

HIBANÉGYZET MINIMUM ELVRE ALAPOZOTT MÓDOSÍTOTT VÉGES ELEM MÓDSZER ALKALMAZÁSA A KONTINUUMMECHANIKÁBAN

PÁCZELT ISTVÁN

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

NÁNDORI FRIGYES

A javasolt módszer a hagyományos hibanégyzet minimum elvre alapozott számításoktól [1] eltérően, az ismeretlen függvényt a peremértékfeladat differenciálegyenletét kielégítő, elemenként értelmezett koordinátafüggvények lineáris kombinációjával közelíti. Az ismeretlen állandókat olyan kvadratikus funkcionál minimum feltevése nyeri, amely biztosítja egyik elemről a másikra való átmenetnél a függvénynek és az egymástól független (vagy a mechanikai tartalomtól függő) deriváltjainak integrál értelemben vett folytonosságát, továbbá a peremfeltételek ugyancsak integrál értelemben vett kielégítését.

1. A minimalizálandó funkcionál felépítése

Keressük a V térfogaton az

$$L(\varphi) = 0 \quad (1)$$

parciális differenciálegyenlet megoldását a

$$g_1(\varphi) = \psi_1 \quad \text{az } A_1\text{-en,} \quad (2)$$

$$g_2(\varphi) = \psi_2 \quad \text{az } A_2\text{-n} \quad (3)$$

peremfeltételek mellett, ahol L — differenciáloperátor, g_1, g_2 — algebrai, vagy differenciáloperátorok, φ — ismeretlen skalárfüggvény, ψ_1, ψ_2 — az A_1, A_2 felületeken megadott értékek. A_1 és A_2 együtt a teljes perem.

Az (1)–(3) problémát a következőképpen oldjuk meg.

A V tartományt felosztjuk altartományokra (elemekre) V^e ($e = 1, \dots, N$) és elemenként az ismeretlen φ függvényt

$$\varphi^e = \varphi^e(\mathbf{x}) = \Phi^{eT}(\mathbf{x}) \mathbf{a}^e, \quad \mathbf{x} \in V^e \quad (4)$$

alakban approximáljuk, ahol

$$\Phi^{eT}(\mathbf{x}) = [\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_k(\mathbf{x})]^e$$

olyan approximációs mátrix (sorvektor)¹⁾, amelyben a φ_i ($i = 1, \dots, k$) koordinátafüggvények kielégítik az (1) egyenletet, továbbá

¹⁾ A többdimenziós vektorokat, mátrixokat félkövér betűvel jelöljük; T — a transzponálás jele.

$\mathbf{a}^{eT} = [a_1, \dots, a_k]^e$ — ismeretlen állandók vektorát, míg $\mathbf{x}$ — a V^e térfogat (x_1, x_2, x_3) koordinátájú pontját jelöli.

Igy az approximált φ folytonossága az elemek határán „a priori” nem biztosítható, mivel az elemenkénti állandók azonosságát nem követelhetjük meg, mert ezzel lemondanánk a lokális approximációról.

Az elemek határán a φ függvénynek és deriváltjainak folytonosságát — jelen esetben — hibanégyzet minimum elv alapján, integrál értelemben teljesítjük. Ezáltal az össz ismeretlenek száma² $k \times N$, melyek a fentiek alapján a következő funkcionál minimumából nyerhetők:

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N-1} \sum_{j=e+1}^N \left\{ \int_{A_c^{ej}} (\varphi^e - \varphi^j)^2 dA + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^I \beta_i \int_{A_c^{ej}} (\mathbf{d}_i(\varphi^e) - \mathbf{d}_i(\varphi^j))^2 dA \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \sum_{z=1}^2 \gamma_z \int_{A_z^e} (g_z(\varphi^e) - \psi_z)^2 dA, \end{aligned} \quad (5)$$

ahol A_c^{ej} az e és j elemek közös határa, A_z^e az A^e elemfelület A_z peremre eső része, $\mathbf{d}_i$ ($i = 1, \dots, I$) — differenciáloperátor, β_i ($i = 1, \dots, I$) γ_1, γ_2 — felveendő „súly” állandók.

A $\mathbf{d}_i$ operátorok Laplace-egyenlet megoldásakor a $\text{grad}(\varphi)$ és függetlenül felírható másodrendű deriváltakat tartalmazó differenciáloperátorok.

A rugalmasságtani feladatok feszültségfüggvényen keresztül történő megoldásakor (pl. Airy-, Love-féle feszültségfüggvényeknél), φ -nek az illesztése (integrál értelemben) az elemek határán felesleges, elegendő a mechanikai illesztési — dinamikai és kinematikai — feltételek figyelembevétele, azaz

$$\boldsymbol{\rho}_n^e = \boldsymbol{\rho}_n^j, \quad \mathbf{u}^e = \mathbf{u}^j, \quad \mathbf{x} \in A_c^{ej},$$

ahol $\mathbf{u}$ — elmozdulásmező, $\boldsymbol{\rho}_n$ — az A_c^{ej} felületen ható feszültségvektor. Lényeges, hogy a $\Phi^e(\mathbf{x})$ függvényeknek a merevtestszerű elmozdulást is tartalmazniuk kell.

Az S funkcionál minimumának szükséges feltételéből nyert algebrai egyenletrendszer $\partial S / \partial \mathbf{a} = \mathbf{0}$ együttható mátrixa, az (5)-ben szereplő összegzési szabály alapján, könnyen előállítható. Lineáris g_1, g_2 operátorok mellett az egyenletrendszer szintén lineáris.

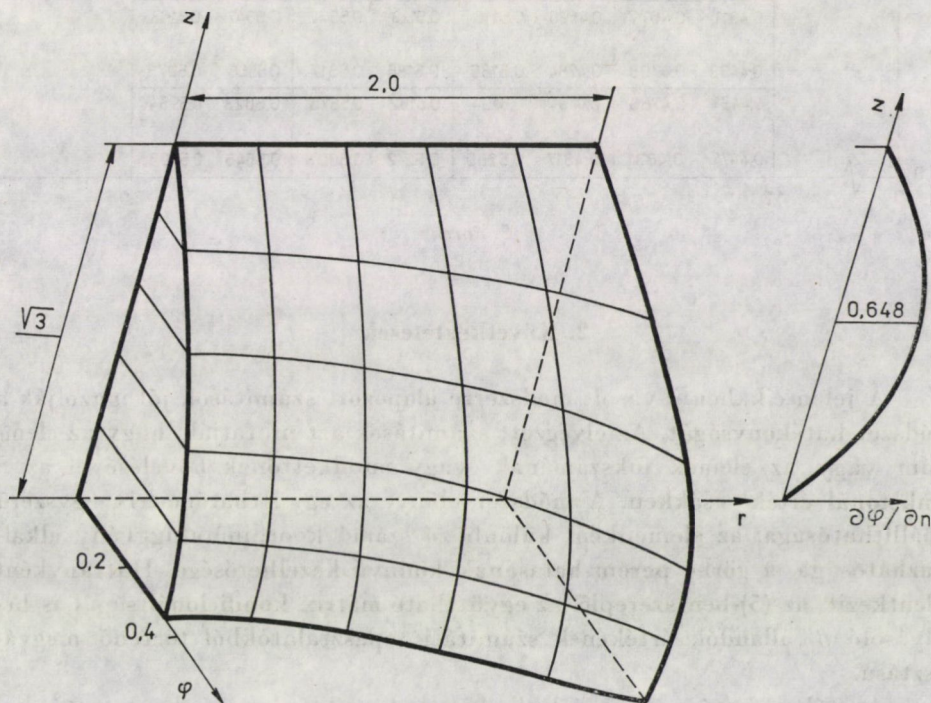
Példa: Keressük az $\mathbf{x} = (r, z)$ henger koordináta-rendszerben az A tartomány felett a $\Delta \varphi = 0$ egyenlet megoldását a Γ_1 és Γ_2 peremeken adott $g_1(\varphi) \equiv \varphi = \psi_1$, illetve $g_2(\varphi) \equiv \partial \varphi / \partial n = \psi_2$ peremfeltételek esetében. Itt Δ —

² Feltételeztünk, hogy minden elemnél a koordinátafüggvények száma k .

Laplace-operátor, $\partial\varphi/\partial n$ — normális derivált. A (4) alapján felvett, hat harmonikus koordinátafüggvényt tartalmazó approximációs mátrix a következő:

$$\Phi^e T(\mathbf{x}) = [1, z, 2z^2 - r^2, 2z^3 - 3zr^2, 8z^4 - 24z^2r^2 + 3r^4, 8z^5 - 40z^3r^2 + 15r^4z]^e.$$

A 1. ábra a $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq z \leq \sqrt{3}$ tartomány felett tünteti fel φ -t $N = 100$ esetében, $\beta_1 = 10$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\mathbf{d}_1 = \nabla$ — nabla differenciáloperátor mellett.



1. ábra

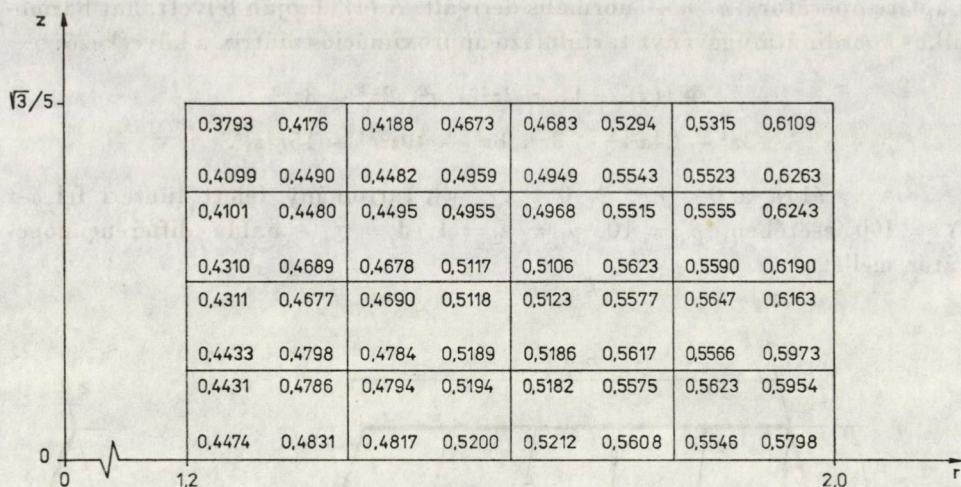
Peremfeltételek:

$$\Gamma_1(z = \sqrt{3}): \varphi = 0,$$

$$\Gamma_2(r = 0): \partial\varphi/\partial r = 0, \quad (z = 0): \partial\varphi/\partial z = 0,$$

$$(r = 2): \partial\varphi/\partial r = 1,106993z - 0,639123z^2.$$

A kapott eredmények alapján a peremfeltételek kielégítésének maximális hibája 3,0%. Az elemek belső határán φ -ben tapasztalható szakadás az $1,2 \leq r \leq 2$, $0 \leq z \leq \sqrt{3}/5$ tartományon a legnagyobb. E tartományon a φ változó különböző elemekhez tartozó csomóponti értékeit tünteti fel a 2. ábra. Látható, a szakadás mértéke elhanyagolhatóan kicsiny.



2. ábra

2. Következtetések

A jelen cikkben javasolt módszerre alapozott számítások jól igazolják a módszer hatékonyságát. Az elvégzett számítások azt mutatják, hogy az elemszám vagy az elemek foksámának, vagy mindkettőnek növelésével az S funkcionál értéke csökken. A módszer előnye az együtthatómátrix egyszerű előállíthatósága, az elemenként különböző számú koordinátafüggvény alkalmazhatósága, a görbe perem hatásának könnyű kezelhetősége. Hátrányként jelentkezik az (5)-ben szereplő, az együttható mátrix kondicionáltságát is befolyásoló β_i állandók értékének számítási tapasztalatokból történő megválasztása.

A szóban forgó módszer jól alkalmazható például a rugalmas tartó csavarását leíró Laplace-egyenlet Neumann-féle peremértékfeladatánál, ugyancsak a tartó szabad csavarásánál jelentkező Poisson-féle egyenlet megoldásánál, a prizmatikus tartó hajlítási—nyírási feladatánál fellépő Neumann-féle feladat vizsgálatánál [2], a rezgő tartályban elhelyezkedő folyadék hidrodinamikai nyomásának meghatározásánál, továbbá síkrugalmasságtani feladatok biharmonikus egyenlet megoldásán keresztül történő vizsgálatánál, illetve forgástestek feszültségállapotának Love-féle feszültségfüggvényen [2] keresztül történő tisztázásánál.

IRODALOM

1. ERNEST, D.—EASON: A Review of Least-squares Methods for Solving Partial Differential Equations, *Int. J. num. Meth. Engng.*, **10** (1976), 1031—1046
2. LURJE, A. I.: Teorija uprugost'i, „Nauka”, M. 1970

Application of a modified method of finite elements based on the minimum error square principle in continuum mechanics. As against the calculations based on the traditional minimum error square principle, the suggested method approximates the unknown function by a linear combination of the co-ordinate functions satisfying the differential equation of the boundary value problem, and interpreted by elements. The unknown constants are obtained from a quadratic functional minimum condition which ensures, in the case of transition from one element to the other, the continuity of the function and its interindependent (or mechanical contents dependent) derivatives in an integral sense, as well as the satisfaction of the boundary conditions similarly in an integral sense, again.

Anwendung der auf dem Prinzip des Fehlerquadratminimums beruhenden veränderten Methode der finiten Elemente in der Kontinuumsmechanik. Zum Unterschied von den herkömmlichen, auf dem Prinzip des Fehlerquadratminimums beruhenden Berechnungen sucht die vorgeschlagene Methode die unbekannte Funktion mit der die Differentialgleichung der Randwertaufgabe befriedigenden linearen Kombination der als Elemente gedachten Koordinatenfunktionen anzunähern. Die unbekannten Konstanten liefern die Minimumbedingung eines quadratischen Funktionals, das bei Übergang von einem Element zum andern die Kontinuität in integralem Sinne der Funktionen und ihrer voneinander unabhängigen (oder vom mechanischem Inhalt abhängigen) Derivate, ferner die ebenfalls im integralen Sinne aufgefaßte Befriedigung der Randbedingungen enthält.

Модифицированный метод конечных элементов в механике сплошных сред, основанный на методе наименьших квадратов. Предлагаемый метод в отличие от основного метода наименьших квадратов основан на том, что искомая функция аппроксимируется по элементам линейнонезависимыми друг от друга функциями, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям краевой задачи. Неизвестные постоянные определяются из условия минимума некоторого функционала, который построен так, чтобы он обеспечивал непрерывность функции и её независимой друг от друга (или зависящей по механическому содержанию друг от друга) производной при переходе с одного элемента на другой, и выполнение граничных условий и интегральном смысле также.