

A VÉGES ELEMES MÓDSZERÉNEK ALKALMAZÁSA SÍKBELI KÉPLÉKENY FELADATRA

ÁRVAY KÁLMÁN*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

GYÖRGYI JÓZSEF** GALASKÓ GYULA***

A dolgozat képlékeny anyagtörvény alkalmazásával tárgyalt, síkbeli alakváltozási állapotban levő kontinuumfeladat megoldását mutatja be. Az alapösszefüggések ismertetése után a véges elemes módszerrel meghatározza, iterációs eljárás segítségével, a rugalmas-képlékeny állapotban levő anyag feszültség-elmozdulás értékeit. A beépített tartószerkezettel történő érintkezésnél, a súrlódás miatt fellépő elválási feladatot is a képlékeny állapotra kidolgozott módszerrel oldja meg. A dolgozat a módszer alkalmazását számpéldán mutatja be.

1. Bevezetés

A mérnöki szerkezetek teher alatti viselkedésének leírásához ismernünk kell a feszültségek és alakváltozások közötti összefüggést megadó anyagtörvényt. A vizsgálatokhoz szükséges lényeges tulajdonságokat leíró anyagmodellek közül a lineárisan rugalmas viselkedés feltételezése biztosítja a legegyszerűbb matematikai megoldást. Az anyagok egy részénél azonban a lineárisan rugalmas viselkedés feltételezése igen durva közelítést jelentene, míg a lineárisan rugalmas — tökéletesen képlékeny anyagmodell alkalmazása pontosabb számítást tesz lehetővé.

A képlékenységtan elméleti alapjait már régebben kidolgozták. Kontinuum-feladatok megoldásakor azonban alkalmazása a legutóbbi időkig — néhány egyszerűbb esetet leszámítva — a határállapot vizsgálatára szorítkozott. A felmerülő matematikai nehézségek nem tették lehetővé a csak részben képlékeny állapotban levő szerkezetek vizsgálatát. Az elektronikus számítógépek megjelenését követően a megfelelő numerikus módszerek kidolgozása megnyitotta az utat az említett anyagtörvényt követő kontinuum-feladatok megoldása előtt. A kidolgozott eljárások közül a véges elemes módszerének alkalmazását mutatjuk be lineárisan rugalmas-tökéletesen képlékeny anyagtörvény esetére.

2. Az elméleti alapok összefoglalása

Kontinuum-feladatok megoldásához szükséges összefüggéseket általában parciális differenciálegyenletek alakjában írják fel. Az alapösszefüggések három csoportra bonthatók.

* Dr. Árvay Kálmán, 1016 Budapest, Mészáros u. 18.

** Dr. Györgyi József, 1221 Budapest, Arany J. u. 96/b.

*** Dr. Galaskó Gyula, 1191 Budapest, Marx K. u. 64.

a) Az egyensúlyi egyenletek — Cauchy-féle egyenletek — képlékeny anyagok esetében is változatlan formában érvényesek. Ezek az összefüggések akkor is érvényesek, ha azokban nem a tényleges feszültségeket, hanem növekményeiket szerepeltetjük.

b) Az alakváltozások és elmozdulások közötti összefüggét megadó geometriai egyenletek változatlan formában érvényesek képlékeny anyag esetében akkor is, ha a tényleges alakváltozásokat és elmozdulásokat szerepeltetjük bennük és akkor is, ha csak növekményeiket.

c) Az anyagtörvény felírásához szükséges a képlékenységi feltétel ismerete. Ez egy olyan függvény, amely megadja a feszültségeknek az anyagi minőséget megadó k érték mellett minden olyan kombinációját, amely a rugalmas viselkedés határát jelenti. Ezt az $F(\sigma, k)$ függvényt úgy írjuk fel, hogy

$$F(\sigma, k) < 0 \quad (1a)$$

esetben rugalmas,

$$F(\sigma, k) = 0 \quad (1b)$$

esetben képlékeny állapotban van az anyag. Nullánál nagyobb értékekre a függvény nincs értelmezve.

Ismeretes, hogy a képlékeny állapotban egy pont ϵ alakváltozása két részből tevődik össze, egy ϵ_r rugalmas és egy ϵ_p képlékeny részből:

$$\epsilon = \epsilon_r + \epsilon_p. \quad (2)$$

A rugalmas nyúlást — vagy a nyúlás növekményét — a feszültség függvényében az általános Hooke-törvény segítségével fejezhetjük ki:

$$\Delta \epsilon_r = \mathbf{D}_H \Delta \sigma. \quad (3)$$

A képlékenységi feltételből a normalitási elvnek megfelelően az alakváltozások növekménye a

$$\Delta \epsilon_p = \Delta \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (4)$$

összefüggésből nyerhetők.

A teljes alakváltozás a fenti két kifejezés összegéből előállítható. Az összevonás után az

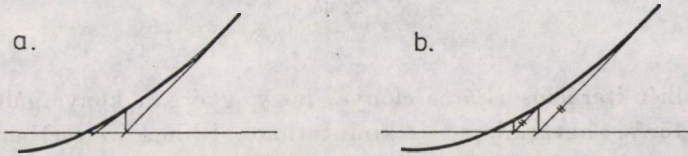
$$\Delta \epsilon = \mathbf{D}_p(\sigma) \Delta \sigma \quad (5)$$

alakú anyagtörvényt nyerhetjük. Ebből az egyenlethől sem a nyúlások, sem a feszültségek explicit alakban nem fejezhetők ki, mivel az összefüggés nem lineáris ϵ és σ között. Ennek következtében az anyagtörvényt az egyensúlyi és összeférhetőségi egyenletekkel nem tudjuk összevonni. A megoldást ezért csak numerikus eljárás segítségével tudjuk megkeresni.

3. Numerikus eljárás

A numerikus eljárások, a nagymennyiségű számítási munka és a nagyméretű egyenletrendszerek miatt elektronikus számítógép alkalmazására épülnek. A közelítő módszerek közül a véges elemek módszere különösen kitüntetett helyet foglal el képlékeny feladatok megoldása során.

Képlékeny feladatok megoldása síkbeli feszültség vagy síkbeli alakváltozási állapot esetében egyszerű. Háromszög alakú elemeket választva, lineáris alakfüggvény alkalmazása esetében ugyanis azokban a feszültségek nem változnak. Így egy elemen belül vagy rugalmas (3), vagy képlékeny anyagtörvényt (5) kell a feszültségektől függően alkalmazni.



1. ábra

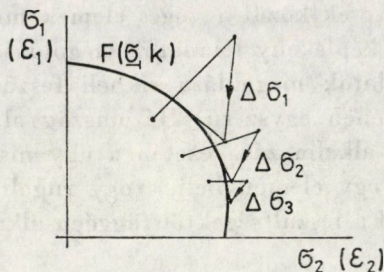
Az elmozdulásmódszerrel történő vizsgálatok esetében szükségünk van a merevségi értékekre. Ezek az anyagtörvény függvényei. Mint hogy az (5) alatti kifejezés explicit formában nem oldható meg, a képlékeny állapothoz tartozó merevségi mátrix sem állítható elő közvetlenül. Ezért, ha valamelyik elemen belül teljesül az (1b) alatti feltétel, a feladatot iterációs úton lehet megoldani. A megoldás a Newton—Raphson-módszer (1a ábra) módosított változata, az állandó érintők módszere (1b ábra) alapján történik.

Az iterációs eljárás alapja, hogy a rugalmas állapothoz tartozó merevségi értékek felhasználásával fokozatos közelítéssel érjük el a képlékenységi feltétel teljesülését. Az iterációs eljárás lépéseit, mechanikai megfontolások alapján kétféle úton végezhetjük el. Mindkét eljárásban a tehernek azt a részét, amely már képlékeny állapot elérése után működik a szerkezetre, több lépcsőben működtetjük. Az egyes teherlépcsőkhöz tartozó megoldást keressük meg a kétféle iterációs eljárás valamelyikével, végül az egyes lépésekben nyert eredményeket összegezzük.

A „kezdeti feszültségek” módszere az adott teherlépcsőhöz a rugalmas állapotnak megfelelő úton kiszámítja a feszültségeket, majd az (5) alapján megállapítja a hiba nagyságát. Ebből a hibából fiktív terhet számít, erre oldja meg a feladatot, és addig ismétli a lépéseket, amíg a hiba tetszőlegesen kicsi nem lesz (2. ábra). Ezután kerül sor a következő teherlépcső alkalmazására.

A „kezdeti alakváltozások” módszere hasonlóan jár el az előzőhöz, de itt az alakváltozások értékéből indul ki, és ezek hibájából számít fiktív terhet.

A kezdeti feszültségek módszerét akkor előnyösebb használni, ha az anyag növekvő feszültségekkel erősebben növekvő alakváltozásokat szenved, míg az utóbbit a keményedő anyagok esetében.



2. ábra

Mindkét iterációs eljárás előnye, hogy gyorsan konvergálnak. Segítségükkel a törési határállapot is kimutatható. Ebben az esetben ugyanis az eljárások nem konvergálnak és ez jelzi az adott teherlépcső esetében bekövetkező törést.

A fenti eljárásokkal analóg megoldást lehet alkalmazni néhány elválási feladat megoldása esetében is. Pl. súrlódás biztosította kapcsolat erő-elmozdulás diagramja azonos egy lineárisan rugalmas-tökéletesen képlékeny anyag húzó-diagramjával, így e probléma — és több, hozzá hasonló feladat is — mint képlékenységtani probléma oldható meg.

4. Alkalmazás

Röviden bemutatjuk egy síkbeli alakváltozási állapotban levő feladat megoldását, amely mélyépítési feladatokban kerül alkalmazásra.

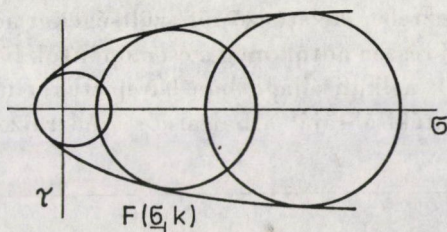
Képlékenységtani feltételként a Coulomb—Drucker félélt alkalmaztuk:

$$F(\sigma, k) = \alpha J_1 + \sqrt{J_2} - K = 0, \quad (6)$$

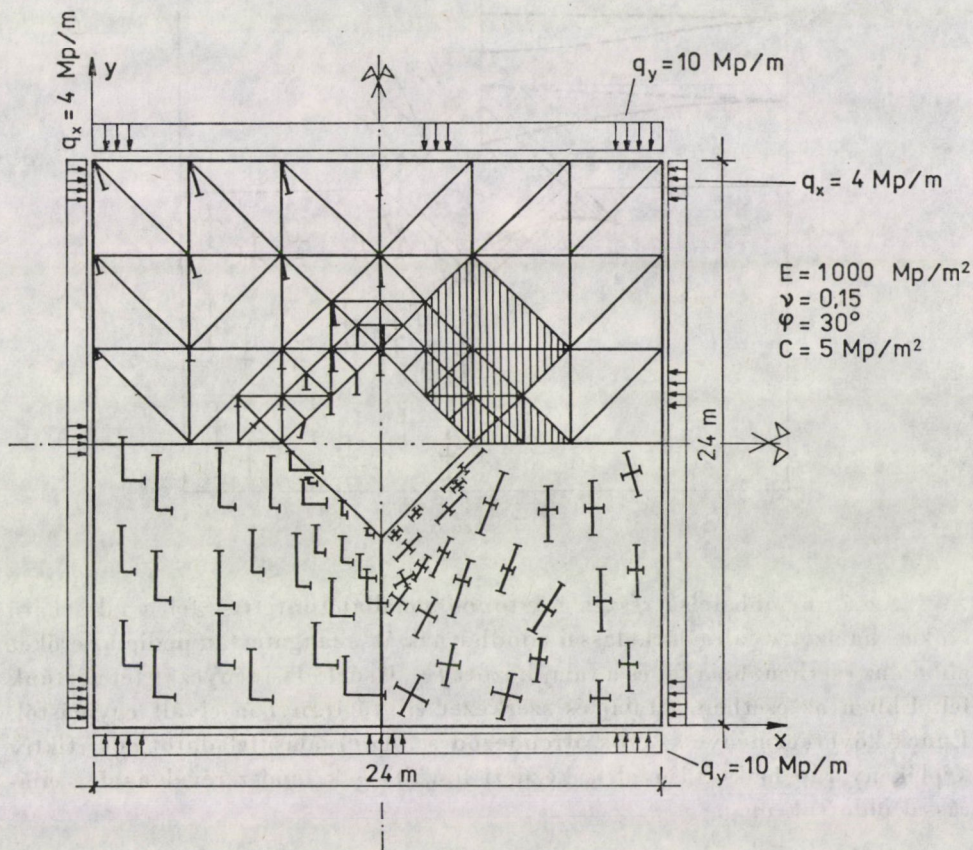
ahol J_1 az első, J_2 a második invariánsa a feszültségtenzornak, α és K pedig a kohéziótól és a súrlódási szögtől függő állandó.

A képlékenységi feltételt a szokásos Mohr-körös ábrázolásban a 3. ábrán rajzoltuk meg.

A mintapélda a 4. ábrán látható. A kétszeresen szimmetrikus, középen lyukat tartalmazó kontinuum hálózata az ábra felső részén látható. Az első példát középen lyukkal oldottuk meg. Az ábra jobb felső részén vonalkázással tüntettük fel azokat az elemeket, amelyekben a képlékeny állapot bekövetke-



3. ábra

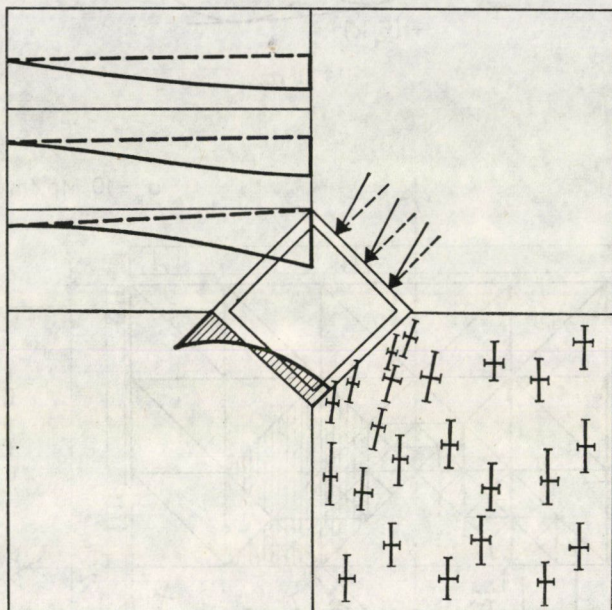


4. ábra

zett. Mellette bal oldalon a hálózat csomópontjainak elmozdulásai szerepelnek. Alul bal oldalon a σ_x és σ_y feszültségeket, jobbra lent a σ_1 és σ_2 főfeszültségeket adtuk meg.

Az 5. ábrán azonos adatok mellett a lyuk körül 25 cm vastag, $E = 2 \cdot 10^7$ Mp/m^2 , $\nu = 0,3$ jellemzőkkel adott szerkezetet építettünk be. A fal okozta

megtámasztás következtében keletkező főfeszültségeket a jobb alsó negyedben ábrázoltuk. A bal felső részen adtuk meg a csomópontok függőleges eltolódásait szaggatott, míg a lyuk nélküli állapotban létrejöttéket folytonos vonallal ki-húzva. A keret nyomatéki ábráját a bal alsó részén rajzoltuk fel.



5. ábra

Az ábra jobb felső részén folytonos vonallal tüntettük fel a falra ható erőket, ha azok a falra súrlódással adódhatnak át, szaggatottan pedig az erőket abban az esetben, ha a fal és a talaj között $f = 0$ súrlódási tényezőt tételeztünk fel. Ebben az esetben a talaj és szerkezet érintő irányban elvált egymástól. Ennek következménye az erők átrendeződése. Az elválási feladatot egy fiktív képlékeny rúd beiktatásával, a kezdeti feszültségek módszerével analóg eljárással oldottuk meg.

5. Összefoglalás

Kontinuumfeladatok vizsgálatakor a képlékeny anyagtörvény alkalmazását a megfelelő numerikus eljárások elterjedése tette lehetővé. Ezek segítségével ma már nemcsak a határállapot elérésekor, hanem általános esetekben is alkalmazhatók a képlékenységtan eredményei. Így egyes anyagok esetében a valóságot lényegesen jobban és pontosabban leíró összefüggések segítségével oldhatók meg különböző mérnöki feladatok. Előnyös az alkalmazása elsősorban

akkor, ha pl. az anyag húzófeszültséget alig tud felvenni, mint talajok és beton esetében is. A képlékeny állapotra alkalmazott összefüggések segítségével elválasztási feladatok is tárgyalhatók.

A jövőben megkíséréljük a módszert egyéb képlékenységtani feltételekre, illetve térbeli feladatok megoldására is felhasználni.

Application of the method of finite elements in planar plastic problems. The solution by plastic material law of a continuum problem in planar deformation state is presented. After the explanation of the basic correlations, the stress-displacement values of the material in plastic-elastic state are determined by the method of finite elements using iteration. In the case of a contact with a built-in support structure the separation problem due to friction is also solved with the method elaborated for plastic conditions. Finally, application is illustrated by means of a numerical example.

Anwendung der Methode finiter Elemente bei ebenen plastischen Aufgaben. Der Aufsatz zeigt die Lösung der im ebenen Formänderungszustand befindlichen Kontinuumsaufgabe mit Anwendung des plastischen Materialgesetzes. Nach Erörterung der grundlegenden Zusammenhänge werden die Spannungs- und Verschiebungswerte nach der Methode der finiten Elemente mit Hilfe des Iterationsverfahrens bestimmt. Das bei der Berührung mit eingebauten Tragkonstruktionen infolge der Reibung auftretende Trennungproblem wird ebenfalls nach dem für diesen plastischen Zustand ausgearbeiteten Verfahren gelöst. Der Aufsatz enthält auch ein Zahlenbeispiel.

Применение метода конечных элементов на плоскую задачу пластичности. Работа показывает решение плоской задачи с применением закона пластичности. После изложение основных зависимостей с помощью итерационного процесса и методом конечных элементов определяет значения напряжения и деформации в упругопластическом состоянии. Задача отделения по трению у контакта встроенной конструкции решается тоже методом, выработанным на пластичное состояние. Наконец в работе численный пример показывает применение метода.