

EGYENES TENGELYŰ, A HOSSZA MENTÉN VÁLTOZÓ JELLEMZŐKKEL BÍRÓ, HAJLÍTÓ LENGÉST VÉGZŐ RÚD SAJÁTKÖRFREKVENCIÁINAK JAVÍTHATÓ KÖZREFOGÁSA

KOVÁCS MIKLÓS,* RICHLIK GYÖRGY,**
TAKÁCS FERENC,*** TÓTH GYÖRGY****

Jelen tanulmány a címben foglalt feladat megoldására ad számítási módszert. Sajátkörfrekvencia felső korlátok nyerése a Poincaré—Rayleigh—Ritz-féle finitizálással, alsó korlátok meghatározása a Fichera-féle ortogonális invariánsok elméletének BOSZNAY által javasolt módon történő alkalmazásával lehetséges.

1. Bevezetés

Mint ismeretes [1], az egyenes tengelyű rúd egyszerű hajlító lengését a

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = -\varrho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

változó együtthatós, parciális differenciálegyenlet, és a hozzá tartozó peremfeltételrendszer definiálja. Az alkalmazott jelölések:

$E = E(x)$	a Young-féle modulusz,
$A = A(x)$	a keresztmetszeti idom területe,
$\varrho = \varrho(x)$	a rúdanyag sűrűsége,
$I_z = I_z(x)$	a keresztmetszeti síkidom z súlyponti főtengelyére számított másodrendű nyomatéka,
$u = u(x, t)$	a rúdtengely xy fősíkbán mutakozó, „kicsinynek” tekintett eltolódása,
xyz	a rúd „saját koordinátái” [2],
t	az idő.

(1) állóhullámú megoldását keresve,

$$u(x, t) = v(x) \sin \alpha t \quad (2)$$

helyettesítéssel élve, a

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} \right) = \alpha^2 \varrho A v \quad (3)$$

* Kovács Miklós, 1116 Budapest, Hengermalom u. 5-3-B-8

** Richlik György, 1204 Budapest, Orsolya u. 1.

*** Takács Ferenc, 1118 Budapest, Szüret u. 27.

**** Tóth György, 1055 Budapest, Szt. István krt. 13.

közönséges differenciálegyenlethez jutunk. Itt

$v = v(x)$ az $u(x, t)$ elmozdulás ún. amplitúdó eloszlás függvénye,
 α a sajátkörfrekvencia.

Vezessük be az alábbi definíciókkal az A és B operátorokat:

$$Av \doteq \frac{d^2}{dx^2} \left(EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} \right), \quad (4)$$

$$Bv \doteq \rho Av.$$

(4)-gyel a (3) differenciálegyenlet

$$(A - \alpha^2 B) v = 0 \quad (5)$$

operátoros egyenletéhez jutunk.

A feladat peremfeltételrendszerét

$$Kv = 0 \quad (6)$$

alakba tömöríthetjük, ahol K lineáris operáció [2].

Megjegyezzük, hogy a (4)-gyel definiált A és B operátorok lineárisak, pozitívak, szimmetrikusak, s A egyben önadjungált differenciáloperátor is. Így az (5) és (6) egyenletekkel meghatározott sajátértékfeladatnak megszámlálhatóan végtelen sok izolált sajátértéke van, és ezek a végesben nem torlódhatnak [2]. A sajátértékeket nagyságuk szerint rendezhetjük, a többszörösöket megfelelő sokszor véve:

$$\alpha_1^2 \leq \alpha_2^2 \leq \dots \leq \alpha_n^2 \leq \dots \quad (7)$$

A továbbiakban célul kitűzött problémánk megoldását, azaz az (5), (6) sajátértékfeladat első n számú, (7)-tel jelölt sajátértékeinek közrefogását két lépésben végezzük. Először felső korlátokat nyerünk a Poincaré—Rayleigh—Ritz-féle finitizálással, majd ezek felhasználásával az ortogonális invariánsok módszerét alkalmazva kapunk alsó korlátokat.

2. Javítható felső korlátok számítása a Poincaré—Rayleigh—Ritz-féle finitizálással

E módszer alkalmazhatóságának feltétele (a numerikus szempontokat is szem előtt tartva) az önadjungáltság és pozitív definitség esetünkben teljesül, és így viszonylag egyszerűen juthatunk megfelelő számú felső korláthoz.

Ha pl. az első n számú $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ frekvenciához akarunk felső korlátokat meghatározni, akkor találnunk kell n darab

$$\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x) \quad (8)$$

lineárisan független rendszert alkotó, és megfelelő peremfeltételeket kielégítő függvényt. [3] ad útmutatást arra nézve, miként lehet ilyen tulajdonságú függvényrendszert Hermite-polinomok segítségével konstruálni. Mivel (5), (6) önadjungált és pozitív definit, elméletileg vehetjük φ_ν -ket ($\nu = 1, \dots, n$) megengedett függvényeknek.

Ezekután erre az n -dimenziós altérre történő vetítéssel a

$$\sum_{i=1}^n [(A\varphi_i, \varphi_j) - \alpha_j^2 (B\varphi_i, \varphi_j)] c_i = 0, \quad (j = 1, \dots, n) \quad (9)$$

finit sajátértékfeladathoz jutunk [4], ahol

$$(A\varphi_i, \varphi_j) \doteq \int_{x=0}^L \frac{d^2}{dx^2} \left(EI_z \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} \right) \varphi_j dx,$$

$$(B\varphi_i, \varphi_j) \doteq \int_{x=0}^L \rho A \varphi_i \varphi_j dx,$$

L pedig a rúd hossza.

(9) α_ν^2 ($\nu = 1, \dots, n$) gyökei pozitív valós számok és fennáll, hogy

$$\alpha_\nu^2 \leq \alpha_{f\nu}^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{f\nu}^2 = \alpha_\nu^2, \quad \nu = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Nilvánvaló tehát, hogy n növelésével javuló felső sajátkörfrekvencia korlátok adódnak. (9) $\alpha_{f\nu}^2$ -hez tartozó $w_{f\nu}$ sajátvektora a

$$w_{f\nu} = \sum_{i=1}^n c_{i\nu} \varphi_i$$

alakba írható, ahol $c_{i\nu}$ ($i = 1, \dots, n$) a (9) egyenlet $\alpha_f^2 = \alpha_{f\nu}^2$ -nél vett megoldása.

(9) típusú ún. „két mátrixos” sajátértékfeladat sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározására [5] jól használható numerikus eljárás ALGOL programját közli, feltételezve, hogy a mátrixok közül az első pozitív definit. Vizsgálataink azt mutatták, hogy ez az eljárás biztosan csak abban az esetben működik, ha a $\varphi_\nu - k$ ($\nu = 1, \dots, n$) komparatív függvények. Ez egyben a tényleges megoldás jobb közelítését is jelenti.

3. Javítható alsó korlátok számítása az ortogonális invariánsok módszerével

Az általunk választott, javítható alsó korlátok számítására szolgáló eljárás elméleti megalapozását BOSZNAV előadásai [6], [7], [8], [9], [10], [11] tartalmazzák, amelyekben módszert adott az ún. Fichera-formulában [12]

előforduló ortogonális invariánsok kiszámítására (ill. becslésére) tetszőleges térbeli rúdszerkezetek vizsgálata esetében. Célunk, a [6] — [11]-ben kidolgozott elvi módszert adott feladatunkra alkalmazni úgy, hogy az egyben algoritmusul szolgálhasson konkrét numerikus számítások végzéséhez. (A bizonyításokat mellőzzük, csak az eljárás tömör vázlatát közöljük.)

Esetünkben — közbenső operátorokkal [2] felírva, $s = m = 1$ helyettesítéssel élve, [8] — a Fichera formula a következő:

$$\frac{1}{\alpha_{av}^2} = \frac{I_1^1(A_{k1}^{-1} B_{k2}) - I_1^1(P_n A_{k1}^{-1} B_{k2} P_n)}{I_0^1(P_n^{(v)} A_{k1}^{-1} B_{k2} P_n^{(v)})} + \frac{1}{\alpha_{fv}^2},$$

$$(v = 1, \dots, n), \quad (12)$$

ahol az egyes ortogonális invariánsok a következőképpen számíthatók:

$$I_1^1(A_{k1}^{-1} B_{k2}) = \int_{x=0}^L \varrho_a A_a G_a(x, x) dx + \sum_{l=1}^{k_1+2k_1} \int_{x=0}^L \Psi_l(x) \Phi_l(x) dx, \quad (13)$$

$$I_1^1(P_n A_{k1}^{-1} B_{k2} P_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_{fi}^2},$$

$$I_0^1(P_n^{(v)} A_{k1}^{-1} B_{k2} P_n^{(v)}) \text{ def } 1.$$

(13)-ban

$$\Psi_l(x) = \psi_l^{(1)}(x), \quad \Phi_l(x) = -\varphi_l^{(1)}(x) \quad (l = 1, \dots, k_2),$$

$$\Psi_l(x) = \psi_l^{(2)}(x), \quad \Phi_l(x) = -\varphi_l^{(2)}(x), \quad (l = k_2 + 1, \dots, k_2 + k_1),$$

$$\Psi_l(x) = \psi_l^{(3)}(x), \quad \Phi_l(x) = \varphi_l^{(3)}(x), \quad (l = k_2 + k_1 + 1, \dots, k_2 + 2k_1),$$

és

$$\varphi_s^{(1)}(x) = G_a M_a \zeta_s(x), \quad (s = 1, \dots, k_2),$$

$$\psi_s^{(1)}(x) = \sum_{r=1}^{k_1} \left[\int_{x=0}^L M_a \zeta_l(x) \zeta_m(x) dx \right]_{rs}^{-1} M_a \zeta_r(x), \quad (l, m, s = 1, \dots, k_2),$$

$$\varphi_s^{(2)}(x) = \varphi_s^{(3)}(x) = \sum_{j=1}^{k_1} \left[\int_{x=0}^L G_a A \eta_r(x) C_a \eta_m(x) dx \right]_{js}^{-1} \cdot G_a C_a \eta_j(x),$$

$$(r, m, s = 1, \dots, k_1), \quad (14)$$

$$\psi_s^{(2)}(x) = B_a G_a C_a \eta_s(x), \quad (s = 1, \dots, k_1),$$

$$\psi_s^{(3)}(x) = \sum_{r,l=1}^{k_1} \left[\int_{x=0}^L M_a \zeta_l(x) \zeta_m(x) dx \right]_{rt}^{-1} M_a \zeta_l(x) \int_{x=0}^L M_a \zeta_r(x) G_a C_a \eta_s(x) dx,$$

$$(l, m = 1, \dots, k_2),$$

$$(s = 1, \dots, k_1).$$

(14)-ben az egyes operátorokat az alábbiak definiálják:

$$A_a v \doteq E_a I_{za} \frac{d^4 v}{dx^4},$$

$$B_a v \doteq \varrho_a A_a v,$$

$$C_a v \doteq (A - A_a) v,$$

$$M_a v \doteq (B_a - B) v,$$

$$G_a v \doteq \int_{\xi=0}^L G_a(x, \xi) v(\xi) d\xi,$$

ahol az E_a , A_a , ϱ_a , I_{za} állandók az (1)-gyel leírt eredeti feladathoz rendelt ún. „alsó alapfeladat” [2] (1)-nek megfelelő mennyiségei, a $G_a(x, \xi)$ mag pedig az alsó alapfeladat Green függvénye.

$\eta_s(x)$ ($s = 1, \dots, k_1$) és $\zeta_t(x)$ ($t = 1, \dots, k_2$)-a számoló által alkalmasan megválasztott — lineárisan független, komparatív függvényrendszer. Ezek konstruálásánál célszerű felhasználni a már megtalált, és a Poincaré—Rayleigh—Ritz eljárásnál alkalmazott (8) rendszert, valamint a megoldásként kapott (11) rendszert.

Látható, hogy a (12) formula alapján meghatározható α_{av} ($v = 1, \dots, n$) alsó sajátkörfrekvencia korlátok kiszámítása gépi úton, viszonylag egyszerű programrendszer elkészítését kívánja meg.

IRODALOM

1. BOSZNAY Á.: Egyenes rudak egyszerű lengései. II. rész. Hosszirányú, csavaró és hajlító lengések, Mérnöki Továbbképző Intézet előadássorozataiból: 3402. Kézirat, 1955
2. BOSZNAY Á.: Kontinuumnak modellezett rúdszerkezet sajátfrekvenciáinak javítható közrefogása. Doktori értekezés, 1974
3. FALK S.: A műszaki mechanika numerikus módszerei és azok alkalmazása a mérnöki gyakorlatban. II. rész. Budapest 1968
4. COLLATZ, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K.-G. Leipzig 1949
5. WILKINSON, J. H.—REINSCH, C.: Linear Algebra (Handbook for Automatic Computation). Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1971
6. BOSZNAY, Á.: IX. Conference on Machine Dynamics Smolenice (1974. Sept.): Improvable Bracketing of Eigenfrequencies of Continuous Systems
7. BOSZNAY, Á.: Kolloquium über neuere Arbeiten auf dem Gebiete der Mechanik und der Strömungslehre, Techn. Hochschule Wien, 1974. Nov.: Verbesserungsfähige Einschließungen der Eigenfrequenzen kontinuierlicher Systeme
8. BOSZNAY, Á.: 14th Congress of IUTAM, Delft 1976. Improvable Bracketing of Eigenfrequencies of Structures by FICHERA's Theory of Orthogonal Invariants
9. BOSZNAY, Á.: Lectures on the Université de Liège, 1976. Nov. Old and New Methods for Improvable Bracketing of Eigenfrequencies of Structures
10. BOSZNAY, Á.: Lower Bounds for Eigenfrequencies by the Finite Element Method. Theor. and Appl. Mech. Third Nat. Congr. on Theor. and Appl. Mech. Varna 13—16 Sept. 1977. Proceedings Vol. 1. pp. 315—320
11. BOSZNAY, Á.: Kolloquium über neuere Arbeiten auf dem Gebiete der Mechanik und der Strömungslehre. Techn. Universität Wien. 1977. Nov.: Untere Schranken für die Eigen-

frequenzen kontinuierlicher elastischer Systeme mittels der Methode der finiten Elemente

12. FICHERA, G.: Linear Elliptic Differential Systems and Eigenvalue Problems. Lecture Notes in Mathematics 8, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1965

Corrigable delineation of the eigenfrequencies of a straight rod of variable characteristics along its length, and performing bending oscillation. The paper offers a calculation method for solving the problem referred to in the title. Determination of the angular eigenfrequencies' upper limit is feasible by means of the Poincaré-Rayleigh-Ritz finitization, while that of their lower limit by using the Fichera theory of orthogonal invariants in the manner suggested by Bosznay.

Korrigierbare Einschachtelung der Eigenkreisfrequenz eines Biegeschwingungen ausführenden Stabes mit gerader Achse und längs dieser wechselnden Kennwerten. Die vorliegende Studie zeigt ein zur Lösung der im Titel angeführten Aufgabe geeignetes Berechnungsverfahren. Die Bestimmung der oberen Grenzen der Eigenkreisfrequenz ist durch die Poincaré-Rayleigh-Ritz'schen Finitisierung, die Bestimmung der unteren Grenzen durch die von Bosznay vorgeschlagenen Anwendung der Fichera'schen Theorie der orthogonalen Invarianten möglich.

Двухстороннее, уточняемое органичение собственных частот прямого стержня проводящего изгибные колебания, имеющего изменяющиеся характеристики вдоль своей продольной оси. Статья выработает вычислительный метод для решения данной задачи. Расчёт верхних ограничений для собственных частот происходит с помощью метода «Понкаре—Рэли—Ритз», а расчёт нижних ограничений для собственных частот осуществляется с пользованием теории относительности Фикера, (т. наз. ортогональные инварианты, предложенные профессором Боснаи.