{x}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) \bar{q}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))}{K} = \frac{\gamma}{1 - \bar{r}(x) + \gamma} \mu_k(x, \tilde{\omega}), \quad (x, \tilde{\omega}) \notin C. \end{aligned}$$

(4. 5. 17) és (4. 5. 9)-ből következik, hogy

$$\begin{aligned}
 & \iint_{X \times \tilde{\Omega} \setminus (C \cup H_k)} \left| \sum_{i=1}^K \bar{q}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) q_i(x, \tilde{\omega}) - \mu_k(x, \tilde{\omega}) \right| p_\xi \times \tilde{P}(dx, d\tilde{\omega}) \leq \\
 (4. 5. 18) \quad & \leq \gamma \iint_{X \times \tilde{\Omega} \setminus (C \cup H_k)} \frac{|\mu_k(x, \tilde{\omega})|}{1 - \bar{r}(x) + \gamma} p_\xi \times \tilde{P}(dx, d\tilde{\omega}) \leq \\
 & \leq \gamma \iint_{X \times \tilde{\Omega}} \frac{\delta + |m_k(x)|}{1 - \bar{r}(x) + \gamma} p_\xi \times \tilde{P}(dx, d\tilde{\omega}) \leq \gamma \int_X \frac{\delta + |m_k(x)|}{\gamma + 1 - \bar{r}(x)} p_\xi(dx).
 \end{aligned}$$

Felhasználva a (4. 5. 6) egyenlőtlenséget, a (4. 5. 5) definíciót és a (4. 4. 17) egyenlőséget, azt kapjuk, hogy a p_ξ mérték szerint majdnem minden $x \in X$ értékre:

$$\begin{aligned}
 |m_k(x)| &= \left| \int_{\tilde{F}_x} a_{\xi\xi}(x, \tilde{x}) \bar{q}_k(x, \tilde{x}) p_\xi(d\tilde{x}) \right| \leq \\
 (4. 5. 19) \quad & \leq \beta \int_{\tilde{F}_x} a_{\xi\xi}(x, \tilde{x}) p_\xi(d\tilde{x}) = \beta[1 - \bar{r}(x)].
 \end{aligned}$$

Ezért majdnem minden $x \in X$ -re

$$(4. 5. 20) \quad \frac{\delta + |m_k(x)|}{\gamma + 1 - \bar{r}(x)} \leq \frac{\delta + \beta[1 - \bar{r}(x)]}{\gamma + [1 - \bar{r}(x)]} = \frac{\delta}{\gamma + [1 - \bar{r}(x)]} + \beta \frac{1 - \bar{r}(x)}{\gamma + 1 - \bar{r}(x)} \leq \frac{\delta}{\gamma} + \beta.$$

Alkalmazva (4. 5. 20) és (4. 5. 18)-at, megállapíthatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 & \iint_{X \times \tilde{\Omega} \setminus (C \cup H_k)} \left| \sum_{i=1}^K \bar{q}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) q_i(x, \tilde{\omega}) - \mu_k(x, \tilde{\omega}) \right| p_\xi \times \tilde{P}(dx, d\tilde{\omega}) \leq \\
 (4. 5. 21) \quad & \leq \gamma \left(\frac{\delta}{\gamma} + \beta \right) \int_X p_\xi(dx) = \delta + \gamma\beta.
 \end{aligned}$$

Foglalkozunk most a (4. 5. 14) összeg harmadik tagjával. Megjegyezzük, hogy a (4. 4. 8) és a (4. 4. 13) definíciók értelmében

$$(4. 5. 22) \quad q_i(x, \tilde{\omega}) = \hat{a}_{\xi\xi}(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) = 0, \quad \text{ha} \quad |\bar{q}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))| > \beta.$$

Minthogy $\sum_{i=1}^K q_i(x, \tilde{\omega}) \leq 1$ (l. (4. 4. 14)-et), azért (4. 5. 22)-ből következik, hogy

$$(4. 5. 23) \quad \left| \sum_{i=1}^K \bar{q}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) q_i(x, \tilde{\omega}) \right| \leq \beta.$$

Mármost (4. 5. 23), (4. 5. 10) és (4. 4. 22)-ből következik, hogy

$$(4. 5. 24) \quad \iint_{C \cup H_k} \left| \sum_{i=1}^K \bar{q}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) q_i(x, \tilde{\omega}) \right| p_{\xi} \times \tilde{P}(dx, d\tilde{\omega}) \leq \\ \leq \beta [p_{\xi} \times \tilde{P}(C) + p_{\xi} \times \tilde{P}(H_k)] \leq \beta \left[\frac{2^{H(W)(1+\frac{3\varepsilon}{4})}}{K\gamma^2} + \frac{\beta^2 \cdot 2^{H(W)(1+\frac{3\varepsilon}{4})}}{K\delta^2} \right].$$

Végül (4. 5. 19), (4. 5. 10) és (4. 4. 22)-ből kapjuk, hogy

$$(4. 5. 25) \quad \iint_{C \cup H_k} |m_k(x)| p_{\xi} \times \tilde{P}(dx, d\tilde{\omega}) \leq \beta \left[\frac{2^{H(W)(1+\frac{3\varepsilon}{4})}}{K\gamma^2} + \frac{\beta^2 \cdot 2^{H(W)(1+\frac{3\varepsilon}{4})}}{K\delta^2} \right].$$

Egybevetve mármost a (4. 5. 14), (4. 5. 15), (4. 5. 21), (4. 5. 24), (4. 5. 25) egyenlőtlenségeket, megállapíthatjuk, hogy

$$(4. 5. 26) \quad M|\bar{v}_k(\tilde{\omega})| \leq 2\delta + \gamma\beta + 2 \frac{\beta \cdot 2^{H(W)(1+\frac{3\varepsilon}{4})}}{K} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{\beta^2}{\delta^2} \right).$$

Ezt a becslést a következő pontban használjuk fel.

4. 6. A közleményekre vonatkozó alaplemma bizonyításának befejezése

Emlékezzünk most vissza arra, hogy a korábbi pontokban rögzített összes mennyiségek a t indextől függtek. A β, γ, δ számoknak, amelyeket a megelőző pontokban tetszőlegesen tekintettünk, adjuk most a következő konkrét értékeket:

$$(4. 6. 1) \quad \left. \begin{aligned} \beta^t &= 2^{H^t(W) \frac{\varepsilon}{200}}, \\ \gamma^t &= 2^{-H^t(W) \frac{\varepsilon}{100}}, \\ \delta^t &= 2^{-H^t(W) \frac{\varepsilon}{100}}. \end{aligned} \right\}$$

Az (1. 7. 5) és (1. 7. 12) feltételekből, amelyeket lemmánkban kikötöttünk, valamint (4. 6. 1)-ből következik, hogy elég nagy t értékekre

$$(4. 6. 2) \quad \frac{M^t c^t}{(\beta^t)^{1+b}} \leq 2^{-H^t(W) \frac{\varepsilon}{500}}.$$

A (4. 1. 3), (4. 6. 1) definíciókból, a (4. 6. 2) egyenlőtlenségből, a $H^t(W) \rightarrow \infty$ feltételből és a (4. 4. 29) egyenlőtlenségből levezethető, hogy minden elegendően nagy t -re

$$(4. 6. 3) \quad MQ^t(\tilde{\omega}) \geq 1 - 2^{-H^t(W) \frac{\varepsilon}{1000}}.$$

Továbbá, a (4. 1. 3) definícióból, a (4. 6. 1) definícióból és a (4. 5. 26) becslésből következik, hogy minden elegendően nagy t -re

$$(4. 6. 4) \quad M|\bar{v}_k^t(\tilde{\omega})| \leq 2^{-H^t(W)} \frac{\varepsilon}{1000}.$$

Megjegyezzük, hogy a (4. 5. 1) és (4. 5. 3) definícióknak megfelelően

$$(4. 6. 5) \quad \begin{aligned} \bar{v}_k^t(\tilde{\omega}) &= v_k^t(\tilde{\omega}) - M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi}) = \sum_{i=1}^{K^t} \int_{X^t} \varrho_k^t(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) q_i^t(x, \tilde{\omega}) p_{\xi}^t(dx) + \\ &+ \iint_{X^t \times \tilde{X}^t \setminus \bar{F}_\varepsilon^t} \varrho_k^t(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x}) + [1 - \bar{Q}^t(\tilde{\omega})] M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi}) - M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi}). \end{aligned}$$

Vegyük észre azt is, hogy

$$(4. 6. 6) \quad \begin{aligned} &\iint_{X^t \times \tilde{X}^t \setminus \bar{F}_\varepsilon^t} \varrho_k^t(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x}) + [1 - \bar{Q}^t(\tilde{\omega})] M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi}) = \\ &= \iint_{X^t \times \tilde{X}^t \setminus \bar{F}_\varepsilon^t} \varrho_k^t(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x}) + [1 - Q^t(\tilde{\omega})] M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi}) + \\ &+ \iint_{F_\varepsilon^t \times \bar{F}_\varepsilon^t} \varrho_k^t(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x}) + [Q^t(\tilde{\omega}) - \bar{Q}^t(\tilde{\omega})] M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi}). \end{aligned}$$

Mínt hogy a (4. 4. 28), (4. 4. 25), (4. 4. 10), (4. 1. 2) definíciók következtében

$$(4. 6. 7) \quad \begin{aligned} Q^t(\tilde{\omega}) - \bar{Q}^t(\tilde{\omega}) &= \int_{X^t} [r^t(x) - \bar{r}^t(x)] p_{\xi}^t(dx) = \\ &= - \int_{X^t} P^t\{(\xi, \tilde{\xi}) \in F_\varepsilon \setminus \bar{F}_\varepsilon / \xi = x\} p_{\xi}^t(dx) = - \iint_{F_\varepsilon^t \setminus \bar{F}_\varepsilon^t} p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x}), \end{aligned}$$

tehát (4. 6. 6) járulékos tagjára fennáll, hogy

$$(4. 6. 8) \quad \begin{aligned} &\left| \iint_{F_\varepsilon^t \setminus \bar{F}_\varepsilon^t} \varrho_k^t(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x}) + [Q^t(\tilde{\omega}) - \bar{Q}^t(\tilde{\omega})] M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi}) \right| = \\ &= \left| \iint_{F_\varepsilon^t \setminus \bar{F}_\varepsilon^t} [\varrho_k^t(x, \tilde{x}) - M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi})] p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x}) \right| \leq \frac{c^t(M^t + 1)}{(\beta^t)^b}. \end{aligned}$$

Ezért (4. 6. 5), (4. 6. 6.), (4. 6. 8) és (4. 6. 4)-ből következik, hogy minden elegendően nagy t -re, — bevezetve a

$$(4. 6. 9) \quad S_k^t(\tilde{\omega}) = \sum_{i=1}^{K^t} \int_{X^t} q_k^t(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) q_i^t(x, \tilde{\omega}) p_{\xi}^t(dx) + \\ + \iint_{X^t \times \tilde{X}^t \setminus F_{\xi}^t} q_k^t(x, \tilde{x}) p_{\xi\xi}^t(dx, d\tilde{x}) + [1 - Q^t(\tilde{\omega})] M q_k^t(\xi, \tilde{\xi})$$

menntiségeket és az $M|S_k^t(\omega) - M q_k^t(\xi, \tilde{\xi})|$ várható értékeket képezve,

$$(4. 6. 10) \quad M|S_k^t(\tilde{\omega}) - M q_k^t(\xi, \tilde{\xi})| \leq M|\bar{v}_k^t(\tilde{\omega})| + \frac{c^t(M^t + 1)}{(\beta^t)^b} \leq 2^{\frac{-H^t(W)ae}{2000}},$$

ahol $a = \min(b, 1)$. (4. 6. 10)-ből és a lemma (1. 7. 5) feltételéből következik, hogy minden elegendően nagy t -re

$$(4. 6. 11) \quad \tilde{P}^t\left\{\max_{k=1, \dots, M} |S_k(\tilde{\omega}) - M q_k(\xi, \tilde{\xi})| > \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{4}.$$

Minthogy a $(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ valószínűségi változók sorozata eleget tesz a $\{\bar{W}^t\}$ reprodukálás-pontossági feltételnek, azért a $(M q_1^t(\xi, \tilde{\xi}), \dots, M q_{M^t}^t(\xi, \tilde{\xi}))$ vektorra fennáll:

$$(4. 6. 12) \quad (M q_1^t(\xi, \tilde{\xi}), \dots, M q_{M^t}^t(\xi, \tilde{\xi})) \in \bar{W}^t.$$

Ezért, a $[\bar{W}^t]_{\varepsilon}$ halmaz definíciója folytán a (4. 6. 11) egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy minden elegendően nagy t -re

$$(4. 6. 13) \quad \tilde{P}^t\{(S_1(\tilde{\omega}), \dots, S_M(\tilde{\omega})) \in [\bar{W}]_{\varepsilon}\} \geq \frac{3}{4}.$$

A (4. 6. 3) egyenlőtlenségből $\kappa = \frac{\varepsilon}{2000}$ mellett és minden elegendően nagy t -re következik, hogy

$$(4. 6. 14) \quad \tilde{P}^t\{Q(\tilde{\omega}) \geq 1 - 2^{-\kappa H(W)}\} \geq \frac{3}{4}.$$

(4. 6. 13) és (4. 6. 14)-ből következik, hogy létezik legalább egy olyan $\tilde{\omega}_0^t$, hogy

$$(4. 6. 15) \quad (S_1^t(\tilde{\omega}_0), \dots, S_{M^t}^t(\tilde{\omega}_0)) \in [\bar{W}^t]_{\varepsilon}, \quad Q^t(\tilde{\omega}_0) \geq 1 - 2^{\kappa H^t(W)}$$

egyidejűleg fennáll. Legyen most

$$(4. 6. 16) \quad \tilde{x}_i^t = \zeta_i^t(\tilde{\omega}_0), \quad q_i^t(x) = q_i^t(x, \tilde{\omega}_0),$$

akkor oly változók rendszerét kapjuk, amelyek eleget tesznek a közleményekre vonatkozó alaplemma feltételeinek.