

AZ INHOMOGÉN KÉPLÉKENY FÉLSÍK ÉS FÉLTÉR EGYSZERŰ DISZKRÉT MODELLJE

KALISZKY SÁNDOR*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

NÉDLI PÉTER**

Szerzők bemutatják, hogy egy új diszkrét modell segítségével egyszerűen elő lehet állítani az inhomogén féltér ill. félsík statikailag lehetséges feszültségmezőit, ezek pedig különböző képlékenységtani feladatok vizsgálatának alapját képezhetik. A numerikus módszer kidolgozásánál feltételezik, hogy az inhomogén féltér, ill. félsík ideálisan képlékeny anyagú, síkbeli alakváltozási ill. feszültségi állapotban van és peremére közvetlenül vagy valamilyen szerkezet közvetítésével csak normál feszültségek adódhatnak át. Az alkalmazás lehetőségét két feladat szemlélteti: a képlékeny ágyazaton nyugvó képlékeny gerendák teherbírásszámítása és optimális tervezése és a merev test közvetítésével terhelt képlékeny féltér vizsgálata. Mindkét feladat megoldása lineáris programozásra vezet.

1. Bevezetés

A közelmúltban az Építőmérnökkari Mechanika tanszéken olyan diszkrét mechanikai modelleket dolgoztunk ki, amelyek a rugalmas ill. képlékeny ágyazat és a reá helyezett szerkezet viszonylag pontos, de pl. a véges elemek módszerénél lényegesen kisebb számítási munkát igénylő numerikus vizsgálatára alkalmasak [1, 2, 3, 4]. Az alábbiakban az egyik mechanikai modell, az ún. nyírási modell általánosítását mutatjuk be. Ennek az általánosított modellnek a segítségével elő lehet állítani a képlékeny állapotú inhomogén félsík, ill. féltér statikailag elérhető feszültségmezőit és ezáltal az eddigi numerikus vizsgálatok köre további képlékenységtani feladatokra is kiterjeszthető. A feladatok megoldása lineáris programozásra vezet.

A továbbiakban feltételezzük, hogy az inhomogén félsík, ill. féltér síkbeli feszültség-, ill. síkbeli alakváltozás-állapotban van, anyaga tökéletesen képlékeny és felső vízszintes határoló élére ill. lapjára — közvetlenül vagy más szerkezetek közvetítésével — csak függőleges erők működhetnek.

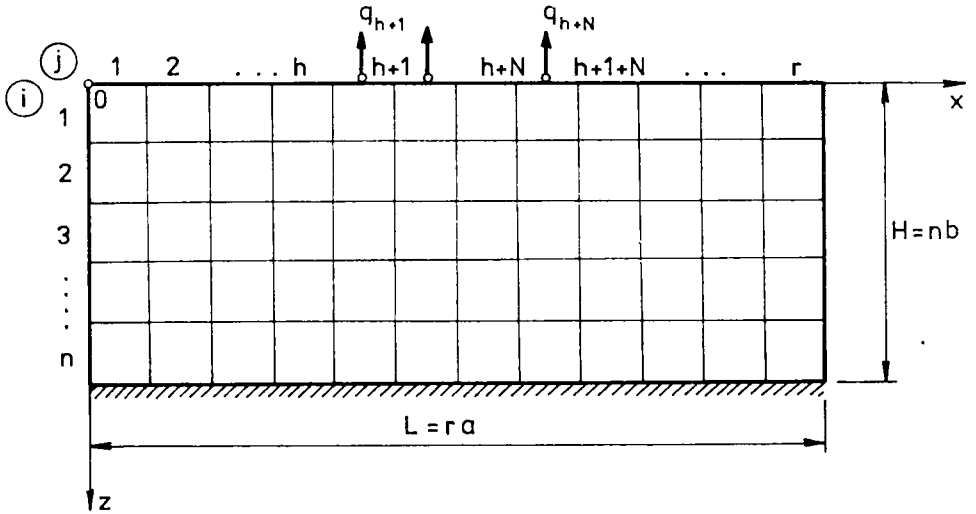
2. A modell ismertetése

A síkbeli feszültségállapotban levő képlékeny félsík illetőleg a síkbeli alakváltozás-állapotban levő képlékeny féltér javasolt mechanikai modellje olyan azonos méretű, prizmatikus elemekből áll, amelyek egymásra a vízszintes

* Dr. Kaliszky Sándor, 1089 Budapest, Delej utca 6.

** Dr. Nédli Péter, 1118 Budapest, Homoród utca 20.

érintkezési lapok mentén csak normálerőket adnak át, a függőleges lapok mentén pedig normálerők, nyíróerők és nyomatékok ébredhetnek. A továbbiakban — a numerikus vizsgálatoknál szokásos módon — a felsík ill. féltér $L = ra$ és $H = nb$ méretű része képezi vizsgálataink tárgyát (1. ábra).



1. ábra

A tömegerőt elhanyagolva az ij elem egyensúlyát az alábbi két egyenlet fejezi ki (2a ábra):

$$(s_{ij} - s_{i+1,j}) + (t_{ij} - t_{i,j+1}) = 0, \quad (1)$$

$$(m_{ij} - m_{i,j+1}) + \frac{a}{2} (t_{ij} + t_{i,j+1}) = 0, \quad (2)$$

$$n_{ij} - n_{i,j+1} = 0.$$

Ezekhez *statikai kerületi feltételek* csatlakoznak. Ha például a felsíkot, ill. féltérrel $q_{h+1}, \dots, q_{h+N}$ függőleges erők terhelik, akkor a felső határoló vonalra ill. síkra vonatkozóan az

$$\begin{aligned} s_{1j} &= 0; \quad (j = 1, 2, \dots, h), \quad (j = h + 1 + N, \dots, r) \\ s_{1j} &= q_j; \quad (j = h + 1, \dots, h + N) \end{aligned} \quad (3)$$

feltételek írhatók fel. Ha a függőleges határoló élek ill. síkok *szabadok*, akkor

$$\left. \begin{aligned} m_{i1} &= t_{i1} = 0, \\ m_{i,r+1} &= t_{i,r+1} = 0, \\ n_{i1} &= n_{i,r+1} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (t = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

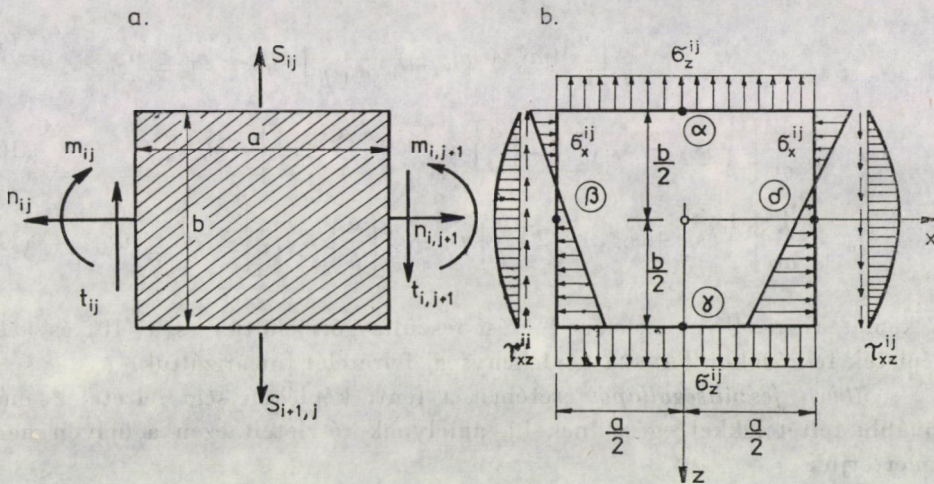
Mozdulatlan függőleges határoló élek ill. síkok mentén statikai kerületi feltételek nincsenek megszabva.

Az elemre működő erők és erőpárok függvényében levezethetők olyan σ_x^{ij} , σ_z^{ij} , σ_{xz}^{ij} feszültségmezők, amelyek egy elem valamennyi pontjában kielégítik a

$$\frac{\partial \sigma_x^{ij}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{ij}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}^{ij}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z^{ij}}{\partial z} = 0$$

egyensúlyi egyenleteket. Egy ilyen *statikailag lehetséges* feszültségmező az alábbi (2/b ábra):



2. ábra

$$\sigma_x^{ij} = \frac{-12}{b^2 c} \left(\frac{z}{b} \right) \left\{ \frac{a}{2} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] (t_{ij} - t_{i,j+1}) + \left(\frac{x}{a} \right) (m_{ij} - m_{i,j+1}) + \right. \\ \left. + \frac{n_{ij}}{bc} - \frac{1}{2} (m_{ij} + m_{i,j+1}) \right\}, \quad (5)$$

$$\sigma_z^{ij} = \frac{1}{ac} \left\{ 6 (s_{ij} - s_{i+1,j}) \left[\frac{1}{3} \left(\frac{z}{b} \right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{z}{b} \right) \right] + \frac{1}{2} (s_{ij} + s_{i+1,j}) \right\}, \quad (6)$$

$$\tau_{xz}^{ij} = \frac{6}{bc} \left[\left(\frac{z}{b} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] \left[\left(\frac{x}{a} \right) (t_{ij} - t_{i,j+1}) - \frac{1}{2} (t_{ij} + t_{i,j+1}) \right]. \quad (7)$$

A képletekben c az elem y irányú méretét jelöli.

A fenti feszültségmező akkor lesz *statikailag elérhető*, ha az elem valamennyi pontjában kielégíti a képlékenységi feltételeket. A továbbiakban a

képlékenységi feltételek teljesülését csak az elem határoló éleinek középpontjaiban biztosítjuk, könnyen belátható azonban, hogy ezáltal az elem $\beta - \delta$ középvonalán fekvő pontokban is kielégülnek a képlékenységi feltételek. TRESCA elméletét alkalmazva ezek a feltételek *síkbeli alakváltozás állapotban* az (5)–(7) feszültségeloszlások felhasználásával az alábbi módon fejezhetők ki:

$$f_\alpha = \frac{1}{ac} \left| s_{ij} + \frac{3}{4} \left(\frac{a}{b} \right)^2 (t_{ij} - t_{i,j+1}) + \frac{3}{b} \left(\frac{a}{b} \right) (m_{ij} + m_{i,j+1}) - \left(\frac{a}{b} \right) n_{ij} \right| - \sigma_0^{ij} \leq 0, \quad (8)$$

$$f_\gamma = \frac{1}{ac} \left| s_{i+1,j} - \frac{3}{4} \left(\frac{a}{b} \right)^2 (t_{ij} - t_{i,j+1}) - \frac{3}{b} \left(\frac{a}{b} \right) (m_{ij} + m_{i,j+1}) - \left(\frac{a}{b} \right) n_{ij} \right| - \sigma_0^{ij} \leq 0, \quad (9)$$

$$f_\beta = \frac{1}{ac} \left[\frac{1}{2} \left| s_{ij} + s_{i+1,j} - 2 \left(\frac{a}{b} \right) n_{ij} \right| + 3 \left(\frac{a}{b} \right) \left| t_{ij} \right| \right] - \sigma_0^{ij} \leq 0, \quad (10)$$

$$f_\delta = \frac{1}{ac} \left[\frac{1}{2} \left| s_{ij} + s_{i+1,j} - 2 \left(\frac{a}{b} \right) n_{ij} \right| + 3 \left(\frac{a}{b} \right) \left| t_{i,j+1} \right| \right] - \sigma_0^{ij} \leq 0. \quad (11)$$

A képletekben σ_0^{ij} -vel az elem folyási feszültségét jelöltük és a (10) és (11) képletek felírásakor TRESCA képlékenységi feltételét linearizáltuk.

Síkbeli feszültségállapot esetében a fenti képlékenységi feltételek még további feltételekkel egészülnek ki, amelynek részleteit ezen a helyen nem ismertetjük.

Az (1) és (2) egyensúlyi egyenletek, a statikai kerületi feltételek valamint a (8)–(11) képlékenységi feltételek a teljes képlékeny, félsík ill. féltér statikailag elérhető feszültségmezőinek egyszerű előállítását teszik lehetővé, ezek pedig különböző képlékenységtani feladatok numerikus vizsgálatának alapjául szolgálhatnak. Az alábbiakban bemutatjuk az alkalmazás néhány lehetőségét.

3. Alkalmazások

3.1. Képlékeny ágyazású, képlékeny gerendák teherbírásszámítása és optimális tervezése

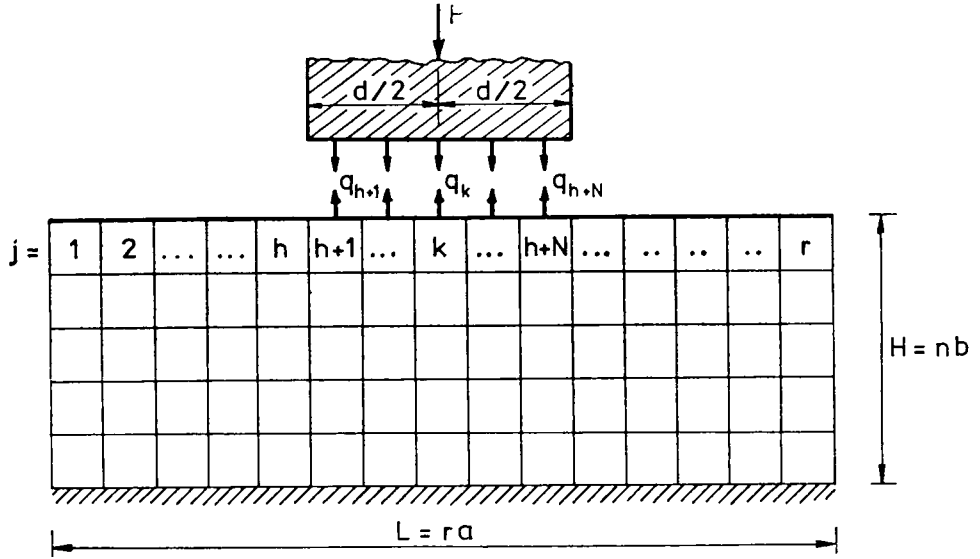
Vegyük szemügyre egy $m \cdot p_k$ egyparaméteres teherrel terhelt, m_k^0 törőnyomatékokkal bíró $d = Na$ hosszú képlékeny gerendát, amely képlékeny ágyazaton nyugszik (3. ábra). Az ágyazat és a gerenda között q_k érintkezési erők ébrednek, így az ágyazat felső peremére az

$$m_t = m_s = \max! \quad (16)$$

feltétel alapján határozható meg. A gerenda *optimális tervezése* esetében viszont az optimum-feltétel

$$\sum_{k=h+1}^{h+N} m_k^0 = \min! \quad (17)$$

alakban fejezhető ki.



4. ábra

Megállapítható, hogy az ágyazat (1), (2) egyensúlyi egyenletei és (8)–(11) képlékenységi feltételei, valamint a gerenda (14) egyensúlyi egyenletei és (15) képlékenységi feltételei a kerületi feltételekkel együtt lineáris egyenlet-, ill. egyenlőtlenségrendszert alkotnak, és a (16), ill. (17) extremumfeltétel ugyancsak lineáris alakú. A képlékeny ágyazaton nyugvó képlékeny gerendák teherbírásszámítása és optimális tervezése tehát egyaránt lineáris programozási feladat.

3.2. Parciálisan terhelt félsík ill. féltér teherbírása

Vizsgáljunk egy képlékeny félsíkot ill. féltérrel, melynek $d = Na$ hosszúságú szakaszát egy merev test közvetítésével P nagyságú erő terheli (4. ábra). Az ágyazat felső peremére ennél a feladatnál is a (12)-vel kifejezett feltételek írhatók fel, a merev test egyensúlyát pedig az alábbi két egyenlet fejezi ki:

$$\sum_{k=h+1}^{h+N} q_k + P_s = 0, \quad (18)$$

$$\sum_{k=h+1}^{h+N} kq_k + \left(h + \frac{N+1}{2} \right) P_s = 0.$$

Végül a félsík ill. féltér teherbírását a statikai tétel szerint a

$$P_t = P_s = \max! \quad (19)$$

feltétel szabja meg. Látható, hogy a (18) és (19) egyenletek a félsík, ill. féltér statikailag elérhető feszültségállapotát leíró (1), (2) és (8)–(11) egyenletekkel és a kerületi feltételekkel együtt ennek a feladatnak a megoldásánál is lineáris programozásra vezetnek.

4. Megjegyzések

Az ismertett modell és számítási eljárás segítségével a képlékeny félsík, ill. féltér inhomogenitása és — a megfelelő elemek szilárdságát (σ_0^{ij}) zérusnak tekintve — nyílások, ill. üregek jelenléte is egyszerűen figyelembe vehető. Annak sincs akadálya, hogy TRESCA képlékenységi feltétele helyett az anyag viselkedését jobban megközelítő képlékenységi feltételeket alkalmazzuk és a félsík, ill. féltér önsúlyát is figyelembe vegyük. Ugyanakkor a modell térbeli általánosítása bonyolultabb feladatok (pl. ágyazaton nyugvó lemezek, tartórácsok, panelvázás szerkezetek) vizsgálatát is lehetővé teszi. Ilyen irányú kutatások folyamatban vannak.

IRODALOM

1. KALISZKY S.—GALASKÓ GY.: A rugalmas ágyazat egy új modellje *Mélyépítéstudományi Szemle* 25 (1975) 298—305
2. KALISZKY S.—GALASKÓ, GY.: Numerical Applications of the Pyramid Model of Subgrade Analysis. *Periodica Polytechnica, Civ. Eng.* 20 (1976), No 3—4
3. KALISZKY S.: A rugalmas ágyazat egyszerű, diszkrét modelljei *Építés-, Építéstudomány* (1978)
4. KALISZKY S.: Simple, Discrete Models of the Elastic Subgrade. *Acta Technica Hung.* (in press)

A simple discrete model of the inhomogeneous plastic half-plane and half-space. The paper describes the simple production of the statically feasible stress fields of an inhomogeneous half-space or half-plane by means of a new type discrete model which, in turn, may render a basis for studies on various plasticity problems. Elaboration of the numerical method has assumed that the inhomogeneous half-space or halfplane of an ideally plastic material would be in planar deformation or stress state, and that its edge would be directly affected, or indirectly via some structure, only by normal stresses. Application possibilities are illustrated by two problems: calculation of the load bearing capacity and optimum design of plastic brams held by plastic support, and the examination of a plastic half-space loaded with the intermediary of a rigid body. The solution of both problems would lead to linear programming.

Das einfache diskrete Modell der Halbebene und des Halbraumes. Der Aufsatz zeigt, daß die statisch möglichen Spannungsfelder des inhomogenen Halbraumes, bzw. der inhomogenen Halbebene mit Hilfe eines neuen diskreten Modells leicht hergestellt werden und diese die Grundlage zur Untersuchung verschiedener Aufgaben im Rahmen der Plastizitätslehre bilden können. Bei der Ausarbeitung der numerischen Methode wurde angenommen, daß der inhomogene Halbraum bzw. die inhomogene Halbebene aus ideal plastischem Stoff besteht, sich im ebenen Formänderungs- bzw. Spannungszustand befindet und auf die Ränder unmittelbar oder durch Vermittlung einer Konstruktion nur Normalspannungen übertragen werden können. Die Anwendungsmöglichkeit veranschaulichen zwei Aufgaben: die Berechnung der Tragfähigkeit und die optimale Planung von, auf plastischer Bettung gelegenen plastischen Balken und die Untersuchung des durch Vermittlung eines starren Körpers belasteten plastischen Halbraumes. Die Lösung beider Aufgaben führt zur linearen Programmierung.

Дискретная модель неоднородных пластичных полуплоскости и полупространства. Работа показывает, что с помощью новой дискретной модели можно просто изготовить статически возможное поле напряжения неоднородных полупространства или полуплоскости, которое является основой анализа разных задач теории пластичности. Во выработывании численного метода материал неоднородных полупространства или полуплоскости считается идеальным пластичным в состоянии плоского напряжения или плоской деформации и нагружено по краям только нормальными напряжениями.

Возможность применения представляется двумя задачами: расчет несущей способности и оптимизации пластических балок, лежащие на пластичном упругом основании и анализ пластичного полупространства нагружен через твердое тело. Решение обоих задач ведутся на задачу линейного программирования.