PERIODIKUS MOZGÁSOK STABILITÁSA

SZERVÁNSZKY GYÖRGY*

Jelen munka a mozgásstabilitás — lényegében Ljapunovtól származó — definíciójából kiindulva, a gyakorlat számára jól használható eljárást kíván adni periodikus mozgások stabilitásának eldöntésére. Az eredmény tétel formájában nyer megfogalmazást, amelynek alkalmazására a dolgozat számpéldát (Van der Pol egyenlet) mutat be.

Bonyolultabb rendszerek mozgásának vizsgálatakor gyakran felmerülő probléma, hogy a kialakuló mozgás mennyire érzékeny a kezdeti értékekre. A dolgozat célja jól használható kritériumot adni periodikus tulajdonságokat mutató mozgások stabilitásának eldöntésére.

A vizsgálat alapjai a mozgás stabilitására vonatkozó, lényegében LJAPUNOVTÓL [1] származó definíciók:

1. A mozgást leíró $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ differenciálegyenlet rendszer $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ kezdeti értékekhez tartozó $\xi = \xi(t, \mathbf{x}_0)$ megoldását stabilisnak mondjuk, ha létezik $\varepsilon > 0$ úgy, hogy bármely $\delta\ (\varepsilon) > 0$ esetében az $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}_0$ $|\Delta\mathbf{x}_0| < \delta$ kezdeti értékhez tartozó megoldás vonatkozásában az

$$|\xi(t, \mathbf{x}_0) - \xi(t, \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség teljesül;

2. a mozgást leíró $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ differenciálegyenlet rendszer stabilis $\xi = \xi\ (t, \mathbf{x}_0)$ megoldását aszimptotikusan stabilisnak mondjuk, ha

$$\lim_{t \to \infty} \xi(t, \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}_0) = \xi(t, \mathbf{x}_0).$$

Tekintsük ezek után az

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{1}$$

differenciálegyenlet rendszert. Legyen az $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ kezdeti értékhez tartozó megoldás

$$\xi = \xi(t, \mathbf{x}_0)\ , \tag{2}$$

az $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}_0$ kezdeti értékhez tartozó megoldás pedig

$$\mathbf{q} = \xi + \eta \tag{3}$$

* Szervánszky György, 1119 Budapest, Allende-park 19.

alakú. (3)-at (1)-be helyettesítve és η szerint sorba fejtve

$$\dot{\xi} + \dot{\eta} = \mathbf{F}(\xi + \eta) = \mathbf{F}(\xi) + \mathbf{F}'(\xi)\eta + \mathbf{Q}(\xi, \eta), \tag{4a}$$

azaz

$$\dot{\eta} = \mathbf{F}'(\xi)\eta + \mathbf{Q}(\xi, \eta) \tag{4b}$$

adódik. Itt a $'$ az argumentum szerinti deriválást jelenti. Természetesen

$$\lim_{|\eta|\to 0} \frac{|\mathbf{Q}|}{|\eta|} = 0 \tag{5}$$

teljesül.

Bizonyos, későbbiekben látható feltételek teljesülése esetében a stabilitást (4) lineáris részének viselkedése dönti el. Éppen ezért vizsgálatainkat (4) lineáris részére korlátozzuk.

Tegyük fel, hogy ξ T szerint periodikus. Így az $\mathbf{F}'(\xi)$ mátrix, amely a t idő függvényének tekinthető, szintén T szerint periodikus lesz. Bevezetve az $\mathbf{A} = \mathbf{F}'$ jelölést, (4) lineáris részeként az

$$\dot{\eta} = \mathbf{A}(t)\, \eta \tag{6}$$

lineáris differenciálegyenlet rendszer adódik. Továbbá teljesül, hogy

$$\mathbf{A}(t + T) = \mathbf{A}(t).$$

Az (5) differenciálegyenlet rendszerhez rendelhető mátrix differenciálegyenlet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{7}$$

Ennek megoldása lehet

$$\mathbf{U}(t) = e^{\int_0^t \mathbf{A}(\tau)\, d\tau}\, \mathbf{x}_0 = \mathbf{G}(t)\, \mathbf{x}_0 \tag{8}$$

alakú.

Mivel $\mathbf{A}$ T szerint periodikus,

$$\int_t^{t+T} \mathbf{A}(\tau)\, d\tau = \int_0^T \mathbf{A}(\tau)\, d\tau = \mathbf{Q} \tag{9}$$

teljesül. Ezzel

$$\mathbf{U}(t + T) = e^{\mathbf{Q}} + \int_0^t \mathbf{A}(\tau)\, d\tau x_0 = \mathbf{M}\mathbf{G}(t)\, \mathbf{x}_0 = \mathbf{M}\mathbf{U}(t). \tag{10}$$

Itt

$$\mathbf{M} = \mathbf{e}^{\mathbf{Q}} \tag{11}$$

a megoldás ún. főmátrixa ([1], [2]).

Az általánosság különösebb korlátozása nélkül M-et diagonálisnak tekinthetjük, ugyanis ez megfelelő hasonlósági transzformációval mindig biztosítható.

A (7) differenciálegyenlettel ekvivalensnek mondjuk az

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{BY} \tag{12}$$

differenciálegyenletet, ha (12) $\mathbf{V}(t)$ és (7) $\mathbf{U}(t)$ megoldása között nem elfajuló lineáris kapcsolat áll fenn,

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{S}(t)\,\mathbf{V}(t),$$

és

$$\mathbf{S}(t + T) = \mathbf{S}(t) \tag{13}$$

teljesül. A mondott ekvivalencia teljesül, mint ez a differenciálegyenletek elméletéből ismeretes, ha (7) és (12) differenciálegyenletek főmátrixa egy hasonlósági transzformáció erejéig megegyezik.

A (7) egyenlettel ekvivalens (12) egyenlet $\mathbf{B}$ együtthatója választható időtől függetlennek, ugyanis ekkor

$$\mathbf{V}(t) = e^{\mathbf{B}t}\,\mathbf{Y}_0,$$

azaz egyrészt

$$\mathbf{V}(t + T) = e^{\mathbf{B}T}\,V(t)$$

teljesül, másrészt (10) alapján

$$\mathbf{U}(t + T) = \mathbf{MU}(t)$$

adódik, és ezzel az ekvivalencia miatt az

$$\mathbf{M} = e^{\mathbf{B}T} \tag{14}$$

összefüggést nyerjük.

Ezzel tehát az (5) differenciálegyenlet megoldása

$$\eta(t) = \mathbf{S}(t)\,e^{\mathbf{B}t}\eta_0 \tag{15}$$

alakban állítható elő, ahol (9), (11) és (14) alapján

$$\mathbf{B} = \frac{1}{T}\mathbf{Q}. \tag{16}$$

Legyenek $\mathbf{B}$ sajátértékei λ_i-k, ekkor $\mathbf{M}$ a következő alakban állítható elő:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T} & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & e^{\lambda_n T} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Így, ha valamennyi

$$R_e\lambda < 0\,,$$

akkor (15) megoldásra teljesül a

$$\lim_{t\to\infty} \eta(t) = 0$$

egyenlőség. Ezzel, figyelembe véve (4)-et és (5)-öt, az eredeti (1) differenciálegyenlet rendszer $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}_0$ kezdeti értékekhez tartozó megoldására vonatkozó érvényes a

$$\lim_{t\to\infty} \xi(t, \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}_0) = \xi(t, \mathbf{x}_0)$$

összefüggés, azaz a megoldás aszimptotikusan, és így közönséges értelemben is stabilis. Megfogalmazhatjuk tehát a következő tételt: az $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ differenciálegyenlet rendszer $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ kezdeti értékhez tartozó $\xi = \xi(t, \mathbf{x}_0)$ megoldása aszimptotikusan, és így közönséges értelemben stabilis, ha az

$$\dot{\eta} = \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\xi(t)} \eta \tag{18}$$

lineáris differenciálegyenlet rendszerhez rendelhető mátrix-differenciálegyenlet diagonális főmátrixa valamennyi elemének valós része egynél kisebb.

Alkalmazzuk eredményünket a jól ismert Van der Pol-féle egyenletre ([3], [4]). Az egyenlet

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\,\dot{x} + x = 0 \tag{19}$$

alakú. ($\mu > 0$).

A megfelelő egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \mu y - \mu x^2 y. \end{aligned} \tag{20}$$

Legyen (19) megoldása

$$x = h(t),$$

ezzel

$$y = \dot{h}(t).$$

Előállítva (18)-at a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1-2\mu h\dot{h} & \mu(1-h^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Ahhoz, hogy tovább léphessünk, h-nak legalább közelítő ismerete szükséges. Tegyük fel, hogy μ kicsi és legalábbis $t \gg 0$ esetében

$$h(t + T) = h(t).$$

(19) alapján látszik, hogy az

$$\int_t^{t+T} h d\tau = 0,$$

$$\int_t^{t+T} h^2 d\tau = N \text{ (konstans)},$$

$$\int_t^{t+T} \dot{h}^2 d\tau = N, \text{ és végül}$$

$$\int_t^{t+T} h^2 \dot{h}^2 = N$$

összefüggések teljesülnek. A megoldást Fourier-sor alakjában keresve, a fentiek miatt $h = h(t)$-re a

$$h = 2 \sin (t + t_0)$$

közelítő megoldás adódik. Ezzel (11) és (16) alapján

$$\mathbf{B} = \frac{1}{T} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\mu \end{bmatrix}$$

lesz. $\mathbf{B}$ sajátértékeit a

$$\det (\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}) = 0$$

egyenlet alapján nyert

$$\lambda^2 + \mu\lambda + 1 = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei szolgáltatják:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 - 1}\,.$$

Mivel

$$0 < \mu < 1,$$

a sajátértékek valós része negatív, s ezzel a főmátrix elemeinek valós része egynél kisebb. Tehát tételünk alapján megállapíthatjuk, hogy a mondott feltételek teljesülése esetében ($0 < \mu < 1$) a Van der Pol-féle egyenlettel leírt mozgás aszimptotikusan stabilis.

Összefoglalva a dolgozatban mondottakat úgy tűnik, hogy a leírt módszer könnyebbé teszi a problémák numerikus (gépi) kezelését, mivel így elkerülhető — adott esetekben — a sokszor könnyen meg nem található Ljapunov-féle függvény vizsgálata.

IRODALOM

1. PONTRJAGIN, L. Sz.: Közönséges differenciál egyenletek. Akadémiai Kiadó, Budapest 1972
2. PARS, L. A.: A treatise on Analitical Dynamics. Heinemann, London 1965
3. HAHN, W.: Stability of Motion. Springer-Verlag, Berlin 1967
4. FARKAS M.: Nem lineáris rezgések. Differenciál egyenletek és műszaki alkalmazásaik c. nyári iskola. Miskolc-Egyetemváros 1977

Stability of periodic movements. Starting from the definition of movement stability actually created by LYAPUNOV, the present paper attempts to offer a well adaptable method for practical use, suitable for deciding on the stability of periodic movements. The result is defined in the form of a theorem whose application is illustrated by means of a numerical example (Van der Pol equation).

Stabilität der periodischen Bewegungen. Die vorliegende Abhandlung soll von der — im wesentlichen von LJAPUNOW stammenden — Definition der Bewegungsstabilität ausgehend, der Praxis eine gut brauchbare Methode für das Ermessen der Stabilität periodischer Bewegungen darbieten. Das Ergebnis ist eine Formel, für deren Anwendung ein Zahlenbeispiel (Van der Pol-Gleichung) angeführt ist.

Устойчивость периодических движений. Настоящая работа, посвященная устойчивости движений, — используя определение, принадлежащее Ляпунову, — предлагает практический метод для решения устойчивости периодических движений. Результат сформулирован в форме леммы, примененной для рассчëта практической задачи (уравнения Ван дер Поля).